学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中小学生课堂故事博览

否定中的肯定

——逻辑的故事

BOOK

内部资料 非卖品

逻辑中的基本概念

计算机已经闯入我们的生活。众所周知，它可以用一些巧妙的方法出色地完成许多事情，却不能创造这些方法。创造这些方法的是人！就本质讲，计算机只是人的“模仿”，它必须照人类的安排去执行，仅此而已。对人类来说，重要的是创造。创造这个字眼似乎很神秘，但却是人类的骄傲！

当人们进行思索的时候，首先闪人脑海的，应该是大量与思索对象有关的事实和结论。这些事实和结论在脑中形成一连串判断的句子，这些句子在逻辑上称为命题。这一连串的命题便构成了思索的前提。

例如：当我们思考如何保证飞行人员在紧急状态下的安全时，闪现在脑中的命题大概有：

命题 1：物体从高处下落，落体的速度会越来越快。

命题 2：人以极大速度落于地面会造成死亡。

命题 3：在空气中纸张要比石子下落慢得多。

命题 4：如果天空有风，那么风筝将会飘悬在半空。

有了这些命题作为思索的前提，接下去便是依据这些命题作合理的推理。

命题有简单的，也有复杂的，被人类长期实践所证实，我们无需证明而认为是正确的命题，叫“假说”或“公理”。而那些能够证明是正确的命题叫“定理”。在逻辑学中，我们常用一个字母表示一句话。如：

p=“天空有风”

Q=“风筝会飘悬在半空”

很明显，P 与 Q 各自代表一个简单的命题，在命题 4 中，P 是 Q 的前提，因此这是一个复合命题。在逻辑学中，我们常用箭矢号“→”表示联系词“如果…，那么…”或“若…，则…”。例如，命题 4 可以用符号写成：

$P \rightarrow Q$

表示式 $p \rightarrow Q$ 称为一个蕴涵关系。在蕴涵关系中，如果作为前提的命题是真的，那么作为结论的命题便是可信的。第一个使用降落伞的人，就是相信了这样的推理：用伞状的布，可以帮助自己从高处下落的危险中得以解救。

一个命题的反意或否定，我们用在代表该命题的字母顶上加一横来表示。

这个符号的含意是：“如果风筝不会飘悬在半空，那么天空没有风。”

关于推理的科学，以后的章节我们会陆续讲到。读者将会看到，数学与逻辑推理有着千丝万缕的关系。数学家为我们创造了思考和观察世界的方法，使人类能够卓有成效地进行一连串推理。在古代的希腊，研究几何需要一个欧几里得那样的脑袋。而公元 1637 年，法国数学家笛卡儿（Descartes，1596～1650）却告诉人们，如何把几何问题转化为代数的问题，借助于这种

方法，几何中便不会有多大的难题。同样地，对复杂的逻辑问题，直接推理常使人感到智穷力竭。然而，十九世纪中叶，英国数学家布尔（Bodle，1815～1864）所创立的逻辑代数，却能轻松地解决这类难题。今天，人们把布尔的法则输入计算机，才使计算机赋有了逻辑推理的神力。

从一则寓言故事谈起

从前，一个懒人有一大瓮米。

一天，他盘算道：

“我将卖掉这些米，并买来尽可能多的小鸡。这些鸡长大后会下很多蛋。然后我把鸡和蛋卖了，再买来许多猪。当这些猪长大的时候，便会生许多小猪。那时我再把它们卖了，买回一些水牛。有了水牛，就会有许多小水牛。如果我把它们卖了，我就有钱买一块地。有了地，便可以种稻米、甘蔗和谷物。有了收成，我还可以买更多的地。再经营几年，我就能够盖上一幢漂亮的房子。”

“当我盖好房子，我将娶一个世上最美的女人做妻子。”

“那时，我是多么地富有，多么地幸福啊！”

懒人兴奋得手舞足蹈，不小心踢破了瓮，米倾落在肮脏的地面上。此时，邻居的一大群鸡蜂拥而来，把地上的米啄食精光。小鸡、猪、土地、房子和美丽的女人，一切的一切全都成了泡影。留给这个懒人的只是一只破了的瓮。

尽管懒人的结局是可悲的，但他的演绎术却颇值称道。

下面我们研究一下懒人是怎样进行一连串推理的。

首先，他从一瓮米开始，提出命题：“如果有米，那么可以卖掉米，买来尽可能多的小鸡”。简记为：“若有米，则有鸡”。这实际上是关于“有米”者的一个命题，不论这有米者是谁。所以是个大前提。

懒人的第二个命题是：“我有一瓮米”，这是小前提。如果上述两个前提为真，那么推出的结论一定不假。用 P 代表“有米”，Q 代表“有鸡”，于是有：

【大前提】$P \to Q$，若有米，则有鸡。

【小前提】P，我有一瓮米。

【结论】Q，那么我有尽可能多的鸡。

懒人接下去的推理是：

【大前提】若有鸡，则有蛋。

【小前提】我有鸡。

【结论】我有蛋。（我的鸡会生蛋）

【大前提】若有鸡和蛋，则有猪。

【小前提】我有鸡和蛋。

【结论】我有尽可能多的猪。

…………

以上这些都是演绎推理的简单例子。这种由大前提、小前提和结论三部分组成的演绎推理方法，称为“三段论”。在三段论法中，如果我们承认 P→Q 是真实的，而由此推得的逻辑上的合理结论，可以写成：

P→Q

$\frac{P}{Q}$

若 P、Q 是经验命题，那么复合命题 P→Q 真实与否就不得而知。若要说明不成立，只需举出一个反例就够了。例如“凡是鸡都会下蛋”，“若有鸡和蛋，则有猪”，这些经验命题都未必是成立的。这正是懒人悲剧之所在。而懒人的演绎推理方法，却是无可指责的。

若 P、Q 是分析命题，例如 P 是“乘法交换律 m·n＝n·m”，Q“5·3＝3·5”，对于规定的“数”和“乘法”，要么两者都成立，要么两者都不成立。如果我们同意前一个命题，我们也就必须同意后一个命题。复合命题 P→Q 在这种意义下被认为是真实的。

今天初中课本上讲的平面几何都是在公理的基础上通过科学的演绎，建立起来的。

下面我们看一看如何通过演绎的方法，证明“三角形内角和等于 180°”。

（l）【大前提】：过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行。

【小前提】C 是直线 AB 外一点。

【结论】存在唯一直线 CD∥AB。

（2）【大前提】两直线平行，同位角相等。（定理）

【小前提】CD∥AB

【结论】（同位角）∠1＝∠4

（3）【大前提】两直线平行，内错角相等。（定理）

【小前提】CD∥AB

【结论】（内错角）∠2＝∠5

（4）【大前提】若是平角，

则等于 180（定义）

【小前提】∠3＋∠4＋∠5 为平角

【结论】∠3＋∠4＋∠5＝180°

（5）【大前提】在等式中，一个量可以用它的等量来代替。（公理）

【小前提】∠1＋∠2＋∠3＝∠3＋∠4＋∠5

【结论】∠1＋∠2＋∠3＝180°（即为所证）

在实际运用中，三段论时常采用省略式。对于大前提不说也明白的情形，可以省去。例如：

“在△ABC 中∵AB＝AC【小前提】∴∠B＝∠C”【结论】

这里省略的大前提：“等腰三角形底角相等”是众所周知的。

在小前提内容和大前提联系极为明显，或结论可以必然推出时，相应的小前提或结论也可以省略。

例如：甲、乙两人相遇，甲说：“我从来不给傻子让路！”乙反唇相讥说；“我可恰恰相反。”甲的三段论是：

【大前提】我从来不给傻子让路。

【小前提】（你是傻子）。

【结论】（我不给你让路）。

乙的三段论是：

【大前提】我可恰恰相反。（即我只给傻子让路）

【小前提】（你是傻子）。

【结论】（我给你让路）。

虽然甲和乙都只讲了大前提，但由于是当面对话，且又辅以一定动作，所以小前提和结论都省略了。当然，省略式必须运用得当，否则便会隐藏某种错误。例如有时我们会听到学生这样评论考试，说是：“今天题目很难，因此我考不好”。初听起来，不觉得有毛病，其实这里隐藏了一个错误的大前提：“如果题目很难。那么一定会考不好”。所以初学三段论法，不要轻易采用省略式。

否定中的肯定

一天，老师想测试甲乙丙丁四名学生的分析推理能力，便拿了两顶白帽，一顶红帽，一顶黄帽，一顶蓝帽让四人依序坐在四级台阶上，然后叫他们闭上眼睛，又替每人戴上一顶帽子。最后，他让学生们张开眼睛，并判断自己头上戴的帽子是什么颜色。

大家经过思考后，丁开口道：

“甲坐得最高，能看到其余三人的帽子，他为什么说猜不出来呢？肯定他看到了前面有人戴着白帽。因为假如前面的人都戴杂色帽的话，那么他就能猜出自己所戴的是非白帽而莫属了。乙，为什么也说猜不到呢？一定是她也看到了前面有人戴着白帽。不然的话，她就会从甲的态度和其他人的帽色，判断自己戴着白帽。最后说丙，她的智商绝不比乙低，可她为什么也说猜不到呢！理由只能是一个，就是她看到了我头上戴着白帽”。

就这样，某丁从众人的否定中对自己的帽色作了肯定！

上面的游戏可以推广到多个人，但杂色帽要比人数少一，而白帽则至少两顶。推理的方法是一样的。只是无论结论是肯定的还是否定的，思维都必须符合一定的规律。

逻辑思维的基本规律是什么呢？总的说有以下三条：

（l）同一律：即思维应自始至终保持统一。

（2）矛盾律：即思维中两个相反或不相容的判断不能都真。

（3）排中律：在思维过程中，对一个逻辑上的判断，要么肯定，要么否定，非假即真。

以上三条规律，从不同角度对人类正确思维的一贯性、确定性和无矛盾性提出要求。

要指出的是：有不少人以为，由“是’与“不是”构成的句子一定是相反的判断。若其中有一句是正确的，那么另一句就一定不正确。实际上这种看法未必都对。

例如：本句是否定句。

本句不是否定句。

两句中，前一句与后一句的主语“本句”，其包含的内容是不相同的。

有时人们从一些貌似正确可以接受的约定出发，经过简明而正确的推理，竟然会得出自相矛盾的结论。这样的议论称为悖论。

悖论渊源于相当久远的年代。著名的“说谎者”悖论出现于公元前 6 世纪。大意是：克利特岛上的 E 先生说：“克利特岛上的人是说谎者”。不难发现，无论怎样回答都将出现矛盾。

在近代数学中最有影响的是所谓“罗索悖论”。公元 1902 年，英国数学家罗素（RUSSell，1872～1970）针对集合论初创时期基础理论不够完善，提出以下著名的议论：

“把所有集合分为两类，第一类中的集合以其自身为元素，第二类中的集合不以其自身为元素。假令第一类集合所组成的集合为 P，第二集合所组成的集合为 Q，

问：集合 Q 是属于第一类集合 P 呢？还是属于第二类集合 Q？”

从逻辑上讲，这个问题的回答只能是“Q∈p 或 Q∈Q”两种，二者必居其一。然而无论哪种回答都会引伸相反的结论。

悖论在日常生活中并不少见。

古希腊有这么一个传说：一条鳄鱼从一位母亲手里抢走了一个小孩。鳄鱼想吃掉这个小孩，又希望名正言顺，于是自作聪明地对这位母亲说：

“我会不会吃掉你的孩子？如果你答对了这个问题，我将把孩子还给你。”这位母亲思考片刻回答道：

“你要吃掉我的孩子的。”这一来，贪婪的鳄鱼遇到了难题：“说母亲回答的不对吧，那么我就可以吃掉她的孩子，但她明明说我要吃掉她的孩子，这岂不又成对了吗？如果说她回答是对的，这就是说我要吃掉她的孩子，但我又必须把孩子不加伤害地还她！天哪！这该怎么办？！”

笨拙的鳄鱼给弄懵了，为了假惺惺表示尊重诺言，只好把孩子还给了这位机智的母亲。

悖论的产生，在逻辑上，违背了人类正确思维所应遵循的基本规律。对素以严谨著称的数学，悖论自然不能永久允许。但它却可以促使数学家们去

进行严肃的思考，并寻找那导致悖论的原因，从而创造出一个至少在逻辑上完美协调、无懈可击的科学理论。

异曲同工的证法

在初中几何中，大家已经了解了命题的四种形式：

【原命题】P→Q

【逆命题】Q→P

【否命题】$\overline{P}\longrightarrow\overline{Q}$

【逆否命题】$\overline{Q}\longrightarrow\overline{P}$

它们之间的联系是：

原命题是真的，道命题未必也真；否命题是真的，逆否命题未必也真。然而，原命题与逆否命题，逆命题与否命题，它们的真假性却是一致的。要么同真，要么同假。也就是说，原命题与逆否命题等价，否命题与逆命题等价。

在数学上，命题的等价变换常被用来证明一些正面很难入手的问题，下面是一个精妙无比的实例。

大家知道，大约在公元前 3 世纪，古希腊数学家埃拉托色尼（Eratosthenes，公元前 274？～前 1947）提出了一种编造质数表的方法。这种方法类似于筛东西，把不要的筛掉，把需要的留下来。具体做法是：将从 2 到 N 的自然数，按顺序排列成 2，3，4，5，…，N 然后留下第一个 2，划去所有的 2 的倍数；2 之后没被划去的第一个数是 3，留下 3，划去所有 3 的倍数；在 3 后面没被划掉的第一数是 5，留下 5，划去所有 5 的倍数；如此继续，直至上述一列数中再也没有可划的数为止，留下来的便是 N 以内的一切质数。如上表，64 以内的质数共有 18 个。

