学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中小学数学小百科(35)

数学科·智能篇

BOOK

内部资料 非卖品

联系课堂教学
培养学生创造性思维能力

山东省烟台师范学校　林茂荣

在科学技术高度发展的今天，教学已不仅仅是知识的传递过程，更主要的应是能力的培养过程。乌克兰科学院院士格涅坚科指出：“如果我们想下一代超过我们，我们就应该改造我们的教育，要改得不是灌输知识，而是使得学会思考。”数学教学更是如此。数学教学大纲中很重要的一条是：培养学生的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及运用所学数学知识解决实际问题的能力。

课堂教学是数学教学的重要组成部分，在课堂教学过程中，首先要建立愉快的课堂气氛，让学生热烈讨论，各抒己见。教师要善于启发和诱导学生进行有效的创造性学习，并在学习的过程中，尽可能多为学生创造猜测、联想的机会，鼓励他们大胆进行猜测、联想，培养其创造性的思维能力。

一、在数学基础知识的灵活运用中培养学生的创造性思维能力

数学基础知识的直接套用，对大多数人来说比较容易，而知识的灵活运用则有一定的难度，譬如：公式的综合应用和公式的逆用就比较困难，因此在教学中注意抓住这些知识点，促使学生积极思考。我在学完两角和与差的三角函数公式后，给学生列出这样两道习题：

1．已知：$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，且α、β都是锐角，则$\cos\beta$=__。

2．已知：tg（α＋β）=3，tg（α-β）=5，则 tg2α=__。这两道题目的解答实际上都是公式的直接应用，但需要把（α＋β）和（α-β）看成一个整体，从而增加了知识应用的难度和灵活性。

在学完等差数列、等比数列后，给学生写出下面两道练习题：

1．在等差数列｛a_n｝中，若 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=450$，求 a_5。

2．在等比数列｛a_n｝中，若 $a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot a_7=1024$，求 a_5。

这两道习题的解答实际上是等差等比中项公式的逆用，即：

$a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5$，$a_3\cdot a_7=a_4\cdot a_6=a_5^2$。

总之，在课堂上放手让学生自己去探索、讨论，从而得出解答问题的方法。经过长期的训练，学生灵活运用知识的水平大为提高，既加深了对基础知识的理解，也培养了学生创造性的思维能力。

二、在深化基础知识的过程中培养学生创造性思维能力

在深化基础知识的教学过程中，注重启发，不急于给学生讲清所有的结果，而是引导学生自己去“发现”数学课程中的个别结论，从而可在深化知识的过程中培养学生的创造性思维能力。

譬如对公式$C_n^0+C_n^1+\Lambda\ C_n^n=2^n$来说，如果集合S含有n个不同元素，那么它的所有子集（包括空集）的个数为 2^n，在学生已经了解这个公式之后给出下面的习题：

一个集合由 5 个不同的元素组成，这个集合中含有 1 个、2 个、……、5 个元素的子集有多少个？要求学生独立解答，小结时，将两种不同的计算方法列在黑板上：

方法一、$C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=5+10+10+5+1=31$；

方法一、$C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=2^5-1=31$。

容易看出第二种解法非常简练，尤其是在元素的个数较多时，应用此法会节约很多时间。此法实际上是公式$C_n^0+C_n^1+C_n^2\cdots C_n^n=2^n$的灵活运用。

教师让学生自己分析研究，由公式$C_n^0+C_n^1+\cdots C_n^n=2^n$得到变式$C_n^1+C_n^2\cdots C_n^n=2^n-1$。将传授知识的过程转化为培养能力的过程，促进他们对数学知识的理解与掌握。

在数列极限的教学中，做完练习之后，在黑板上写出下面两式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\Lambda+n}{n^2}=\frac{1}{2}\text{；}\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\Lambda\ n^2}{n^3}=\frac{1}{3}\text{。}$$