可能会有人对这种古老的筛法不屑一顾，那可是大错而特错，多少世纪以来，无数优秀的数学家曾经为寻找质数的解析表达式做过大量的工作，但始终没能获得成功。困惑人类二个半世纪的哥德巴赫猜想，倘若有了质数的表达式，大约也不会是什么困难的问题。如今人们所编造出的 10 亿以内的质数表，靠的依然是埃拉托色尼筛法，只是略加改进而已。

令人诧异的是：公元前 1934 年，一名年轻的东印度学生辛答拉姆（Sundaram），提出了一种与埃拉托色尼迥然不同的筛法。辛答拉姆首先列出了一张表，表的第一行和第一列都是首项为 4，公差为 3 的等差数列。从第二行开始，以后各行也是等差数列，公差分别为 5，7，9，11，13……。

辛答拉姆指出：如果 N 出现在上表中，则 2N＋1 是合数；若 N 不在上表中，则 2N＋1 是质数。辛答拉姆的证明相当精彩。首先，他写出了第 n 行的第一个数 4＋（n－1）×3＝3n＋1

注意到该行是公差为 2n＋1 的等差数列，所以此行第 m 列的数是：

$(3n+1)+(m-1)(2n+1)=2(m+1)n+m$

现在设 N 是表中的第 n 行第 m 列的数，则 $N=(2m+1)n+m$

于是

$2N+1=2[(2m+1)n+m]+1$

$=(2m+3)(2n+1)$

所以是个合数。

再设 N 不在上表中。要想正面证明 2N＋1 不是质数，是相当困难的。如果换成证明等价的逆否命题，即证“若 2N＋1 不是质数，则 N 必在表中”似乎要容易得多。事实上，若

$2N+1=x\cdot y$，（x、y 为整数）

则因 2N＋1 为奇数，x、y 也必为奇数。不妨设：

$x=2p+1$；$y=2q+1$

从而

$2N+1=(2p+1)(2q+1)=2p(2q+1)+(2q+1)$ N 是表中第 p 行第 q 列的数。

综合上述，我们证明了辛答拉姆筛法的正确性。例如 18 不在表中，则 2×18＋1＝37 是质数。相反，71 在表中，则 2×71＋1＝143 是合数，它有因子 11 和 13。

在数学上，有时为了证明命题 R 的真实性，不是从命题 R，而是从它的否命题出发，经过合理的推导，最后引出矛盾，从而得出命题 R 不能不真。这种常见而有效的证题方法，称为反证法。反证法一般包含三个步骤：

（1）反设：即否定求证的结论；

（2）归谬：即推出矛盾。

（3）结论：即肯定原求证结论成立。

反证法常被用于证明唯一性、无理性、无限等问题。对一些直接不易下手，或正面门类较广而反面却只有一两种的情形，也适宜用反证法。在一些问题中，命题以否定的形式出现，并伴有“至少…”、“不都…”、“不能…”、“不是…”、“没有…”、“都不…”等指示性的词语，这也从侧面提醒我们尝试用反证法。辛答拉姆证明的后半部分，实际用的也是反证法。只是当初是从命题变换角度考虑罢了。

下面我们看一种有趣的“换色”游戏，它对于反证法的运用，是一个极好的练习！

在 3×3 格里，游戏者每次可以更换同一行或同一列三个棋子的颜色。白的换成黑，黑的换成白。问能否通过有限次的“换色”？

聪明的读者在几次尝试失败之后，一定会猜得到结论是否定的。不过，要想证明它，可得花一番脑筋！（解答可见《智力游戏的间接推理》一节）

文氏图推理法

用图形表示集合，首创于瑞士数学家欧拉。上一世纪末，英国逻辑学家文恩（venn，1834～1923）重新采用了这种办法，把一个集合画成一个圆。两个集合的交集就用两个相交圆的公共部分来表示；而两个集合的并集，及集合 A 的补集，分别由上图阴影部分表示。这样的图称为文恩图。

用文恩图解一些有关集合的问题，常常可以收到意外的效果。

例如某班有学生 45 人，其中 20 人有兄弟，10 人有姐妹，有兄弟又有姐妹的只有 1 人。

问该班独生子女有多少？

只要画出相应的文恩图答案几乎是一目了然。

用文恩图作逻辑推理，大约是文思作为逻辑学家当初的本意。在三段论法中，我们从某些大前提和小前提出发得到了结论如：

【大前提】所有奇数的平方除以 8 余 1

【小前提】a 为奇数

【结论】a^2 除以 8 余 1

每一个三段论法至少含有三个元素或集合。每一个元素或集合都在三段论法中出现两次。如上例中含有：奇数集合除以 8 余 1 的数的集合和元素数 a。假定奇数的平方集合为 E，除以 8 余 1 的数的集合为 M。

同样，我们可以根据某些提供的前提，通过画文恩图做出结论。例如，对于前提：“有些女孩子爱逛街，所有爱逛街的人学习成绩都不理想。”

假令 A＝｛女孩子｝

B＝｛爱逛街的人｝

C＝｛学习成绩不理想的人｝

由于前提告诉我们：“所有爱逛街的人学习成绩都不理想”。又“有些女孩子爱逛街”，从而 A 与 B 必相交，容易根据上面的关系画出相应的文恩图。

下面的三段论法表明了另一种关系：

【大前提】早睡早起的人（A）身体好。

【小前提】有些孩子（C）身体不好（B）。

【结论】有些孩子没有早睡早起。

由大前提知道，A、B 不相交。由小前提知道 B、C 必相交，相应的文恩。推出的结论：“有些孩子没有早睡早起”。

最后我们看一个颇为有名的路易斯卡洛尔推理的实例。

已知：

（l）房中所有注明日期的信都是用蓝纸写的；

（2）Mr·G 写的信都是用“亲爱的”起始的；

（3）除 Mr·Z 以外没有人再用黑墨水写信；

（4）我能看的信都未收藏起来；

（5）只有单页信纸的信中无一是未注明日期的；
（6）未做记号的信都是用黑墨水写的；
（7）用蓝纸写的信都收藏起来了；
（8）一页以上信纸的信中无一是做记号的；
（9）以“亲爱的”开头的信无一是 Mr·Z 写的。

求证：我不能看 Mr·G 写的信。

【证明】令

P＝{注明日期的信}

Q＝{蓝信纸的信}

R＝{墨水写的信}

S＝{Mr·Z 写的信}

T＝{藏起来的信}

U＝{我能看的信}

V＝{单页信纸的信}

W＝{做记号的信}

x＝{Mr·G 写的信}

Y＝{以“亲爱的”开头的信}

根据（l）—（9）的关系，我们可以画出文恩图。

由上一节故事中命题变换的等价性知道，上面的关系可以换成等价的写法。这意味着“Mr·G”写的信应属“我不能看的信”之列。

有趣的智力游戏

智力问题形形色色，大多各有各自的特点。有时貌似复杂，无从下手，然而一旦“天机道破”，解决它便易如反掌。

各类智力问题的难，大多难在一个“巧”字。本书的许多章节，正是致力于探求这类问题的推理技巧。这一节我们将要讲述的是，怎样应用间接推理的方法，即通过否定肯定，反证归谬、命题变换、反向推理等手段，去解决许多类型的智力问题。

先看一个有趣的“猜帽色”的问题。

老师为了辨别他的三个得意门生中谁更聪明些，而采用了以下的方法：事先准备好 5 顶帽子，其中 3 顶是白的，2 顶是黑的。他先把这些帽子让三个人都看了看，然后要他们闭上眼睛，又替每人戴上一顶帽子。实际上老师让每人戴的都是白帽，而将黑帽藏起来了。最后再让他们张开眼睛，并判断自己头上戴的帽子是什么颜色。

三位学生互相看了看，都犹豫了一会，然后又几乎同时判定出自己头上戴着白色的帽。那么，这三位学生是怎样推断出自己的帽色呢？原来他们用的是“分析否定信息”的方法。谜底是这样的：

三个人为什么都犹豫了一会呢？这只能说明他们都没有人看到两顶黑帽，也就是说三人中至多只能有一人戴黑帽。这一点在犹豫的一刹那，三个聪明的学生当然都意识到了。此时某甲想：“我头上戴的如果是黑帽的话，那么某乙某丙应当猜出他们自己戴着白帽了，因为黑帽不可能有两人戴。然而乙、丙都在犹豫，可见我是戴白帽的！”与此同时，某乙某丙也都这样想着，因此三人几乎同时脱口而出，猜着了自己的帽色。

这一“猜帽色”的游戏同样可以推广到多个人。我想，此时此刻读者一定会想象得到，游戏中的白帽与黑帽的数量，必须加以哪些限制。

再看一则十分奇特的“撒谎者”的故事：

甲说：“乙撒了谎或丙撒了谎。”

乙说：“甲撒了谎。”’

丙说：“甲、乙都撒了谎。”

问究竟谁撒了谎？谁说真话？

看起来这似乎是一个无头公案，因为三个人都无一例外地指责别人在撒谎。然而仔细一看，各人指责的内容和形式都不相同。乙指责“甲撒了谎”是一句关键的话。因为如若乙说是真话那么甲便是撒谎者；如若乙是撒谎者，那么甲所说的便是真话。可见甲与乙不可能同时撒谎。然而丙却指责甲乙两人都撒了谎，这只能说明丙本身是撒谎者。丙是撒谎者，说明甲说的没有错，从而乙的指责是莫须有的，因此乙也是撒谎者。在整个故事中只有甲是唯一说真话的人！

类似“撒谎者”的智力难题，采用变换命题的方法是很有效的。下面是又一则妙趣横生的“撒谎者”故事，留给读者作推理练习。

一个英国探险家到非洲某地探险。在宿营地附近有两个土著部落，高个子部落和矮个子部落。已知两个部落中有一个部落成员总是说真话，另一个部落成员则总是说假话。有一次，探险家在路上遇到两个土人，一个高个子一个矮个子。探险家问高个子土人：“你是说真话吗？”这个土人回答说：“古姆”，小个子土人会讲英语，就解释说：他说“‘是的’，但他是个骗子。”

试问哪个部落成员说假话？（答：高个子）

反向推理可能是解决智力难题最常用的一种方法。下面比试身高的趣题，是运用这种间接方法最为典型的例子。

甲、乙、丙、丁四人聚在一起，议论各自身体的高矮：甲说：“我肯定最高。”

乙说：“我绝不至于最矮。”

丙说：“我虽然比不上甲高，但我也不会落　到最矮。”

丁说：“那只有我是最矮的了！”

为了确定谁是谁非，他们进行了现场测定。结果四个人中仅一人说错。问四人的实际高矮如何？

如果采用直接推理，则必须分析甲乙丙丁四人说错话的可能。例如甲说错话，那么甲不是最高，只能是第二、第三或最矮；与此同时，乙所说的则应为事实，即乙可能是最高、第二或第三；……。这种推理过程，无疑能够继续下去。但到达成功的彼岸，航程还相当漫长。

如果采用反向推理，情况将大为改观，整个逆推的过程简单而漂亮：丁不可能说错，否则便没有人会是最矮；既然丁说的是对的，那么乙也就同时是对的了；甲不可能说对，因为若甲说对，则丙同时也该对。但四人都对与实测结果违背。于是最高者非乙莫属。由于甲说的是错话，那么丙所说的便是事实，他自从高不如甲，从而问题答案水落石出：

乙最高，甲第二，丙第三，丁最矮。

数学中的自动化推演

17 世纪末，德国数学家莱布尼兹（Leibniz，1646～1716）在研究自然数 n 的组成方法。

同理他求出 P（5）＝7，P（6）＝11。这些恰恰是头几个质数。于是莱布尼兹觉得，他似乎得到了以下结论：P（n）是第 n－l 个质数。但当他检验数 7 的组成时，却得到 P（7）＝15，从而否定了自己脑海中曾经闪过的一个念头。据此，莱布尼兹对不完全的归纳作了如下深刻的评论：上述猜想“是骗人的归纳的极好例子”。

下面是一道相当精妙的归纳练习，它无疑能加深读者认识不完全归纳的局限性。

在一张纸上画一个圆周，可把纸面分割成两个部分；画两个圆周最多可把纸面分割成 4 个部分；画三个圆周最多可把纸面分割成 8 个部分。请问画 n 个圆周最多可把纸面分割成几个部分？

也许有的读者脱口而出是 2^n，那就大错而特错了！正确的答案应该是 n^2-n+2。

那么，克服不完全归纳的局限，步向真理的阶梯该是什么呢？这就是我们即将讲述的一种科学方法——数学归纳法。下面的故事寓意极深，它提示了数学归纳法的真谛。

从前，一位画家为了测试他的三个徒弟对绘画奥妙掌握的程度，他把他们叫来，让他们用最经济的笔墨，画出最多马。

第一个徒弟在卷子上密密麻麻地画了一群马；第二个徒弟为了节省笔墨，只画出许多马头；第三个徒弟在纸上用笔勾出两座山峰，再从山谷中走出一只马，后面还有一只马只露出半截身子。

三张画稿交上去，评判结果是最后一幅画被认定为佳作。构思巧妙，笔墨经济，以少胜多！

这第三张画稿，只画一只半马，为何能胜于画一群马呢？原因在于：第

一张画虽然画了一群马，但却是有限的，第二张画虽对第一张画作了简化，但没有改变有限数的本质，第三张画则不同，在一只马后面带出的半只马，使人想象到隐没在山谷中行进着的一只又一只马，似乎无法尽数。

上面故事中的道理，被移植到数学上就是：要证明一个与自然数有关的命题是真命题，必须分两步：

（1）验证当 n 取第一个自然数 n_0 时命题成立；

（2）假设 n＝k 时命题成立，证明 n＝k＋1 时命题也成立。

在完成上述两个步聚之后，便能断定命题对从 n_0 开始的所有自然数 n 都成立。这，就是数学归纳法。

上述第一步是论证命题的基础，相当于前面故事中的第一只马；第二步是判断命题的正确性，能否从特殊推广到一般的依据，相当于故事中的如下事实：即如果有一只马，背后必带有另一只马。这样，有了第一只，便有第二只马；有了第二只马，便有第三只马；……如此等等，以至无穷！这个过程就是“自动化的推演过程”。

数学归纳法的两个步骤是必不可少的：没有第二步便成了不完全归纳，其局限性勿须多说。不过，第二步固然重要，第一步不能没有。没有第一步，第二步便成了空中楼阁，甚至会因此推出谬误。下面是 G·波利亚教授为说明这一问题而精心设计的一种“证明”。他试图“证明”一个有趣的论断：“任何 n 个女孩都有同样颜色的眼睛。”波利亚教授是这样写的：

对于 n＝1 这句话显然是对的，剩下的是从 n 推到 n＋1，为具体起见我将从 3 推到 4，而把一般的情形留给你。

让我把 4 个女孩子介绍给你，她们是 A、B、C、D。假设（n＝3）A、B、C 的眼睛具有同样的颜色；也假设（n＝3）B、C、D 的眼睛也具有同样的颜色。因此，A、B、C、D 四个女孩子的眼睛必定具有同样的颜色。

这就证明了 n＋1＝4 时的论断。又比如从 4 推到 5 的情形，当然也不会有什么困难。

波利亚果然“推出”了所有女孩子的眼睛颜色都是相同的。但这显然与事实违背；中国女孩是黑眼睛，美国女孩却多是蓝眼睛！那么毛病究竟出在哪里呢？波利亚教授解释道：问题出在第一步，从 n＝1 推到 n＝2 不成立，用此导致了谬误。

下面我们看一个用数学归纳法证明题的例子。

某次体育比赛，每两名选手都进行一场比赛，每一场比赛一定决出胜负，通过比赛确定优秀选手，选手 A 被确定为优秀选手的条件是对任何其他选手 B，或者 A 胜 B，或者存在选手 C，C 胜 B，A 胜 C，如果按上述规则确定的优秀选手只有一名，求征：这名选手胜所有的其他选手。

证明：

（l）当 n＝2 时，命题显然成立；

（2）假设 n＝k 时，命题成立，即在 k 个选手的集合 x 中，A 胜其余 k

－1 个人。

今在集合 X 的基础上增加一个选手 B，组成集合β，则：

1°若 A 胜 B，命题显然成立；

2°若 A 负于 B，进一步分两种情况：

（Ⅰ）当 B 胜集合β中其他选手时，B 为唯一的优秀选手，命题成立；

（Ⅱ）假设当 B 对集合β中除 A 以外的选手有胜、负或全负时，不妨设 B 负于 C，则因 A 胜 C，C 胜 B，B 胜 A，按规定 B 间接胜 C，这时，A、B 均为优秀选手，这与已知矛盾。

所以，当 n＝k＋1 时，命题成立，从而由（1）（2）得对任意自然数 n，命题成立。

数学归纳法是数学思维方法中最重要，最常用的方法之一，它的“自动化推演论证”过程十分完美地把特殊推广到一般，把有限推广到无限！

数学归纳法的第二种形式

数学归纳法是一种重要的论证方法。它们通常所说的“数学归纳法”大多是指它的第一种形式而言，本文想从最小数原理出发，对它的第二种形式即第二数学归纳法进行粗略的探讨，旨在加深对数学归纳法的认识。

第二数学归纳法原理是设有一个与自然数 n 有关的命题，如果：

（1）当 n＝1 回时，命题成立；

（2）假设当 n≤k 时命题成立，则当 n＝k－1 时，命题也成立。

那么，命题对于一切自然数 n 来说都成立。

证明：用反证法证明。

假设命题不是对一切自然数都成立。命 N 表示使命题不成立的自然数所成的集合，显然 N 非空，于是，由最小数原理 N 中必有最小数 m，那么 m≠1，否则将与（1）矛盾。所以 m－1 是一个自然数。但 m 是 N 中的最小数，所以 m－1 能使命题成立。这就是说，命题对于一切≤m－1 自然数都成立，根据(2)可知，m 也能使命题成立，这与 m 是使命题不成立的自然数集 N 中的最小数矛盾。因此定理获证。

当然，定理 2 中的（1），也可以换成 n 等于某一整数 k。

作为第二数学归纳法的应用，举例如下：

例 有两堆棋子，数目相等。两人轮流取走棋子，每人每次可在其中一堆里任意取走若干颗，但不能同时在两堆里取，且规定取得最后一颗者为胜。求证后取者一定可以获胜。

证设 n 为一堆棋子的颗数。

（l）当 n＝1 时，先取者只能在一堆中取一颗，这样另一堆中的一颗就被后取者夺得。所以命题是成立的。

（2）假设当 n≤k 时，命题是成立的。现在来证明当 n＝k＋1 时，命题也是成立的。

因为在这种情况下，先取者在一堆中取走 2（1≤2≤k＋1）颗，这样后取者面临的两堆棋子分别为 k＋1 颗及（k－2＋1）颗，这时后取者可以在较多的一堆中取 2 颗，于是先取者面临的两堆棋都是（k－2＋1）颗，依归纳假设，后取者获胜。

根据（1）和（2）可知，对于任意自然数 n 来证，后取者都可获胜。

什么时候需要应用第二数学归纳法？这是很难用一句说清楚的。为此，我们借助上述诸例重新认识一下第二数学归纳法的证明过程。很明显，对于证明过程的第一个步骤即 n＝1（或某个整数 a）的情形无需多说，只需要用 n＝1（或某个整数 a）直接验证一下，即可断定欲证之命题的真伪。所以关键在于第二个步骤，即由 n≤k 到 n＝k＋1 的验证过程。事实上，我们不难从例 1 的第二个步骤的论证过程中发现，证明等式在 n＝k＋1 时成立是利用了假设条件；等式在 n＝k 及 n＝k－1 时均需成立。同样地，例 2 也不例外，只是形式的把 n＝k 及 n＝k－1 分别代换成了 n＝k－1 和 n＝k－2。然而例 3 就不同了，第二个步骤的论证过程，是把论证命题在 n＝k＋1 时的成立问题转化为验证命题在 n＝k－2＋1 时的成立问题。换言之，使命题在 n＝k＋1 成立的必要条件是命题在 n＝k－2＋1 时成立，根据 1 的取值范围，而命题在 n＝k－k＋1 互时成立的实质是命题对一切≤k 的自然数 n 来说都成立。这个条件不是别的，正是第二个步骤中的归纳假设。以上分析表明，假如论证命在 n＝k＋1 时的真伪时，必须以 n 取不大于 k 的两个或两个以上乃至全部的自然数时命题的真伪为其论证的依据，则一般选用第二数学归纳法进行论证。之所以这样，其根本原则在于第二数学归纳法的归纳假设的要求较之第一数学归纳法更强，不仅要求命题在 n－k 时成立，而且还要求命题对于一切小于 k 的自然数来说都成立，反过来，能用第一数学归纳法来论证的数学命题，一定也能用第二数学归纳进行证明，这一点是不难理解的。不过一般说来，没有任何必要这样做。

第二数学归纳法和第一数学归纳法一样，也是数学归纳法的一种表达形式，而且可以证明第二数学归纳法和第一数学归纳法是等价的，之所以采用不同的表达形式，旨在更便于我们应用。

和第一数学归纳法一样，要正确有效的应用第二数学归纳法，也必须注意许多细节问题，至此不再赘述。

一个用不完全归纳法获得真理的故事

英国天文学家、数学家哈雷从小就爱好数学和天文。在中学读书的时候，他运用数学和物理知识独立地测出伦敦磁针的变化为 2°30′W，在牛津大学学习期间，他不但设计了测定行星轨道单元的新方法，而且还编制出第一个

南天星表。因而获得了较高的声誉。年轻的哈雷不久就被选上英国皇家学会的会员。1703 年被聘任为牛津大学教授。1720 年成为皇家天文学家，并担任格林威治天文台台长。

哈雷是一位理论与实践相结合的科学家，他对大体星球轨道的研究不但进行理论上的探索与精密的计算，而且还坚持实地观察和测量。

哈雷对天文学的最大贡献是对彗星的研究。他从小就对彗星发生了极大的兴趣，他一心一意地进行了人类从未计算过的彗星轨道研究。他在观测 1680 年的大彗星之后，又对 24 颗彗星的轨道进行了计算，他注意到 1456 年、1531 年、1607 年及 1682 年彗星运行轨道的相似性。他用不完全归纳法得出了下面一个特性。即

1531 年—1456 年＝75 年，

1607 年—1531 年＝76 年，

1682 年—1607 年＝75 年。

这表明，这三次彗星出现的间隔时间几乎相同，于是哈雷猜想，过去天文学家认为这三颗不同的彗星也许是同一颗彗星。就是说，它可能先后三次经过那里。它以 76 年为周期绕日运转。

哈雷从这个数学上的不完全归纳法得到的猜想进一步作理论上的研究，然后并以此为据，推想到这颗彗星下一次出现的时间将为 1758 或 1759 年间。

哈雷预言这颗彗星再次出现的时刻终于到来，1759 年 3 月 13 日，这颗明亮的彗星，拖着长长的尾巴果然出现在天空之中。全世界爱好天文的人们都欢腾起来，说哈雷的数学计算真是神妙，但可惜的是，那时哈雷已经离开人间 17 年了。大家为了纪念哈雷的预言，称这颗彗星为“哈雷彗星”，哈雷受到全世界人们的尊敬。

人们根据哈雷的彗星计算原理进行推算，这颗哈雷亲眼看到的彗星将经过 76 年×3＝228 年再次出现在地球上空，这就是说，到达 1682 年＋228 年=1910 年时，这颗哈雷彗星必然又将出现在地球上空，天文学家、数学家们经过计算，它与地球的距离已迫近到 2400 万公里，而它的尾巴长达 2 亿公里，很明显，这一望无际的长尾巴将会扫过地球而去。当时人们都担心这个尾巴当扫到地球上时将会出现什么，有些胆小的人（包括某些天文学家）都惊怕了，说哈雷彗星必将与地球相撞，地球的末日到来了，有个别人甚至胆小到为避免见到惨剧，事先自杀了。

199 年 5 月 18 日哈雷彗星果真又出现在地球的上空而且它的尾巴也确实扫过了地球，人们照样还是安然无恙，其实彗星的尾巴只不过是一种极稀薄的气体和尘埃所组成，它的来到可能会有一些氰和一氧化碳分子进入地球大气层，但这与目前工厂和汽车每天排放的有害气体比较，就微不足道了，所以说哈雷彗星的尾巴扫过地球是没有什么影响的，即使是彗星的头，（即彗星核）碰上了地球也不会毁灭地

球的，因为这个彗星头的质量也只有地球质量的 $\frac{1}{1000}$。

哈雷彗星最近一次到来是 1986 年，因为 1910 年＋76 年＝1986 年。（这次哈雷彗星的回归，观察可分为两个时期；1985 年 11 月 1 日至 1986 年 1 月 16 日，哈雷彗星在太阳之东；1986 年 2 月 27 日至 4 月 19 日，哈雷彗星在太阳之西，在后面一个观察期内彗星容易看到且较为壮观）。

哈雷能预言彗星的到来，这说明事物间是相互联系的，哈雷用数学上的不完全归纳法，在一系列彗星出现的时间表上归纳，猜想出一个新的设想，然后再加以论证，证实这个设想是正确的，于是推翻了前人的结论，得到了一个新的结论，获得了真理。我们学习数学，研究科学，就要在前人的基础上创新，从而推动数学（科学）的发展，造福于人类。

“ 逢二进一 ”的算术

人类对于司空见惯的东西，总是觉得是天经地义的。孩子们从小就学习“ 逢二进一 ”的算术，随着年龄的增长，和这种数制打交道越来越多。很少有人怀疑并追究这种数制的由来。其实，十进位制源于人类的 10 个手指。在远古时代，人们是用扳动手指来计数的，2000 年前古罗马的数字和中国的记数符号，都是由此而起源的。

可以想象，假如在数亿年的进化过程中，人类生就的是光秃秃的两个拳头，那么他们所用的数制大约会是“ 逢二进一 ”。

桌上放着一打铅笔，我们会准确无误地写出铅笔的数目为“ 12 ”。倘若有谁写成“ 1100 ”，大家都会认为是荒谬的。然而，这却正是使用“ 二进位制 ”的记号。为了今后不至于引起混乱，我们用下标（2）表示进位制下的数。例如；

$1100_{(2)}=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0=8+4=12$；

$10101_{(2)}=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1$

$=16=4+1=21$

上面几式的右端，实际表明了怎样把二进制数化为常用的十进制数。至于怎样把十进制数化为二进制数，下面提供的是一种有效的途径。比如，要把 71 写成二进制数。如下式，我们将 71 除以 2，余数写在右边。如果除尽，则写 0。

将商再除以 2，重复上述过程，直到商等于 1 为止。这个 1 也写到右边余数那列的最下面，再从下到上写成一行数，它便是 71 的二进制数的表示法：

$$71=1000lll_2$$

二进制的最大优点是，每个数位都只有 0 与互两种状态，这使得我们可以通过简单的方法，例如白与黑、虚与实、负与正、点与划、小与大、暗与亮等等加以表示。下表所列的是 71 用二进制的几种表示方法。当然，二进制也有不足，正如大家看到的那样，同一个数目在二进制中要比在十进制中位

数多得多。也有些问题在古进制中显得很复杂，但在二进制中却十分简单。下面一则古老而有趣的传说，颇为生动地体现了这一点：

印度的舍罕王打算重赏国际象棋的发明者宰相西萨·班·达依尔。这位聪明的大臣向国王请求说：“陛下我什么也不要，只请您在第一个小格内放一粒米；在第二个小格内放两粒；第三格放四粒；照这样下去每一小格内都比前一小格加一倍。把棋盘上 64 格的米粒都恩赐给我！”