要求学生对两式中分子、分母 n 的次数作出比较，通过观察有的学生提出以下命题：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\Lambda\ n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}\text{。}$$

此时学生急于了解该命题是否正确，教师抓住这个机会鼓励学生加以证明。通过研究讨论，可用数学归纳法证明命题是成立的，进而深化了教学内容，增强了学生的自信心，也提高了学生的思维能力。

在小学数学教材教法中有这样一道例题：

买 5 个凳子和 3 把椅子共付出 85 元，买 2 个凳子和 3 把椅子共付出 61 元，问凳子和椅子的单价各是多少？

这个例题的解答是通过比较已知条件，研究对应的数量差的变化情况，找到解题方法的。接着给出如下两个讨论题：

1．买 5 个凳子和 4 把椅子共付出 100 元, 买 2 个凳子和 3 把椅子共付出 61 元，问凳子和椅子的单价各是多少？

2．买 5 个凳子和 4 把椅子共用 100 元，买 1 个凳子和 3 把椅子共用 53 元，问凳子和椅子的单价各是多少？

对第一题学生根据相等的数量关系，很快找到了解题方法。而对第二题却百思不得其解，教师在此时利用学生积极探索的心理状态，及时提出问题：如果允许用方程解，你会怎样做？用什么方法解二元一次方程？此时，学生会恍然大悟。

这些发现虽然很一般，但对学生而言，不仅可提高他们支配创造性思维能力的自信心，对于发展和强化创造性思维能力也将起很大的作用。

三、在知识的综合运用过程中培养学生的创造性思维能力

知识的综合运用是课堂教学的重点也是难点，教师在教学活动中要注重引导学生深入到自己的学习过程中去，鼓励学生研究、争论和探索，特别是对一些综合程度大，应用知识面较广的题目，要给学生充足的时间去思考、讨论、争论，并在适当时机给予一定的启发诱导。

如，求证：$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\Lambda+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=n$。

由于习题的难度较大，学生经过思考讨论后仍感到无从下手，此时可提出如下几个问题：

1．证明过程中可能应用哪些公式？

2．习题的条件与公式是否吻合？差别在哪里？

3．如何处理才能应用公式？

进行上述启发诱导后，再组织学生讨论，很快理清了思路，明确了解题方向。

又如，解方程：$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+4\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}$

$=28$

这是一无理方程，如果思考方向是解方程的方法，将无法找到解题途径，要注意引导学生观察方程左边各项有什么特点——四项中两两的乘积为定值，联想到不等式的性质，从而找到解题的途径。

再如，已知：$n\in N$，并且$n\geq 3$，试证：$n^{\frac{1}{2}n(n-1)}$

此题学生大都会想到用数学归纳法去证，并且也可以证出。为拓宽学生的解题思路，加强知识的综合应用，要求学生思考，是否还有其它解题思路。由于此题难度较大，学生较难独立想出解题思路。因此要给予适当的引导：

∵n1＝1·2·3·…·n（1）

$\frac{1}{2}n(n-1)=1+2+3+\cdots+(n-1)=0+1+2+3+\cdots+(n-1)$，

$\therefore 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}=2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot 2^{n-1}$（2）

观察（1）（2）两式后发现，它们的第一项、第二项分别相等，若能证明当$n\geq 3$时，$2^{n-1}>n$成立，问题即可解决。而当$n\geq 3$时，

$2^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1}>C_{n-1}^0+C_{n-1}^1=1+(n-1)=n$，题目得证。