国王慷慨答应了西萨·班·达依尔的要求。他觉得宰相的请示未免过于寒酸。

可是国王很快发现自己的诺言是无法实现的，因为他需要付出的米粒数是：

$$1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{63}=\frac{2^{64-1}}{2-1}=2^{64}-1$$

$$=18446744073709551615$$

这是一个长达 20 位的天文数字！

最后西萨·班会因为国王无法忍受没完没了的债务而丢掉脑袋。

不过，我们要说的是：如果使用二进制，西萨·班所要求的赏赐，只是一个形式简单的数字。

读者想必对小学里背诵的“九九乘法表”记忆犹新。那是一件十分辛苦而费时的事。然而对于二进制数来说，各种运算规则全都出奇地简单。任何人在半分钟之内，都能把它背得滚瓜烂熟：

运算规则可以归纳为八个字：“格式照旧，逢二进一。”利用这一规则，可以很容易地实现二进制数的四则运算。下一位的 1＋l。

读者可以自行设计更多的练习。目前，这种只有“0”、“1”“两个数字的二进制系统，已成为计算机最为理想的数字语言。

火柴游戏的制胜诀窍

有一种极为有趣的火柴游戏，源于我国，大约 100 年前传到欧洲，取名“宁蒙”，也叫中国二人游戏。

游戏的方法是这样的：有若干堆火柴，每堆火柴的数目是任意的。现有 A、B 两人轮流地取这些火柴，每人只能从某堆中取去若干根火柴，也可以整堆全部取走，但不允许跨堆取，即不能一次向两堆中拿。约定谁拿掉最后一根火柴就算谁赢。

数学家们已经完全掌握了这种两人游戏的制胜诀窍。为了让读者充分了解取胜的奥妙，我们先从游戏中的获胜位置讲起。为叙述方便，我们用记号（p，q，r，…，s）表示对策中火柴的状态。例如（2，2）表示有两堆火柴，每堆各有两根；（1，2，3）表示有三堆火柴，各堆分别为一根、二根和三根等等。

很明显，（1，1）是一种获胜位置，这是可以直接加以验证的。（2，2）也是一种获胜位置。事实上当 A 拿成（2，2）后，无论 B 怎样应付都有 A 胜。同样，（1，2，3）也是获胜位置，当 A 拿成（1，2，3）后，B 可能拿成以下几种情形。

1°B 拿成（2，3），A 拿成（2，2）胜；

2°B 拿成（1，2，2），A 拿成（2，21）胜；

3°B 拿成（1，1，3），A 拿成（1，1）胜；

4°B 拿成（1，3），A 拿成（1，1）胜；

5°B 拿成（1，2，1），A 拿成（1，1）胜；

6°B 拿成（1，2），A 拿成（1，1）胜。

同样分析可以知道（n，n）及（1，2n，2n＋1）等都是获胜位置。那么一般地，怎样的位置才是获胜位置呢？探索的过程无疑是很艰辛的！但读者大可不必重蹈那曲折的认识过程，数学家们已经为我们找到了捷径。

把每一堆火柴的数目用二进制数表示出来，写成一行。于是，有几堆火柴就有几行二进制数码。

把各行数对齐，并将各列数码相加（不进位），把各自结果的奇偶性写在该列的下方。如果得到的全是偶的，则相应的火柴状态称为正确的状态。数学家告诉我们，正确的状态是获胜位置，不正确的状态就不是获胜位置。

道理并不难，假定 A 拿成了一种正确状态，这时各堆火柴的数目所写成的二进制数各列之和均为偶数。现在轮到 B 拿，B 不可避免地要动到某行二进位数，从而使这一行的一些 1 变成 0，而另一些 0 变成 1。这就使得一些列的和由偶变为奇，从而由正确状态变为不正确状态。

反过来，如果 B 已经拿成不正确状态，比如拿成偶、偶、奇、偶、奇、偶，这表明在右起第二列和第四列内，至少各有一个 1，此时有以下两种可能性：

（1）上述两个“1”在同一个二进位数内，即

××1×1××

则 A 只要从这一个二进位数相应的那堆火柴里，取走 1010（2）＝10 根，这一行的数就变为

××0××0×

上式有“×”的地方，数字不变，这样 A 拿后的火柴状态变为正确状态。这时相应二进位数各列之和，包括第二列与第四列，都变为偶数。

（2）上述两个“1”不在同一行，而在两个不同的行：

也就是说，当从上一行相应的堆取走 6 根火柴时，上面两行将变为如下状态：

式中有“×”的地方，数字都不变。从而各列之和全为偶数。即此时 A 已拿成正确状态。

综合以上两种情形，说明如果 B 拿成不正确状态，则 A 一定有办法把它

拿回到正确状态。而 A 一旦拿成正确状态，轮到 B 拿就只能破坏这种状态，这就是说，只要 A 在游戏的某个时刻把握住了正确状态，他实际上已经稳操胜券了！

我想聪明的读者大约都已掌握了火柴游戏的取胜秘诀。不过，如果对方是生手，你完全不必如临大敌。因为开始时每堆火柴数目很多，堆数也很多，你完全可以随心所欲地拿。等火柴拿得差不多时，再看准那些形如：

（2，2），（1，2，3），

（n，n），（1，2n，2n＋1）

之类基本获胜位置或它们的组合，你的胜利是完全不成问题的！

火柴游戏有许多有趣的变式，其中最为精彩和出人意料的那局闷宫棋，双方的炮均不能离行，逼近将边的兵也不该动，否则必输无疑。因此双方只有动炮及边兵，如果把可动的空位当成火柴的根数的话，那么这种棋局相当于初始状态为（1，4，8）的火柴游戏。这不是一个获胜位置，所以先走的人第一步走“炮七进三”，必定可操胜券。因为这时的状态（1，4，5）已是一个获胜位置。

布尔的命题代数

公元 1847 年，一位完全靠自学成才的英国数学家布尔（Boole，1815～1864），深刻研究了命题演算如下规律：即当命题 A 和命题 B 同时为真时，命题 A·B 才能为真，特别当 A 为真时，A·A＝A 才能为真。从真假性的意义讲，A^2 与 A 是等价的，即可写成 A^2＝A。布尔先生发现：

×·×＝×2＝×

这是所研究逻辑类演算的特有规律。它不同于普通的代数运算。它决定了逻辑变量只能取 0 和 1 两个值。布尔解释道：如果用 X 表示命题的真值，那么 X＝1 表示命题 X 为真，X＝0 表示命题 X 为假。

利用真值表，很容易验证“或”、“与”、“非”三种逻辑运算，具有以下基本性质：

（1）“或”运算的基本性质

A＋B＝B＋A（加法交换律）；

A＋（B＋C）＝（A＋B）＋C（加法结合律）；

A＋0＝A；

A＋1＝1；

A＋A＝A（加法重复律）。

（2）“与”运算的基本性质

A·B＝B·A（乘法交换律）；

A·（B·C）＝（A·B）·C（乘法结合律）；

A·0＝0；

A·1＝A；

A·A＝A（乘法重复律）。

（3）乘法对于加法的分配律

P·（A＋B＋…＋C）＝P·A＋P·B＋…＋P·C。

就这样，布尔先生创造了一种崭新的代数系统。这种代数系统，把逻辑思维的规律，归结为代数演算的过程。从而使逻辑关系的判断与推理，复杂命题的变换与简化，终于找到了巧妙而有效的数值化的途径。例如考虑乘积P·Q·R…·S，这个乘积命题肯定了它的每个分支命题的论断：如果分支命题都是真的，那么乘积命题自然也是真的；反过来如果乘积命题是真的，那么它的每个分支命题也必须是真的。用命题的真值表示，就是：

$$PQR\cdots S=1\leftrightarrow\begin{cases}P=1\\Q=1\\R=1\\\cdots\cdots\\S=1\end{cases}$$

符号“$\leftrightarrow$”表示等价。同理，若P·Q·R…·S＝0，则在P，Q，R…S之中至少有一个真值为0，反之亦然。

在逻辑问题中我们还经常把蕴涵命题“$P\rightarrow Q$”转换为方程$\overline{P}+Q=1$或$P\cdot\overline{Q}=0$这种转换的等价性，由下表可以看得非常清楚。

P	$\rightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}+Q$	$P\cdot\overline{Q}$
1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0

上面所讲的有关命题运算的一些知识，远非人们想象的那么枯燥无味和费解，下面的一些有趣问题，将使你领会布尔先生的代数技术是多么的有用。

这是一个著名的关于判定谁有罪的智力难题。

已知：若A无罪，则B与c都有罪；

在B与C中必有一人无罪；

要么A无罪，要么B有罪。

问：谁有罪？

为了把逻辑推理问题化为命题代数问题，我们用A、B、C分别代表命题“A有罪”、“B有罪”、“C有罪”。依题意得：

$\overline{A}\rightarrow B\cdot C$，即有$A+BC=1$

$\overline{B}+\overline{C}=1$

$\overline{A}+B=1$

由此$(A+BC)(\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B)=1$

上式左端展开后给出：

$A\overline{B}\overline{A}+A\overline{B}B+A\overline{C}\overline{A}+A\overline{C}B$

$+BC\overline{B}\overline{A}+BC\overline{B}B+BC\overline{C}\overline{A}+BC\overline{C}B=1$

注意到对于命题 X，有

$X\cdot\overline{X}=0$

则上式左端除$A\overline{C}B$一项外其余全为0，即得：

$A\overline{C}B=1$

这意味着A＝1，$\overline{C}$＝1，B＝1。也就是说，A和B是有罪的，C是唯一的无罪者？

对于含有条件命题的推理问题，上例所用的技巧是具有普遍意义的。下面曲型的例子，将使你处理这类问题的技巧得到进一步熟练和巩固。

在一次班级选举中，小华、小明和小聪都被选为班委。

已知：

如果小华是体育委员，那么小明就是学习委员；

如果小聪是班长，那么小华就是学习委员；

如果小华是学习委员，那么小明就是班长；

如果小明不是体育委员，那么小聪就是学习委员；

问：各人担任什么职务？

这是一个相当困难的智力问题，为叙述方便，我们用 A、B、C、代表小华、小明和小聪，而用下标 1、2、3 分别代表担任学习委员、体育委员和班长。

依题意得：

$$\begin{cases}A_2\to B_1\text{，即有}\overline{A}_2+B_1=1\\ A_1\to B_3\text{，即有}\overline{A}_1+B_3=1\\ \overline{B}_2\to C_1\text{，即有}B_2+C_1=1\\ C_3\to A_1\text{，即有}\overline{C}_2+A_1=1\end{cases}$$

由此 $(\overline{A}_2+B_1)(\overline{A}_1+B_3)(B_2+C_1)(\overline{C}_3+A_1)=1$

上式左端展开后给出

$$\begin{aligned}&\overline{A}_2\overline{A}_1B_2\overline{C}_3+\overline{A}_2\overline{A}_1B_2A_1+\overline{A}_2\overline{A}_1C_1\overline{C}_3+\overline{A}_2\overline{A}_1C_1A_1\\&+\overline{A}_2B_3B_2\overline{C}_3+\overline{A}_2B_3B_2A_1+\overline{A}_2B_3C_1\overline{C}_3\\&+\overline{A}_2B_3C_1A_1+B_1\overline{A}_1\overline{C}_3+B_1\overline{A}_1B_2A_1\\&+B_1\overline{A}_1C_1C_3+B_1\overline{A}_1C_1A_1+B_1B_3B_2\overline{C}_3\\&+B_1B_3A_1+B_1B_3C_1\overline{C}_3+B_1B_3C_1A_1\\&=1\end{aligned}$$

由于不相容的命题不可能同时为真，因此上式左端除第一、三、七项外，其余各项均为 0，即得

$\overline{A}_2\overline{A}_1B_2C_3+\overline{A}_2\overline{A}_1C_1\overline{C}_3+A_2B_3C_1\overline{C}_3=1$

化简得

$\overline{A}_2\overline{C}_3$（$\overline{A}_1B_2+\overline{A}_1C_1+B_3C_3$）$=1$

从而推知：$\begin{cases}\overline{A}_2=1，\overline{C}_3=1\\ \overline{A}_1B_2+\overline{A}_1C_1+B_2C_1=1\end{cases}$

注意到$\overline{A}_2=1\rightarrow A_2=0$**，这就使得**$B_3C_1=0$**（否则将**$A_2=1$**，出现矛盾**1**）。于是有**

化简得 $\overline{A}_1B_2+\overline{A}_1C_1=1$

$\overline{A}_1$（B_2+C_1）$=1$

从而 $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A_1=1\rightarrow A_1=0\\ 又A_2=0\end{array}\right\}\rightarrow A_3=1\\ 又B_2+C_1=1\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}B_2=1\\ C_1=1\end{cases}$