培养和提高学生的创造性思维能力是一项长期任务，教师在备课过程中应耐心细致，为学生设置好难易适中的“路障”，在课堂教学过程中要注意

为学生提供更多的猜测、联想的机会，调动起学生手脑并用的积极性，同时要把握好时机积极引导，使学生的思维过程更具创造性。

加强函数思想教学

黑龙江第一重型机械集团公司教育学会
张臣

函数是中学数学中的基本概念之一，它描述了自然界中量的依存关系，是对问题本身的数量本质特征和制约关系的一种刻画。函数思想是用运动、变化、联系、对应的观点来分析数学和实际生活中数量关系的思想。其实质是剔除问题的非数学特征，用联系和变化的观点提出数学对象，抽象其数量特征建立函数关系。不少数学问题，如多项式、不等式、方程式，只要站在函数的高度来认识，用函数思想来分析，就能抓住问题的本质，解法简明。例如某些指数方程和对数方程，若直接运用方程的有关知识求解，则或过于繁冗或难以奏效，倘能视某未知数为自变量，引入相应函数，将方程函数化，则可借助函数性质和图像使问题迎刃而解。这种思维方法就体现了函数思想，因此有必要对函数思想进行深入的研究。

一、运用函数思想求解方程问题

例1 求证不论a取什么实数，方程$x^2-(a^2+a)x+a-2=0$必有两个不相等的实根。

析解：此题若用常规解法，求出判别式Δ是一个关于 a 的一元四次多项式，符号不宜判断。若用函数思想去分析题意，设$f(x)=x^2-(a^2+a)x+a-2=0$，要证明命题成立，只需证明 y=f（x）的图象与 x 轴有两个交点，由于它的开口向上，只要找到一个实数x_0，使得$f(x_0)<0$。故$y=f(x)$的图象与x轴有两个交点，因此命题成立。

例2（1993年高考试题）已知关于x的实系数二次方程$x^2+ax+b=0$有两个实数根α，β。证明：

（Ⅰ）如果｜α｜＜2、｜β｜＜2，那么，2｜a｜＜4＋b 且｜b｜＜4；

（Ⅱ）如果 2｜a｜＜4＋b 且｜b｜＜4，那么｜α｜＜2、｜β｜＜2。

分析：本题表面上看是方程问题，方程的根的分布与参数 a、b 满足关系，如果用纯方程理论处理则十分烦琐，如果用函数思想来分析，将方程根的分布问题转化为函数图像与 x 轴交点问题，则可抓住其本质。

略解：（Ⅰ）（Ⅱ）的综合结果就是“2｜α｜＜4＋b 且｜b｜＜4”与“α，β∈（-2，2）”等价。

由此可设 $y=f(x)=x^2+ax+b=0$，则只需作如下推理：

α、β∈（-2，2）$\begin{cases}2|a|<4+b\\|b|<4\end{cases}$。

（1）由图像可知α，β∈（-2，2）$\Rightarrow\begin{cases}f(2)>0\\f(-2)>0\\|b|=|\alpha\cdot\beta|<4\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{matrix}4+2a+b>0\\4-2a+b>0\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}2a>-(4+b)\\2a<4+b\end{cases}\Rightarrow 2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$。

（2）如果$\begin{cases}2|a|<4+b\\|b|<4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4+2a+b>0\\4-2a+b>0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}f(2)>0\\f(-2)>0\end{matrix}$则

α、β在（-2，2）之内或（-2，2）之外，若α、β在（-2，2）之外，则｜α·β｜=｜b｜>4，这与｜b｜<4矛盾，故α、β∈（-2，2）。

二、运用函数思想求解不等式问题

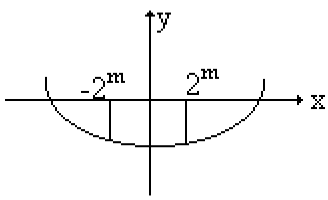
例3 $m\in R$，$-2^m\le x<0$，若不等式$x^2-6\le x\cdot 2^{m+1}$恒成立，求m的最大值。

分析：对于不等式问题，其本质仍是函数问题，用函数观点求解，使问题变得简单明了。

解：原不等式变形为$x^2-2^{m+1}\cdot x-6\le 0$，当$-2^m\le x<0$时恒成立。即函数$f(x)=x^2-2^{m+1}\cdot x-6$当$-2^m\le x<0$时，图像不在x轴上方。作其图如下，由图可知$\begin{cases}f(-2^m)\le 0\\f(0)\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}22m+22m+1-6\le 0\\-6\le 0\end{cases}$

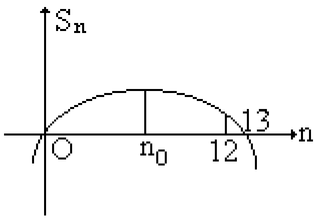
$\Rightarrow m\le\frac{1}{2}$

∴m的最大值为$\frac{1}{2}$。



三、运用函数思想解数列问题

例4（1992年高考题）设等差数列｛a_n｝的前n项和为S_n，已知$a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$，①求公差d的取值范围；②指出S_1，S_2，…，S_{12}中哪个值最大，并说明理由。



分析：由题第①问考生没有多大困难，第②问不少考生未能完成，这不仅是运算能力不过关，更主要的是不能自觉地用函数思想分析数列问题，如果能运用二次函数的图像来分析等差数列的前 n 项和，这可将繁杂的运算化为乌有。

解：①略。$-\frac{24}{7}<d<-3$。

②∵$Sn=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$且$d<0$，故得到开口向下的抛物线。

如图所示，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$ 图像必在 n=12 与 n=13 之间通过 n 轴，其对称轴 x=n。满足 $6<n_0<6.5$，故 S_6 最大。

通过上述例题分析，我们可以清楚地看到，用函数的思想研究问题，借助函数图像的直观性，给问题的解决带来了方便，运用了函数思想分析代数中的方程、不等式、数列等问题，能深刻地挖掘问题的内涵，化难为易，提高了分析问题的能力。

解题方法受一定的数学思想的支配，数学思想较之数学解题方法，则属更高层次的范畴，它对于数学能力的形成具有很强的支配地位和指导作用。然而，数学思想的教学是一个长期的潜移默化的过程，学生要在一段漫长的“三基”学习和解题实践中，经过反复理解和应用，才能逐步形成并牢固地树立起来。本来基本数学思想和方法是充满整个数学知识和学习过程的，但在总复习中，通过筛选若干典型范例，以明析的数学思想和方法为指导加以剖析，对于数学思想方法的强化，对摆脱题海的束缚都是十分有益的。

下面再举两例，以示说明。

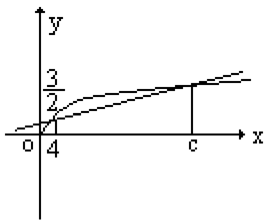
例 5　求点 P（a，b）关于直线 l：y=x+1 的对称点 Q 的坐标。

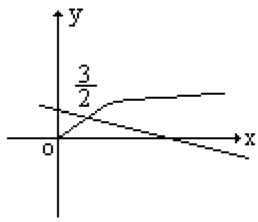
分析：依照求对称点的方法，列出关于 x_0、y_0 的方程组解之，求得 Q（b-1，a+1）。在以函数思想为指导，通过移轴运用互为反函数关系求解，则有：将 y 轴左移一个单位，则 y=x＋1 的新方程为 y'=x'，点 p（a，b）的坐标为（a＋1，b），它在新系下关于 y'=x'的对称点为 Q（b，a＋1），故 Q 的原坐标为（b-1，a+1）。这里法 2 是抓住问题的特殊性，运用函数思想，使解题变得直观而简洁。

例6　若不等式$\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$的解为$4<x<c$，则$a=$______，$c=$______。

析解：此题若从解不等式入手，似乎难以找到突破口，若用函数思想，

作函数$y_1=\sqrt{x}$和$y_2=ax+\dfrac{3}{2}$的图像，易知$a>0$。且$x=4$与$x=c$恰为二次函数图象交点的横坐标，只需将$x=4$与$x=c$分别代入方程$\sqrt{x}=ax+\dfrac{3}{2}$即得a、c值为$a=\dfrac{1}{8}$，$c=36$。