最后的推理是因为：若 B2＝0，则只有 B1＝1，从而 C1＝0 这与 B2＋C1＝1 矛盾。

综上，我们得到 A3＝1，B2＝1，C1＝1。这个结论表明：小华被选为班长，小明被选为体育委员，小聪则被选任学习委员。

亲爱的读者，从上面的例子你是否已经发现，怎样用命题代数的技巧来解这一类逻辑难题呢？

命题简化

上一节我们看到，许多表示复合命题的逻辑式，是由基本命题及其否定之积相加的形式表现出来。这样的式子称为逻辑和的标准形式。例如：

$R=A+BC$

$S=A\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+AC$

$T=ABC+AB\overline{C}+A\overline{BC}+A\overline{B}\,\overline{C}$

最后一个逻辑式，它的每一项积包含有全部的基本命题或其否定。这样的逻辑和标准形式称为“完全的”。

很明显，一个非标准形式的逻辑式，可以通过展开化为标准形式。而一个标准形式的逻辑式，又可以进一步化为完全标准形式。这只需反复应用 X＋X＝1 这一公式即可。例如：

$R=A+BC$

$=A(B+\overline{B})(C+\overline{C})+(A+\overline{A})BC$

$=ABC+AB\overline{C}+ABC+A\overline{BC}+\overline{A}BC$

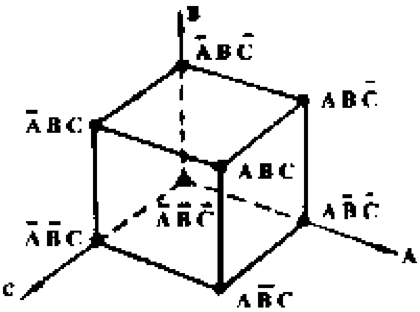
$S=\overline{AB}+\overline{B}\,\overline{C}+AC$

$=A\overline{B}(C+\overline{C})+(A+\overline{A})\overline{BC}+A(B+\overline{B})C$

$=A\overline{BC}+A\overline{B}C+\overline{ABC}+ABC+A\overline{B}C$

读者完全可以想象得到，一个复合命题的“完全式”的某个项，便可表示为下图立方体中的某个顶点。标出这些顶点，便得到相应复合命题的几何

模型。



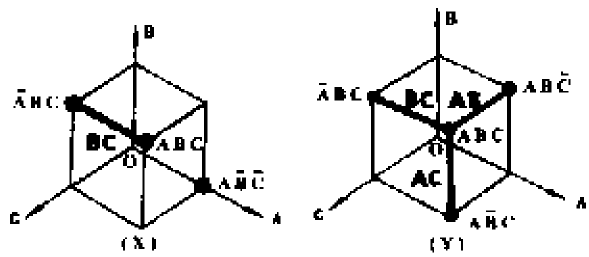
例如，对于复合命题

$X＝ABC＋\overline{A}BC＋\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

$Y＝ABC＋\overline{A}BC＋A\overline{B}C＋AB\overline{C}$

我们可以分别得到如下的几何模型。

我们可以分别得到如下的几何模型。



可能读者已经发现，图中的某些棱已被画为粗线。这是因为当一条棱的两端同时出现在逻辑和的表示式中

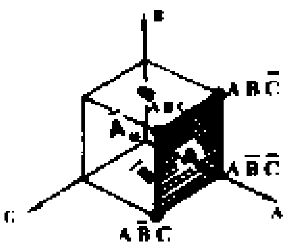
时，该逻辑式一定可以简化。例如上右图的点（$\overline{A}BC$**）与（**ABC**）由于**

$\overline{A}BC＋ABC＝（\overline{A}＋A）BC＝BC$

这意味着它可简化为连接两点的棱 BC。，由图知，X、Y 可简化为：

$X＝BC＋A\overline{BC}$

Y＝AB＋BC＋AC



同理，若立体模型中某个面的四个顶点同时出现在逻辑和的表示式中，那么这部分的表示式便可简化为代表这个面的一个字母。例如，前面提到的

$T＝ABC＋AB\overline{C}＋A\overline{B}\,\overline{C}＋A\overline{B}C$

右端四项，分别表示上图 A 面上的四个顶点，于是 T 可简化为 A。事实

上，直接计算有：

$$T=AB(C+\bar{C})+A\bar{B}(\bar{C}+C)$$

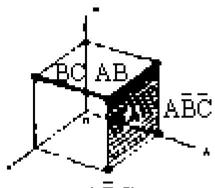
$$=AB+A\bar{B}=A(B+\bar{B})$$

$$=A$$

需要说明的是：在作命题简化的时候，我们只需从逻辑和的标准式开始就可以了。因为标准式一般比“完全式”来得简单。引进“完全式”只是为了讲解上的方便。实践上对于已经简化了的东西，是无需回到更为复杂的模式上去的。这好比马拉松赛跑，此时你已经跑了 3 公里，如果你想向观众表明你有能力跑完全程，那么你完全不必回到起点重新跑起，接下跑到终点就是了！

为了让读者有所仿效，下面我们举一个用立方体简化复合命题的完整的例。已知：

$$U=AB+BC+A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}$$



画出命题 U 的几何模型容易看出，图中有四个顶点位于 A 面上，从而命题 U 可以简化为：

$$U=A+BC$$

可能有的读者会问：前面讲的都是三个基本命题的情形，对于四个或更多基本命题的情形又该怎么办呢？要回答这个问题我们还需要许多其他的知识，例如需要了解四维立方体或多维立方体的概念等等，在这里就不讲了。

如何设计自动装置

请看一个生动而常见的例子：

一幢二层楼房，楼梯道上装着一盏路灯。在一楼厅中装有开关 A；在二楼走廊装有开关 B。要求扳动任何一只开关，都能改变路灯的亮与暗的状态。例如：最初开关 A、B 均处于未接通状态，路灯也暗着。现某甲为了上楼照明，在底楼扳动开关 A，路灯 X 因此亮了；上楼后为了节省用电，又扳动二楼的开关 B，使灯 X 熄了。此时，某乙也要上楼，他又扳动开关 A，于是路灯又亮了；……

问应如何设计符合要求的开关线路？

把 X 看成基本命题 A、B 的复合命题，不难列出真值表。

为了设计一种装置，使之能够实现复合命题 X 的逻辑运算，我们首先必须弄清这一命题的结构。在上一节我们曾经提过：根据复合命题的真值表，确定其逻辑和标准式的结构，是颇有一些技巧的。其实，这种技巧并不难掌

握，它可以生动

A	B	X
0	0	0*
0	1	1
1	1	0*
1	0	1

地归纳为下面四句口诀：

写出所有积，比较终 0 行；

代入算真值，弃掉得 1 项。

口诀的第一句意思是：要写出所有可能的积。由于出现在积中的每一个命题都有原型命题和否定命题两种状态，因此如果问题中基本命题数为 n，那么上述可能的积共有 2^2 项。例如上例中基本命题有两个（A、B），则所有的积共有 2^2＝4 项，它们是

AB，$A\overline{B}$，$\overline{A}B$，$\overline{A}\,\overline{B}$

口诀的第二句开始，即告诉我们对于 2^n 项的可能的积，应如何加以取舍，关键是“比较终 0 行”。“终 0 行是指最终输出为“0”的那些行，正如上例的真值表中我们打有“＊”号的第一行和第三行。接下去是把这些行相应的 A、B 代入所有的项，分别算出项的真值。如果某项算出的真值为 1，那么该项必须舍弃。没有被舍弃的项相加，即得所求的逻辑和结构式。这便是口诀的结论。对于上例，我们把打有“＊”行的 A、B 值，代入所有的四个项。有：

（1）当A＝0，B＝0时，$\overline{A}\,\overline{B}$＝1，则$A\overline{B}$项弃去；

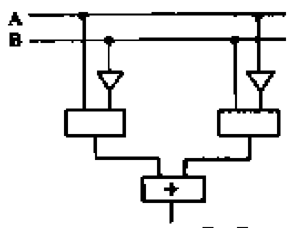
（2）当 A＝1，B＝1 时，AB＝1，则 AB 项弃去。

这样，在所有四项中只留下$A\overline{B}$与$\overline{A}B$两项。于是得

$X＝\overline{A}B＋A\overline{B}$

相应于这一复合命题的机能图如图 1。

归纳一下本节和上节所见到的例子，我们知道：设计一个关于复合命题 X 的自动装置，大体可以分以下几个步骤：



$X - A\overline{B} + \overline{B}A$

图1

（1）列出复合命题 X 的真值表；

（2）确定 X 的逻辑和结构；

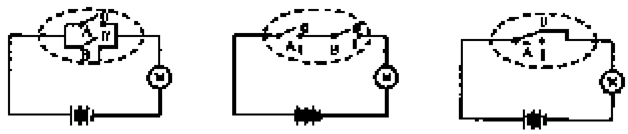
（3）简化 X 的逻辑式；

（4）画出相应的机能图；

（5）选择逻辑元件，确定自动装置的电路图。

对大多数读者来说，电灯的开关要远比二极管或三极管等电子元件来得熟悉。开关的通与断，可以用来表示命题的真值。而整个复合命题的真假，则由灯泡来指示。灯亮了，表示复合命题为真；灯不亮，表示复合命题为假。因而布尔先生的命题代数，有时也叫做“开关代数”。

开关电路的逻辑元件有如图 2。



“或”电路　　“与”电路　　“非”电路

在《布尔先生的命题代数》一节我们讲过，蕴涵关系 A→B 的真假性与 $\overline{A}+B$ 相同，而后者是“非A”和B的“或”电路，见左图。

利用上面开关电路的逻辑元件，我们可以根据机能图确定相应的电路。在前面楼梯路灯的例中

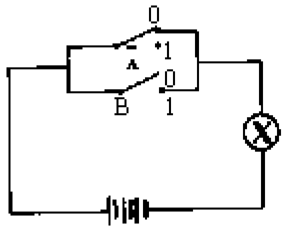


图2

$X=\overline{A}B+A\overline{B}$

逻辑式右端表明：X的开关电路应是 $\overline{A}B$ 和 $A\overline{B}$ 的“或”电路，而 $\overline{A}B$ 又是一个“非 A”及 B 的“与”电路；AB 则是 A 及“非 B”的“与”电路。下图则非常明显地表现出这一电路的结构。明眼的人能够看出，这个图跟图 2 的电路图实际上是一样的（开关间的虚线表明同时操作。

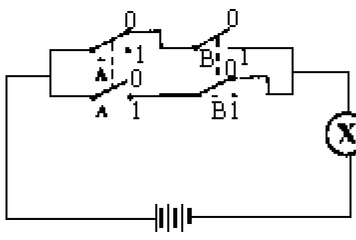


图3

我想读者一定不会只满足于开关电路的设计，而且还希望能亲自动手去制作这类装置。那么，下面的问题肯定会给你带来极大的乐趣！

【问题】

1．设计一个水位控制器，使水池里的水常满。

2．设计一个旅店双人房间的照明电路，要求房间入口处，两人的床头各

装一个拉线开关。当电灯亮时，拉动任何一个开关可以使电灯不亮；而当电灯不亮时，拉动任何一个开关可以使电灯变亮。

3．设计一个三人投票裁决，多数同意通过的自动装置。

4．设计一种有三个键钮的保密电子锁，仅当同时按下键钮 A、C 时锁 X 才能被打开，其余情况则拉响电铃报警。

5．设计一种能作两位数的二进制数的乘法装置。

$$\begin{array}{r} AB \\ \times\ CD \\ \hline XYZW \end{array}$$

[计提示]

1．在高水位与低水位分别设置开关 B、A，水未达该水位则有信号输出，则水泵的开关 X：

$X=A+\overline{A}B$

电路图见图 4

图4

2．设三个开关为 A、B、C，则灯 X：

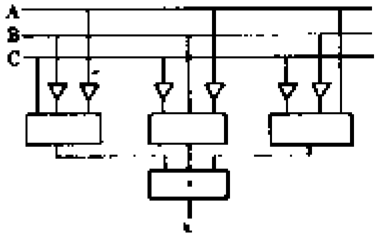


图5

$X=\overline{AB}C+\overline{A}BC+A\overline{BC}$

图 5 是它的机能图，电路图略。

3．设三人投票的命题为 A、B、C，裁决结果为 X，则

$$X=AB+AC+BC$$

4．设 Y 为报警命题，则

$$\begin{cases} X=A\overline{B}C \\ Y=X=\overline{A}+B+\overline{C} \end{cases}$$

5．
$$\begin{cases} X=ABCD \\ Y=A\overline{B}C+AC\overline{D} \\ Z=\overline{A}BC+A\overline{B}D+A\overline{C}D+BC\overline{D} \\ W=BD \end{cases}$$

错觉——思维的漩涡

徐霞客（1586～1641）是我国明朝著名的地理学家。有一次，他到了云南大理县的点苍山，看到了海拔 2030 米的云弄山麓有一处“蝴蝶泉”。他在一篇游记中写道：“……又有真蝶千万，连须钩足，自树巅倒悬而下，及于泉面，缤纷络绎，五色焕然。”

有一个姓赵的游人来到泉边观赏，发现了一种奇怪的现象：在泉边飞舞的蝴蝶躯体小，成串倒挂在树枝上的躯体大；白天倒挂的晚上飞走了！他感到很奇怪，便去请教蝶类专家，专家说：白天倒挂的应该不是蝶，而是蛾。蛾昼伏夜动个体大；蝶昼动夜伏个体小。于是他写下了《蝴蝶泉边的发现》一文，证实了千百年来对“蝴蝶泉”的叫法是一个错觉！

如果一个关于自然事物的命题是真实的，我们便称之为事实。然而单凭直观感觉来判断，很可能会使人陷入错觉的漩涡。直觉的偏见，而导致非科学的推理，在科学史上屡见不鲜！

最为生动的例子莫过于地心说。人们清晨看到太阳从东方地平线上冉冉升起，傍晚又见到太阳从西方地平线上徐徐下落。太阳的上升与下落使人类感觉到了白昼与黑夜。因此，有几千年时间，人们以为地球是宇宙的中心，而星星和太阳都围着地球运转。这种假象所造成的偏见，是如此根深蒂固地植入那个时代人们的脑海，以致于当发现在地球上观察一个行星，它好像是按回线运动时，依然对错误的偏见执信不移。在 6～8 周时间内，在地球上观察到的著名行星在恒星图案中仔细画出的运动路线。这种路线正如大家看到的那样，表现为极其美丽和规则的回线。所画行星的名称，从上到下依次是：水星、金星、火星、木星和土星。今天，“地心”的错觉已经恢复了本来的面目。大概没有什么人会怀疑地球是围绕太阳转的了。几乎所有中学生也都知道由于地球的自转带来了黑夜与白天！