此解多么简洁明了，它为解无理不等式开辟了一条新路。

培养思维能力　开拓解题途径

——谈数学“构造法”教学

浙江省桐乡市乌镇中学　孙祥云

在会考和高考等权威性考试中，愈来愈重视对分析问题和解决问题的能力的考查，这种能力主要体现在解题的途径和解题的方法上，构造法就是培养学生的思维能力，开拓解题途径的一种方法技巧。

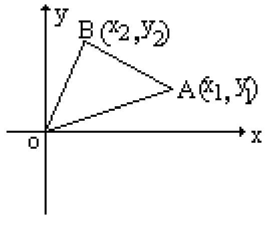
什么是构造法呢？就是在遇到常规、定向思考的解题途径不能解决时，可以改变一下思维方向，按“纵向深入，横向联系”的原则，根据题设条件寻找一个数学模型，例如合理构造一个几何模型或者函数模型等等，通过数形结合，以形辅数，正确地作出图形或图象，找到一个出奇制胜的简捷的解题途径，达到事半功倍的效果。构造法教育有利于开拓学生的思维，培养思维品质，提高分析和解决问题的能力。

一、构造法在解证不等式中的应用

1．构造几何模型法

例1 求证不等式$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geq\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_2)^2}$

分析：观察题设特征，启发学生“横向联系”。不难看出不等式的两边都是一种距离形式，左边看作原点（0，0）到点（x_1，y_1）的距离之和，右边是点（x_1，y_1）到点（x_2，y_2）的距离，由三角形两边之和不小于第三边，不难证得。



略证：在直角坐标系中：设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）

则：$|OA| = \sqrt{x_2^1 + y_2^1}$，

$|OB| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$|AB| = 2\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

∵$|OA| + |OB| \geq |AB|$

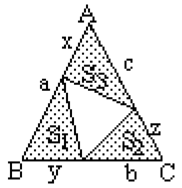
∴$\sqrt{x_2^1 + y_2^1} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

显然，当 A、B、C 三点共线且 A，B 在 O 点异侧时取“=”号。

例 2　若 a，b，c，x，y∈R^+且 a+x=b+y=c+z=k

求证：$ay + bz + cx < k^2$

分析：构造法的难点在于合理构造一个图形，要解决这个难点就要“纵向深入”分析题设结构，“横向联系”联想几何图形。本题由 a+x=b+y=c+z=k 联系三角形 AB=BC=CA=K，如图所示：略证：



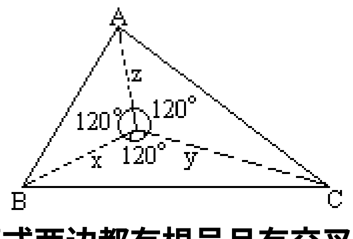
在边长为 K 的的等边三角形 ABC 中令 AB=a＋x，AB=y＋b，CA=z＋c．则$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}k^2$，$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}ay$，$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}bz$，$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

由$S_1 + S_2 + S_3 < S_{\triangle ABC}$易得：$ay + bz + cx < k^2$

小结：类似这些不等式的证明，用常规的、定向思考的方法不易证明，或能证但很繁冗，特别是一些证明不等式中含有绝对值号或根号的，可以改变一下思维方向，构造一个几何模型来解证。下面再举例先由学生思考分析，最后归纳解法。

例 3　证明不等式，若 x，y，z∈R^+，求证：

$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} > \sqrt{x^2 + zx + z^2}$。



分析：纵向观察不等式两边都有根号且有交叉项。横向联系到①三角形两边之和大于第三边，②斜三角形中余弦定理中的距离公式，且夹解为 120°，不妨构造如图三角形 ABC

略证：在△ABC 中，由余弦定理可知：

$|BC|=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cdot\cos120°}=\sqrt{x^2+xy+y^2}$