背景的干扰，常常会产生光学的错觉，下面是一些有趣的例子。

当你注意上左图的图案时，你似乎会感觉到在白条的相交处有隐隐约约的阴影。这是因为离相交点较远的任何交界点周围黑色较多，因而显得比两白条相交处更为明亮的缘故。

四条水平线段其实是等长的，但看起来似乎各各长短不一。这种错觉产生变形的原因。是由于你的眼睛只注意箭头内的终点，而不随之到尖端。

下面图 4 图 5 的黑框实际上是两个正方形，由于背景线条的干扰，很可能会产生变形的错觉。

左下图的七条斜向直线都是平行的，但在你的最初感觉中，一定会以为它们是歪歪扭扭的。

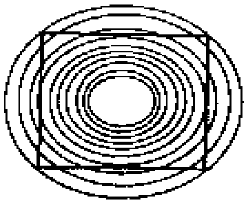


图4

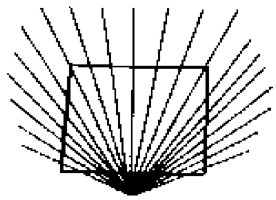


图5

抛弃直觉的偏见，需要敏锐的观察和科学的思维。只有摈弃“想当然”，才能识别假象。

上一世纪中叶，德国著名化学家李比希（Liebig，1803～1873）到英国进行考察。有一天，他在一家制作“柏林蓝”的工厂，看到了制作这种颜料的过程；把动物的皮和血与某种药水调和放在铁锅中煮。在加热的同时，用一根铁棍使劲地在锅里不断地搅拌，搅拌时发出极大的声响。主人介绍说：“搅拌锅里溶液时，搅的响声越大，柏林蓝质量越好！”

然而李比希却从假象中领悟到本质。他在寄回祖国的信中写了以下一段话：“用这种材料制作柏林蓝，另加一些含铁的化合物就行了，并不需发出响声。因为使劲蹭锅，无非是想把锅上的铁屑蹭下来，使它与液料化合而制成柏林蓝。这种作法虽不是毫无道理，但做出来的柏林蓝质量却不一定好，而更重要的是浪费了劳动力。”

下面有趣的问题，对于认识“想当然”的危害是再好不过的了！

两个人展开了争论。

甲说：“月亮发亮的部分接近正圆，所以这一天是阴历十五或十六。”

乙说：“怎么会是阴历十五呢？大约阴历二十左右吧，月亮缺着哩！”

聪明的读者，你能判定谁说的对吗？可能你已经猜到了，甲说的是对的！上面图中的“月缺”只是一种假象，一定是被看不见的什么物体遮住了。因为月亮被太阳光照射，它将近有一半是发亮的。所以地上看到的月亮图形，它的两个尖点连线应大致通过圆心，月亮图形显然不具备这一性质，因此判定图中缺的部分是被别的物体遮住了。看起来乙说的“月缺”只是一种错觉。

下面是一道几何上有名的错觉证明的例子。

已知：在四边形 ABCD 中，AB＝DC

求证：AD∥BC

【证】令线段 AD 与 BC 的垂直平分线相交于 E 点。已知：

△ABE≌△DCE（S·S·S）

∵∠1＝∠2

∴∠3＝∠4（EA＝ED）

∴∠BADD＝∠CDA

同理可证∠ABC＝∠DCB

∵四边形内角和为 360°

∴∠DAB＋∠ABC＝180°

从而 AD∥BC

证毕

学过几何的读者都知道，结论肯定是不对的！那么问题出在哪里呢？我想，只要读者仔细琢磨，破绽是一定会找到的。

可见人类的正确思维基于下述两点；一是事实，二是推理。事实是推理的依据，推理则是连接事实与结论的纽带。然而，错觉常常使人们的思维陷入一种漩涡。因此当我们检验有关事物的真实性，并作逻辑推理的时候，不要忘记我们感官上可能产生的错觉，多问几个为什么！

警惕似是而非的证明和结论

人们在生产和日常生活中，对事物要有明辨是非，识别真伪，分清哪些是似是而非，哪些又是似非而是的能力。我们应透过现象认识本质。在我国古代《吕氏春秋》里的“疑似篇”中就特别强调“疑似之迹，不可不察”。这是告诫人们，要用严格的逻辑推理的方法去观察事物的本质。这样才有利于认识世界，正确处理生产和日常生活问题。

同样，在数学中似是而非的命题或似是而非的证明也是不少的。我们研究或解决这些命题时，若稍不慎，就会被外来的假象所迷惑，甚至一些历史上的著名数学家也会犯这样错误。所以对这类似曾相识又不了解的似是而非的命题和证明方法应予高度警惕。在论证、推理时牢牢记住言必有据。只有这样，才能避免错误。为了加深印象，下面举一实例。

例1 若水结冰时体积增加$\frac{1}{11}$。则当冰化为水时，其体积就要减少$\frac{1}{11}$。这个结论对吗？

回答是不对的。又为什么呢？

水结成冰，体积增加$\frac{1}{11}$，这就是说，冰的体积比水的体积增加$\frac{1}{11}$，它是以水的体积作为标准来比的；冰化为水，体积减少$\frac{1}{11}$，它是以冰的体积作为标准来比的。由于比的标准不相同，所以我们就不能说：“由于冰的体积比水增加$\frac{1}{11}$，则水的体积就比冰减少$\frac{1}{11}$。”

为了具体说明，不妨假定水的体积为 11㎝³，则结冰后，其体积增加水的$\frac{1}{11}$，即为

$$11cm^3+11cm^3\times\frac{1}{11}=11cm^3\times\left(1+\frac{1}{11}\right)=12cm^3。$$

这就是说，11㎝³ 的水结冰后成为 12㎝³ 的冰。

现在假定来一个还原。即将 12CM3 的冰化它为水。假定要减少冰的体积$\frac{1}{x}$，即要减少$12cm^3\times\frac{1}{X}$，

所以可得，$12cm^3-12cm^3\times\frac{1}{x}=11cm^3$。

解之得，$\frac{1}{x}=\frac{1}{12}$

∴x＝12

这就是说，若水结成冰，体积增加了$\frac{1}{11}$，则冰化成水，体积就应减少$\frac{1}{12}$，（即减少冰的体积的$\frac{1}{12}$）而不是$\frac{1}{11}$，因而题目中的结论是错误的。

例 2　17 世纪法国数学家费尔马在研究质数（又称素数）的时候，曾认为“2^{2n}”＋1”形式的数，当 n＝0，1，2……，皆为质数。

他得出这个结论的理由是：

因为当 n＝0，1，2，3，4 时，则 $2^{2n}+1$ 的值分别为 3，5，17，257，65537，而后者诸数都是质数。因而便认为 $2^{2n}+1$ 形式的数皆为质数。

费尔马的这个结论曾经迷惑了不少人，直到 18 世纪瑞士大数学家尤拉才发现费尔马提出的 $2^{2n}+1$ 当 n＝5 时，其值为 4，294，967，297＝641×6，700，47 并非质数。才把这个结论推翻。

很明显，费尔马是世界上著名的数学家。但当他偶一疏忽时也会犯上述错误的。其原因是被少数的、个别的现象所迷惑，以不完全归纳法代替了完全归纳法。把个别的、部分的现象看成了全体事物的本质。

例 3　有一梯形 ABCD，引长上底 BC 至 F，使 CF＝AD＝b，引长 DA 至 E，使 AE＝BC＝a，连结 EF、AC、BD 和 DF，试看下面的错误推理导出荒谬的结论。

设 AM＝x，MN＝y，NC＝Z，则

△BCN∽△NAN

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{z}{x+y}$.

又∵△FAM∽△FCM，$\therefore\frac{a}{b}=\frac{x}{y+z}$

于是得到$\frac{a}{b}=\frac{z}{x+y}$-$\frac{x}{y+z}$，

$$\therefore\frac{a}{b}=\frac{z}{x+y}=\frac{x}{y+z}=\frac{z-x}{(x+y)-(y+z)}$$

$$=\frac{z-x}{x-z}=-1$$

即$\frac{a}{b}=-1$

∴a＋b＝0.

这个结论就是说，任何一个梯形的上底加下底其和为零，这不是一个荒谬的结论吗？与事实不符的结论一定是错误的。但它究竟错在哪里呢？

我们若不认真对待上面推理中的第一步骤，是很难发现它的错误所在，似是而非会迷惑我们，即是荒谬的结论，错误是必然存在的。列宁曾经指出过：“逻辑形式和逻辑规律不是空洞的外壳，而是客观世界的反映，”如果不符合实际情况不是推理的前提错了，就是推理与计算有错误。

我们认真检查上面每一步的推理，就会发现，∵△BNC∽△BDF（∵AD⊥CF，∴ACFD为平行四边形，∵AC∥DF

$\therefore \frac{BC}{BF}=\frac{a}{a+b}=\frac{NC}{DF}=\frac{z}{DF}$。

即$\frac{a}{a+b}=\frac{z}{DF}$。

同样可得△EAM∽△EDF。

$\therefore \frac{EA}{ED}=\frac{a}{a+b}=\frac{AM}{DF}=\frac{x}{DF}$。

即$\frac{a}{a+b}=\frac{x}{DF}$。

于是得到$\frac{z}{DF}=\frac{x}{DF}$。

∴z＝X，或即X－z＝0。

至此，再来看前面推理中最末了一步，

即$\frac{a}{b}=\frac{z-x}{x-z}=-1$

显然，在这个式子中，我们用（X-Z）去除分子和分母，已知X－Z＝0，我们用零去除分子和分母这就是错误所在的地方。事实上，在前面的每一步推理过程中也只有这一步值得研究和怀疑。（其余各步均有根据）于是才考虑到X与Z的大小关系，才考虑到△BNC∽△BDF，△ENM∽△EDF，才考虑到由此导出的比例关系。最终得到了可靠的结论，即X－Z＝0。荒谬结论是由最后一步推理上的错误而引起的。

例4　设O为圆心，AB为O圆的一直径，过B点任作一弦BC，并取其中点E。

连AE并延长交O圆周于D。

连结CD则∠A＝∠C，（都是以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$所度）。∠B＝∠D。（都以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$所度）又∵在△ABE及△CDE中，BE＝CE。（已知）

∴△ABE≌△CDE．（边、角、角）

∴CD＝AB．（全等三角形的对应边相等）但AB是O圆的直径，而CD是不过圆心的一条弦。两者不能相等。

这是一个初学几何时易犯的错误。

这个题错在“△ABE≌△CDE（边、角、角）”这一步。

∵∠A是△ABE中EB边所对的角，而在△CDE中其中一边与EB相等的边是CE，CE边所对的角是∠D，但今∠A不一定与∠D相等。（命题中并没有给

定∠A＝∠D）但在前面证明中，∠A＝∠C，∠B＝∠D 好像是两个三角形的对应角。其实不是“边、角、角、”的全等关系。这就是说，在△ABE 及△CDE 中根本不存在“边、角、角”的全等条件，而今把它当作似是而非的条件了。以错误代替了正确，其推理所得的结论当然是荒谬的了。所以这个问题是错在把不对应的条件误当作对应的全等条件了。

在逻辑推理中，若前提有错误或根本不存在，即使每一步的推理无误，其结论也会出现错误的。我们在命题或证题时，若稍一疏忽，同样会犯上似是而非的错误。如

例 5　求作一个直角三角形，已知斜边长为 C，并使其斜边上的高与斜边的和等于两直角边之和。

这是一个作图题，可以先作出一个草图进行分析。

设已作得草图。并设直角三角形 ABC 的斜边 AB＝C，斜边上的高 CD＝h_c，两条直角边 BC＝a，AC＝b，则要求作的直角三角形应具备下列条件即

$c+h_c=A+b$

但∠ACB＝90°，∴$hc\cdot c=a\cdot b$

又 $a^2+b^2=C^2$

今将 $c+h_c=a+b$ 的两边各自平方，

得 $c^2+2c\cdot h_c+{h_c}^2=a^2+2ab+b^2$

以 $ch_c=ab$，$c^2=a^2+b^2$ 代入，

得 $a^2+b^2+2ab+{h_c}^2=a^2+b^2+2ab$

∴${h_c}^2=0$，即 $h_c=0$

这就是说，这个要作的直角三角形其斜边上的高的长度是零。显然，这个直角三角形根本不存在。在客观上不存在的图形当然是无法作出的。所设的草图是不存在的。

这个例子说明推理虽然没有错误，但命题中的前提根本不存在，因此，要作出这个直角三角形的要求是不可能的。因而是错误的。这就是一种似是而非的命题。

在命题时，有时由于运用了一些脱离实际的数据代替了现实，也会造成似是而非结果的错误。如

例 6　一个圆柱形粮囤，装满玉米后，上边是圆锥形，量得圆柱的底面直径是 1．8 米。高 2 米，圆锥的高是 0．7 米，求这囤玉米的重量。（玉米的容重是 745 公斤／米^3）根据已给的数据，可以算得玉米的静止角θ（即圆锥母线与圆锥底面所成的角）

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{0.7}{\frac{1}{2}\times1.8}=0.7778。$$

查表得θ＝37°52′但事实上，客观存在的玉米的静止角应为 28.5°～34．5°这就是说，将玉米堆成圆锥形时，不可能保持 37°52′这么大的静止角，它必然要继续向底部下滑，直至使静止角在 28．5°～34．5°的范围

内，玉米才停止下滑静止下来。

这就是说，根据题设的数据是不能堆成这样的玉米堆的，从表面看来，这个题目是没有什么错误，但一经计算就会发现这种脱离实际的现象，根据题设要求的玉米堆根本是不存在的，所以说，这种命题是犯了一种脱离实际的错误，也是一种似是而非的命题，我们讲课或解题时应特别注意。

最后，我们提供三个诡辩题，请读者思考。

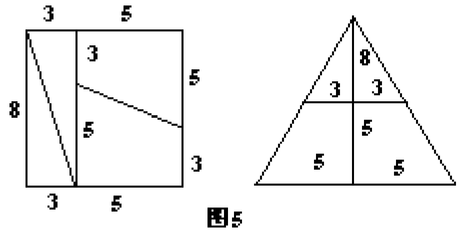


图5

（1）图 5 为一正方形，每边长为 8，其面积为 8^2＝64。但依图中的划线剪开，并按右图拼拢，得到一个三角形。

但三角形的面积为 $\frac{1}{2}$×（8＋5）×（5＋5）＝65。结果变成了64＝65。

这显然是不可能的，是一个荒谬的结论。它的似而非的剪拼究竟毛病在什么地方？

（2）设有一点 F 在已知∠ABC 内，由 F 点向 BC、AB 分别作垂线 FE、FD。过 F、D、E 作一圆（只能作一个）交 BC 于 H，交 AB 于 K，连结 FH 和 Fk、并分别取 FH 和 FK 的中点 O_2、O_1，则 O_2、O_1；均为该圆圆心。这不是一个圆有两个圆心了吗？

显然这个结论肯定是错误的，试问它的毛病在什么地方？

（3）设 A、B 为直线上的两点，以 AB 为一边作△ABC，使∠A 为锐角，又作 CD⊥AB，作 CE，使∠ACE＝∠B。现在作如下的推理：∵∠A＝∠A。于是可得△ABC∽△ACE。（两个三角形中有两组

对应角相等，则两个三角形相似）∴ $\frac{\triangle ABC}{\triangle ACE}=\frac{BC^2}{CE^2}$。（相似三角形面积之比

又 $\frac{\triangle ABC}{\triangle ACE}=\frac{AB}{AE}$。（等高三角形面积之比等于底之比）

∴ $\frac{BC^2}{CE^2}=\frac{AB}{AE}$

（等于同比的二比相等）

∴ $\frac{BC^2}{AB}=\frac{CE^2}{AE}$

但 $BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AD$，（谢影定理或勾股定理推广）同样，$CE^2=AC^2+AE^2-2AE\cdot AD$

$$\therefore \frac{AC^2+AB^2-2AB\cdot AD}{AB}=\frac{AC^2+AE^2-2AE\cdot AD}{AE}$$

即 $\frac{AC^2}{AB}+AB-2AD=\frac{AC^2}{AE}+AE-2AD$。

即 $\frac{AC^2}{AB}-AE=\frac{AC^2}{AE}-AB$，

$$\therefore \frac{AC^2-AB\cdot AE}{AB}=\frac{AC^2-AB\cdot AE}{AE}。$$

于是可得 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AE}$。（以 AC^2－AB・AE除两边）

即得 AB＝AE 但 AE 是线段 AB 的一部分，而今 AB＝AE，不是全量等于部分了吗？这显然与公理“全量大于部分”有矛盾。但它的错误在哪里呢？

请读者把这种似是而非的“非”清查出来！

总之，在数学中，在其他科学中确实存在着不少似是而非的东西。我们必须认真对待，看看前提是否有毛病，看看在推理过程中是否句句有理。对前提和推理中的每一步进行严格的审查，只有这样才能区别真伪。其实在现实世界中，确有许多似是而非的现象不断向我们袭来。为了维护真理，发现真理，我们必须高度警惕，认真对待予以区别。

下面附上 7 道易犯错误的题目。请读者思考。

1　设 X、y 为正变数，在 $3x^2+2y^2=6X$ 的条件下，问 X 取何值时，x^2+y^2 达到最大值，并求出此最大值。

错误的解法：

设 $x^2+y^2=s$。

则 $2s=2x^2+2y^2=2x^2+(6x-3x^2)$

$=6x-x^2$

$=-(x^2-6x)$

$=-[(x^2-6x+9)-9]$

$=-[(x-3)^2-9]$

$=9-(x-3)^2$

当 X＝3 时，2S 有最大值。亦即 s 有最大值，所以当 X＝3 时，x2＋y2 达到最大值。

它的最大值 $\frac{1}{2}[9-0]=4\frac{1}{2}$。

2　k 为何值时，二次方程 $kx^2-2(k-4)x+(k+8)=0$ 有两个不相等的实数根？

错误的解法：

由判别式△≥0，可得 $[2(k-4)]^2-4k(k+8)\geq 0$，

即得 k≤1，

3　解方程｜x｜＋x＝1＋3i

错误的解法；

移项、并两边予以平方，得

$x^2=[(1+3i)-|x|]^2$。

即得 $x^2=(1+3i)2-2(1+3i)x+x^2$

即 $2(1+3i)X=(1+3i)^2$

$\therefore x=\dfrac{(1+3i)^2}{2(1+3i)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$。

4 已知 $x+y=1$，求 $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}$ 的最大值。

错误的解法：

$\because x+y=1$

$\therefore \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\sqrt{(2x+1)\cdot 1}+\sqrt{(2+1)\cdot 1}$

$\leq \dfrac{(2x+1)+1}{2}+\dfrac{(2y+1)+1}{2}=x+y+2=1+2=3$。

即 $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\leq 3$。

5 设 $\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{x+y}{z}=k$ 求 k

错误的解法：

应用等比定理，得

$\dfrac{x+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z}=k$，

即得 $\dfrac{2(x+y+z)}{x+y+z}=k$。

$\therefore k=2$，

6 化简 $\sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{15+4\sqrt{14}}$

错误的解法：

$\sqrt[3]{(\sqrt{7}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{15+4\sqrt{14}}$。

$=\sqrt[6]{(\sqrt{7}-2\sqrt{2}^2}\cdot\sqrt[6]{15+4\sqrt{14}}$

$=\sqrt[6]{7-4\sqrt{14+8}}\cdot\sqrt[6]{15+4\sqrt{14}}$

$=\sqrt[6]{15-4\sqrt{14}}\cdot\sqrt[6]{15+4\sqrt{14}}$

$=\sqrt[6]{15^2-(4\sqrt{15})^2}=\sqrt[6]{225-224}=\sqrt[6]{1}=1$

7　证明下列命题：

三角形任意两条中线之和大于第三条中线。

错误的证法：

设在△ABC 中，AD、BE、CF 分别是△ABC 的 BC、AC、AB 边上的中线。今分别以 A、D 为圆心，以 CF、BE 为半径作弧，此两派交于 G 点，则 AG＝CF，DG＝BE。

因为△GAD 的任意两边之和大于第三边，而△GAD 的三边分别是△ABC 的

三条中线。所以三角形的任意两条中线之和必大于第三条中线，证毕。

对这里 7 道题目的提示及注意如下：

1　对错误解法原因简析：

$x=3$ 是不能取得的。因为由约束条件得

$2y^2=3(2x-x^2)\geq 0$。

故 x 的取值范围应为 $0\leq x\leq 2$。

很明显，本题的“似是而非”源出于忽视取值范围的变化。

2　注意在 $k\leq 1$ 中，应排除 $k=0$。

3　注意当 x 是实数时才有 $|x|=x^2$，而当 x 为复数时则并不是总有 $|x|^2=x^2$。

可设 $x=a+bi$，则 $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$

代人 $|x|+x=1+3i$ 式内

得 $\sqrt{a^2+b^2}+a+bi=1+3i$

解之可得 $a=-4$，$b=3$，

代入得 $x=-4+3i$。

4 在应用 $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ 公式时，应限定 a、b 均为非负数。

该题中并不能由 $X+y=1$ 而肯定 $2x+1$，$2x+1$ 为非负数。

5 注意由 $\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=k$ 推至 $K=2$ 时。必顺

$x+y+z\neq 0$

显然，若 $x+y+z=0$ 时，代入题设中可得 $k=-1$，所以说，对解应作全面讨论。

6 注意“$\sqrt{7}-2\sqrt{2}$”是一个负数。

我们知道，根式的基本性质：

$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$。（$a\geq 0$），在条件 $a\geq 0$ 时才成立。

7　本题的“似是而非”是由于犯了几何中的循环论证之故，看看好像已经证明了，其实仍旧没有证明。

事实上，当分别以 A、D 为圆心，以 CF、BE 为半径作弧时，怎样知道它们一定相交于 G 点呢？若默认了交于 G 点，实质上是承认了 AD、BE、CF 中两条线段的和大于第三线段。这就是利用了要证结论的自身作为证明的理由，所以其错误是属于循环论证的。

识别伪科学

古往今来，有不少科学家被那个时代的入斥为“异端”，然而他们坚持的却是真理，像哥白尼、伽利略、达尔文、爱因斯坦等人都是。

那么科学与伪科学的界限究竟在哪里呢？科学大厦的基石一是事实，二

是推理。事实，要求科学家们具有严肃认真的态度，踏踏实实的脚步，尊重并利用已经肯定了的科学成果。推理，要求科学家们严格依照假设——演绎的方法，通过新的观察来检验自己的假设。如果新的观察表明原先的假设是错误的，他们会毫不留情地摈弃这种假设。因而，尽管科学的道路难免会有曲折和分岔，但只要尊重科学，还是能殊途同归，抵达真理的彼岸。

伪科学则与此相反，那是以信仰为基础的臆说。在那里客观的事实被随意地扭曲，科学的成果被任意地拨弄。

其目的只有一个。就是把人们引向愚昧，引向上帝的“ 圣殿 ”，引向唯心主义的“ 迷宫 ”。

西方伪科学种种，最具世界性影响的要数丰 · 丹尼肯先生和他的《众神之车》，剖析一下这一怪人奇想，对于识别伪科学无疑是有益的。

1968 年，34 岁的瑞士学者厄里希 · 丰 · 丹尼肯写成了一本书，叫做《众神之车》。这是一本十分奇特的书，作者把自己 15 年来周游世界收集来的一些神话、文物、遗址，其中当然不乏捕风捉影和道听途说，根据自己极为丰富的想象力，描绘了一幅 1 至 4 万年前外星宇航员光临地球的情景，然后断言说：上帝是存在的，上帝就是这些外星宇航员们的领袖；现今地球上的一切都是这些“ 神 ”们安排的，散布在世界各地的神秘莫测的古文物和遗址，以及目前世界上许多稀奇古怪的现象，都是“ 外星人 ”降；临地球的“ 佐证 ”。

《众神之车》问世以后确也风靡一时，原因除了耸人听闻以外当然还有一些写作技巧。例如作者一开头就采用了赤裸裸的激将法：“ 外行人在发现发掘过去要比预测将来更神秘。要冒险之后，又会重新缩回到他们一向住惯的蜗壳之中 ”、“ 写这本书要有勇气，读这本书也要有勇气 ”。谁愿意承认自己没有“ 勇气 ”？谁愿意甘居“ 蜗壳 ”？因此这种露骨的“ 激将 ”语言，也拉取了一部分无知的读者。

让我们来看一看丰 · 丹尼肯先生依据的是什么事实吧！远的且不说，就说书中提到的关于我们中国的事情吧！

丹尼肯先生说：“ 在中国的周处（死于公元 297 年的西晋时代）墓中有一条铝腰带断片。 ”认为这是古代不可能有的技术成就，以此来证明外星宇航员到过地球。然而这一事实本身已被正式否定。1972 年，中国科学院考古研究所所长夏著文对此作了总结，证实该墓在历史上曾被盗两次，发掘时墓内有明显的扰乱痕迹，而所清理出的小残片是从淤土中尽可能拣出来的，不能排除小块铝片是后世的混入物。

在《众神之车》中还有一处提到：“ 在中国云南省会昆明，发现了一些雕刻，上面刻着圆柱形类似火箭的装置，直指天空。这些图形在一块尖塔形的石头上，而这块石头是在一次地震中从滇池中突然冒出来的。 ”其实，这只不过是一则莫须有的传闻！

在丰 · 丹尼肯先生的另外一本书上，转引了苏联刊物《人造卫星》上的文章说，1938 年，中国考古学者在巴颜喀喇山的洞穴中发现了许多石版，上

面用象形文字记载着 1 万 2 千年前外星宇航员因飞船失事而被迫降落，又被当地居民杀死的故事。然而，这一惊人的事件，在我们自身生长的国土上却闻所未闻。

类似的事例还有很多，很多。从丹尼肯先生肆意歪曲有关中国的史实来看，我们完全有理由怀疑，他所描述的关于国外的一些素材，也未必都符合客观事实。

现在再看一看丰·丹尼肯先生是怎样编织自己的“推理网络”。这种扭曲的思维，为本书提供了绝好的反例！

丹尼肯先生写道：“人类知识的支柱有多少次曾经被推倒！千百年间，人们一直以为地球是平的，太阳围绕着地球转。这个‘铁’一般的定律曾经顽强地维持几千年”，然而它终于被推倒了！结论是：既然人类知识支柱曾经被推倒过多次，那么今天人类的知识支柱就非被推倒不可！

从数学角度看，丰·丹尼肯先生的推理方法是：“若 n＝1，n＝2 甚至 n＝3 时命题成立，那么对于任何的 n，命题一定成立。这种不完全归纳所可能产生的谬误，读者在《步向真理的阶梯》一节，已经了解得十分清楚。

不仅如此，丰·丹尼肯先生还善于采用“若 n＝K（k＞1）时命题成立，则 n＝1 时命题必定成立”这类令人惊讶的“推理术”。请看《众神之车》中的一段绝妙的描述，作者想象：有朝一日我们宇宙飞船踏上了异星的土地，那里的理智生命是怎样看待我们这些不速之客？“当夜晚变得如同白天一样明亮（探照灯），他们惊呆了；当这些陌生人毫不费力地飞到空中时（火箭助飞器），他们怕极了；当莫名其妙的‘动物’在空中翱翔，发出嗡嗡声和喷气声时，他们又一次俯伏在地；而当山中响起吓人的隆隆声时（试探性爆炸），他们奔进洞穴的安全地方躲起来，毫无疑问，对于这些原始人来说，我们的宇航员就好像全能的神！”结论是：既然我们到别的星球去会想象得到有如此这般的遭遇，那么过去外星人也一定这样到过我们地球！把丰·丹尼肯先生所说的话概括为一句就是：“今后想做的东西，过去一定有过！”这实在是荒谬至极！