同理可得：$|AC|=\sqrt{y^2+yz+z^2}$，$|AB|=\sqrt{x^2+xz+z^2}$

∵$|BC|+|AC|>|AB|$，∴$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}>\sqrt{x^2+xz+z^2}$

通过以上的例与练的分析，启发了学生的思维活动，培养了分析问题的能力，开拓了一条出奇制胜的巧证不等式的解题途径。

2．构造函数模型法

有些不等式的证明，除了构造几何模型外，也可以构造函数模型，利用函数的性质（如单调性，奇偶性等）来解证，往往要比常规的方法容易找到证题途径，下面看一个例题：

例 4　设 a，b，c∈R$^+$，且 a＋b＞c．

求证：$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{c}{1+c}$

在课堂上可先让学生用常规方法思考试证后启发学生用构造函数法来证，最后比较证法。

分析：不等式左右两边，结构相似$\frac{a}{1+a}$，$\frac{b}{1+b}$，$\frac{c}{1+c}$，联想到函数f（x）＝（x∈R$^+$），先证单调性。

任取x_1，x_2∈R^+，不妨设$x_1<x_2$，则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}<0$

∴f（x）在 x∈R$^+$上单调递增。

∵a+b＞c（已知）∴f（a+b）＞f（c），

即$\frac{a+b}{a+b+1}>\frac{c}{1+c}$，

∵$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}=\frac{a+b}{1+a+b}$

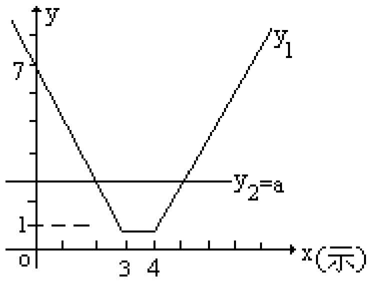
∴$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{c}{1+c}$。