天地之大，无奇不有，丹尼肯先生没有忘记抓住一些“世界之谜”做文章。他窥测读者心理，采用时真时假的办法，把当今世界难解之谜一统划入他的神学版图。

举例说，丰·丹尼肖先生搬出一张 18 世纪土耳其海军上将皮里。雷斯用过的地图说：“这张地图精确得不可思议。”“标绘在下端的南极洲同用回声探测法测出的冰下地貌十分相像”。推论是：“我们应该大胆地捅马蜂窝，宣布这些有关我们地球的地图是在高空飞行器或宇宙飞船上绘成的。这只能是外星人，当然，这位土耳其海军上将的地图不是原本，它是抄了又抄的复本。”然而完全可以把南极洲的地图与海军上将的地图作比较，从中我们就能发现丹尼肯先生所说的地图“精确”性，究竟需要打多么大的问号！

下图是撒哈拉的塔西里发现的壁画。丹尼肯先生以斩钉截铁的口吻说，

画中的人穿着套服，戴着奇特的头盔，这又一次表现了原始人不寻常的概念，因此只能是外星人的写照。

类似上面的例子在丰·丹尼肯先生的书中真是俯拾皆是！

难道人类所创造的文明竟是水月镜花？难道生活在地球上的人类自身，竟是如此不屑一顾？严肃、理性的科学面临着非理性的挑战！1975 年，科学家们决定起来应战了 ！括 19 名诺贝尔奖金获得者在内的 186 位著名科学家联合签署了公开声明，批判形形色色的伪科学。许多知名学者共同编写了《科学与伪科学》等一系列书籍，对非科学的思维和臆想，进行了公开的揭露。地质学家卡佐和考古学家斯各特也进行了世界旅行。用严格的科学方法，重新考察了诸如百慕大三角、不明飞行物、古代宇航员之谜、复活节岛石像、奇异的金字塔、神秘的玛雅文化等奇事，得出了与丰·丹尼肯完全相反的结论，并写出了《奇事再探》一书。这是一本值得一读的书。因为它告诉我们什么是真正的科学思维，及怎样去识别伪科学的谬误。

由总统生死所想到的 367 人的生日

四个苹果放到三个抽屉里，则必然有一个抽屉里有两个以上的苹果，这就是所谓的“重迭原理”（即“抽屉原理”）。它是数学证明中一个看起来很直观、显然，但却十分有用的命题，利用它我们可以证明：

367 人中至少有两人生日相同（因为一年有 366 天）。

要是不足 366 人呢？这时只能说人数越多，有两人生日相同的可能性越大。这种可能如何表示，它们到底又有多大？

在回答这个问题之前，我们先来看一个资料。

美国总统的生、死日期

有人查阅了美国前 36 任总统的生、死日期，竟发现他们中有两人生日相同，三人死在同一天：

第十一任（15 届）总统詹姆斯·诺克斯·波尔克（民主党）和第二十九任（33 届）总统沃伦·甘梅利尔·哈丁（共和党）都是 9 月 2 日出生的；

第二任（3 届）总统约翰·亚当斯（联邦主义者）、第三任（4、5 届）

总统托马斯、杰斐逊（民主党）和第五任（6、7 届）总统詹姆斯·门罗（民主—共和党）都是 7 月 4 日死的。

你也许会觉得奇怪，36 人中竟会有两人生日相同、三人死期一样！这仅仅是巧合么？如果不是又如何解释呢？

一些具体的原因，我们暂且不去分析（当然它们可能很复杂），仅从数学角度去解释。这完全是正常的（是的，数学有时也能解释一些人们凭直观或感觉无法解释的奥妙现象）。

数学能够进行解释

上述现象用数学的一个分支——“概率论”去解释，你会觉得不那么神奇了，为此我们先介绍几个概念。

在生活中或自然界里有一些现象，在一定条件下一定会出现，如月到十五圆，水烧到 100℃会开等，这种事件叫必然事件。

有些事件却不是那样，在某些条件下它可能发生，也可能不发生，比如洪水、火山，甚到掷硬币出现正面等，这此事件先是无法确定的，它们叫做偶然事件。概率论正是研究这些偶然事件发生规律（统计）的学科，概率也正是对于事件发生可能性的一种测度或度量（它的值在 0．1 之间）。

比如：三张牌（你已经知道的），你随意猜其中一张是几，猜对的可能只有三分之一，我们把这种可能就称作概率，这样我们可以说猜对的概率是 1／3。假如牌是五张的话，你猜对其中一张的概率只有 1／5 了，那么猜错的概率对于前者来说是 2／3，对于后者讲是 4／5。显然“对”与“错”是互相对立的，这在概率论中称为对立事件，若用 P_A 和 P_B 分别表示“猜对”和“猜错”牌的概率，那么显然有 $P_A+P_B=1$。（对于必然事件的概率定义为 1）

为了解释生日问题我们先来分析一个例子。

三颗小球以同样机会落到五个盒子里，那么会有多少种可能的方式？

显然第一颗球可以落到五个盒子中的任一个盒里，那么它有 5 种方式，第二颗球也可以落到五个盒子中的任一个盒里，它也有 5 种方式；第三颗球与上同理，它落下的方式同样是 5 种，这样三颗球落到五个盒子中的方式共有 5^3 种。

今要再问每个盒子里至多有一颗球的方式有多少？

这恰好是从五个盒子中任选三个排列问题，即有 $A^3_5=5\times4\times3$ 种方式，下面我们便可以计算一下：三颗球落到五个盒子里，且每个盒子至多有一颗球的可能或概率大小。即

$P_A=A^3_5/5^3=5\times4\times3/5^3=12/25$。

那么由前面的分析知道：“三颗球落到五个盒子里，至少有两颗球在同一个盒子里”的事件与上面的事件是对立的，显然它的可能或概率应为：

$P_B=1-P_A=1-12/25=13/25$。（因为 $P_A+P_B=1$）

类似上面的分析，你能得到：

n 颗球落到 365 个盒子里，每个盒子至多有一颗球的概率应为：

$P_A=A^n_{365}/365^n=365\times364\times\cdots\times(365-n+1)/365^n$

而 n 颗球落到 365 个盒里，至少有两颗球在一个盒子里的概率为：

$P_B=1-P_A=1-A^n_{365}/365^n$

试想一下，若把生日视为“球”，把一年中的 365 天视为 365 个“盒子”的话，那么生日问题不正是与上面问题类同么？这就是说：

n 个人中，至少有两人生日一样的概率是：

$Pn=1-A^n_{365}/365^n$

$=1-365\cdot364\cdots\cdots(365-n+1)/365^n$。

对于一些 n 值（人数）有人计算得：

n	5	10	15	20	25	30	40	50	55
pn	0.03	0.12	0.25	0.41	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

表上的数字告诉我们：40 人中有两人生日一样的可能已有 0．89，可能性已经很大了。

难怪前面的 36 位总统中竟会有两人生日一样(当然对于它们死的日期分析与上道理同）。

这个结果也许会使你感到意外和吃惊，但这是千真万确的事，倘若你还不肯相信但又有兴趣的话，你不妨作个调查去检验一下吧！更细腻和准确的解释，读者可从概率论的专门著作中去寻找了。

“算”出来的行星

1985 年底，1986 年初，哈雷慧星又来地球“访问”。消息早在几年前已经披露——当然这是靠数学的计算，这一点今天已不再会有人怀疑，因为当今人们不仅能准确地算出慧星哪年临近地球，甚至能算得它哪月哪日在天空何方位，当然也能算出慧星离开地球的日期（1986 年 5 月底）。这要是在几百年前几乎是不能想象。由此亦可看出数学的功力（当然也包括天文观测手段）。

早在 18 世纪，利用数学计算找出太阳系的一颗新星（谷神星）的故事，在当时还是颇为振奋人心的。

1772 年，德国天文学家波德发现了求太阳与行星距离的法则——波德定律。若设地球和太阳的距离为 10，则依此定律可算得当时已知各行星与太阳的距离分别为：

星名	水	金	地	火	木	土
与日距离	4	7	10	16	52	100

上表中各数各自减去 4 以后得下面一列数：

0，3，6，12，48，96。

细心的读者也许已观察到了它们之间的一些规律：倘若在 12 和 48 之间再添上一个 24 的话。则从第三个数起，后面每个数均为其前面的两倍。

1781 年，天王星被发现，人们又算得它与太阳的距离是 192，这恰好是依照上面规律那一列数中 96 的下一个数（但它没有减 4）。这一发现引起了人们的极大兴趣与关注，人们也在猜测：

在与日距离为 28 的地方应该有一颗行星。

几十年过去了，天文观察家们却一无收获。不久德国数学家高斯利用数学公式终于计算出了这颗行星的轨道，这样于 1801 年 12 月 7 日，人们按照数学家的计算，终于找到了这颗行星——谷神星，它与太阳的距离是 27．7。

然而事情并没有结束，谷神星直径仅有 770 公里，为地球 6%，木星的 0.55%，在火星与木星之间，大小太不相称。后来人们又在这些空隙里陆续发现许多小星——小行星，数目到目前为止已达 2000 多个。

数学竞赛与减影诊断

在 1983 年举办的第十七届全苏中学生数学竞赛中，有一道这样的试题：

有一张无边的方格网，你是否能在这张方格网的每一个小方格中填上某一个整数，使得这张方格网上的每一个尺寸是 4×6 个方格的矩形里的所有小方格中填的数字之和是 1？

这道试题初看起来真有点唬人！因为这张方格网无边无际，要从上面任意位置上取下的 4×6 个方格矩形里的数字之和都要等于 1，确实有点难办。但是，如果你先去考虑设计出两张比较容易构造的“样板”，那么问题就会好办得多。

图 1 是一张无边的方格网，它是这样设计的：在相距是 5 格的对角线的地方交替地写上 1 和 0，其余的方格也都填上 0，如此填满整个方格网。

你很容易会发现，从下面这张方格网中的任何地方取出的 4×6 方格矩形，其数字之和是 2。

1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1

图1

0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0

图 2

图 2 是另一张无边的方格网，在相距是 3 格的对角线上也交替地填上 1 和 0，其余的地方均填的是 0。同样可以看出，从图上这张方格网中任何地方取出的 4×6 方格矩形，其数字之和是 3。

现在来填写第三张网格。

把第一张表和第二张表叠放在一起，将图 2 中每一个小方格中的数减去图 1 中对应方格中的数，填在第三张表的同样位置上，例如，第一横行第一格 0－1＝－1，第二格是 1－0＝1，第三、四、五格都是 0－0＝0，第六格是 1，第七格是-1，……以此类推，最后将方格网填满，得到一张新的方格表图 3。从这张新方格表中任何地方取下的 4×6 个方格的矩形，其中数字之和就是 3－2＝1 了。图 3

－1	1	0	0	0	1	－1	0	0	1	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	－1	1	0	0	0	1	－1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	1	0	0	－1	1	0	0	0	1	－1	

读者不难发现，重叠的形式不同，就可以得出满足不同要求的各种方格表，图 3 就是其中之一。这种解题思路给出了解决这类问题的一般方法，而这种方法的道理又是十分浅显易懂的。

然而，就是这个浅显的数学思想，却导致了一门世界尖端学科——数字减影诊断学的诞生。

1982 年 3 月，一位 57 岁的美国人，因患阵发性眩晕症去某医院就诊，医生怀疑他的脑血管有病，于是给他的颈动脉注射一种造影剂，使血管能拍摄得更清楚，然后拍摄了 X 光片。检查了 1 个小时，使病人痛苦不堪，结果却令人失望！因为拍出来的片子上，脑血管影像与颅底骨影像相重叠，X 光片模糊不清，医生无法确诊。两个月后，医生采用了一项新技术再次为病人检查，原先重叠在造影片上的颅底骨影像竟被奇迹般地消去了，片子上只留下清晰的脑血管影像，使医生作出了正确的诊断！这项新技术就是数字减影血管显像技术（简称 DSA 技术）。

这项技术和数学有什么关系呢？

原来，这项神奇的 DSA 技术的原理就是上面提到的解题思路。医生在对

病人注射造影剂的前后，分别对颈动脉拍了两张 X 光片，两张 X 光片上，一张颈动脉血管影像深，一张浅，将这两张底片划分成许多很小很小的小方格，于是画面就被看成是明暗不同的许多小点所组成。然后根据每一个小方格明暗程度，用数字转换器转换成相应的数字，得到两张有数字的方格网。再将这两张方格网的数字送入电子计算机依次逐点相减，得到一张新的方格网。把这张新的方格网还原成底片，于是就得到了一张没有骨骼组织干扰的异常清晰的血管影像！

数字减影诊断学是一门刚诞生的具有划时代意义的新学科！而它依据的数学原理却如此简单。朋友们，请千万不要轻视你现在所学习的数学知识与解题方法啊！

最后，给大家留一则思考题：

有一张无边的方格网，你是否能够在这张方格网的每一个小方格中填上一个整数,使得这张方格网上每一个尺寸是 1949×1989 的矩形里的所有方格中填的数字之和是 40。

这是一则饶有趣味的问题，新中国成立于 1949 年，1989 年是建国 40 周年纪念，而这则问题恰巧只出现了这三个数字。如果你确实领会了上面介绍的内容，相信你一定能解决这个有意思的问题。如果你解不出，请你再从前面的叙述中找到这个问题的提示。