利用构造法也可解关于 x 的不等式

例 5　已知关于 x 的不等式｜x-4｜＋｜x-3｜＜a 的解集为非空集合,求实数 a 的取值范围。

对于讨论这类含参数的不等式，先让学生按常规方法解：用数轴法，分别在三个区间内讨论解集为非空集合时 a 的取值范围，然后求它的交集得 a＜1。

后来又启发学生用构造函数方法来解，学生们思考很积极，有一个学生解道：



构造函数$y_1=|x-4|+|x-3|$，$y_2=a$。

则$y1=\begin{cases}7-2x（x\leq 3）\\ 1（3<x\leq 4）\\ 2x-7（x>4）\end{cases}$

作出分段函数的图象（如图所示）

不难看到要使原不等式的解集为非空集合时，只须$y_2>1$，即$a>1$。

类似解不等式：（1）$1<|x^2+2x-1|<3$

（2）$|k|\leq 3$，解不等式$k（x^2-2）<2x-1$。

二、利用构造法解或讨论关于 x 的方程

1．构造函数模型解某些用和等方法不能解的方程。

例6 解关于x的方程$\ln（x+\sqrt{x^2+1}）+\ln（2x+\sqrt{4x^2+1}）=3x$。

简析：对此超越方程，用常规解法，似乎束手无策，图象法解也只能判断方程解的个数或近似根，可以不妨构造函数模型来考虑。

解：令函数$f（x）=\ln（x+\sqrt{x^2+1}）-x（x\in R）$，

则原方程可化为：f（x）＋f（2x）=0，即 f（x）=-f（2x）

不难证明 f（x）在 x∈R 上是一个单调奇函数∴f（x）＝-f（2x）

又∵函数 f（x）在 x∈R 上是一个一一映射。

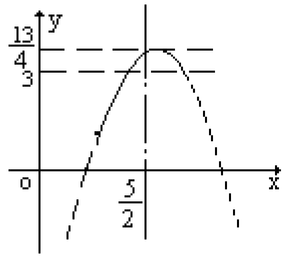
∴原方程等价于 x=-2x ∴x=0

2．构造函数法还可以用来讨论关于 x 的方程根的情况。

例 7 若 K∈R，当 K 取舍值时，关于 x 的方程 lg（x-1）＋lg（3-x）=lg（K-x）恰有两实根、一个实根或无实根？

分析：原方程可化为：$-x^2+5x-3=K（1<x<3，x<k）$，方程的实根就是函数在定义域内两曲线的交点的个数。

略解：令$y_1=-x^2+5x-3=-（x-\frac{5}{2}）^2+\frac{13}{4}（1<x<3）$ $y_2=K$，（K>x），如图不难看出：



（1）当$K=\frac{13}{4}$或$1<K\leq 3$时恰有一个实根；

（2）当$3<K<\frac{13}{4}$时原方程恰有两个实根；

（3）当$K<\frac{13}{4}$或$K\leq 1$时方程无实根。

三、利用构造函数模型进行分类讨论

对于分类讨论的问题，要做到不重不漏、逐类讨论、分层讨论，关键在于根据某些标准正确分类，合理分类。构造函数法，通过图像、数形结合，直观地可以看出，不难找到分类的标准。

例8 当$m\in R$时，讨论方程$\sqrt{1-x^2}=x+m$解的个数及相应实数m的取值范围。

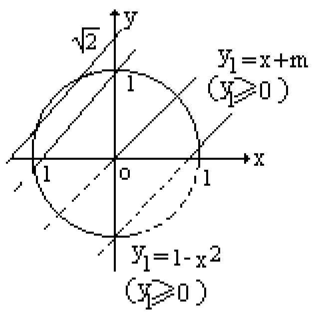
简析：开始让学生用常规方法，很多学生这样解：

将方程两边平方并整理得：$2x^2+2mx+m^2-1=0$（※）

由$\Delta=-4m^2+8$得：（1）当$\Delta>0$时即$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$，方程有两个解；

（2）当$\Delta=0$即$m=\pm\sqrt{2}$时方程只有一个解；

（3）当$\Delta<0$即$m>\sqrt{2}$或$m<-\sqrt{2}$时方程无解。



解完后向学生提出两个问题：

①参数 m 的分类是否正确？

②当$m=-\sqrt{2}$时代入（※）式中，可得x值方程是否有一个解？

学生们运算思考后，发现分类不正确，$m=-\sqrt{2}$使原方程无意义。

最后启发学生利用构造函数法来分类讨论得：

令$y_1=\sqrt{1-x^2}$（$y_1\geq 0$），$y_2=x+m$（$y_2\geq 0$）作出y_1，y_2图像（如图）不难看出：

（1）当$1\leq m<\sqrt{2}$时，方程有两个根；

（2）当$m=\sqrt{2}$或$-1\leq m<1$，时方程有一个根；

（3）当$m<-1$或$m>\sqrt{2}$时，原方程无实根。

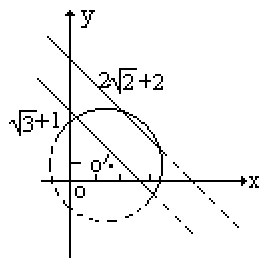
再让同学们对错误辨析，看到构造法解题途径简单明了，而且又直观，确实是一种解题的好途径。

四、利用构造函数求某些条件的最值

例9 已知$m\geq 1$，$n\geq 1$，且满足$\log_a^2 m+\log_a^2 n=\log_a(am^2)+\log_a(an^2)$（$a>1$）求$\log_a(m\cdot n)$的最值

简析：首先换元令$x=\log_a m$，$y=\log_a n$

$\because a>1$，$m\geq 1$，$n\geq 1$，$\therefore x$，$y\geq 0$，由题设得$(x-1)^2+(y-1)^2=4$（x，$y\geq 0$）



设$\lambda=\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$则构造一次函数$y=-x+\lambda$

即求直线$y=-x+\lambda$与曲线$(x-1)^2+(y-1)^2=4$有公共点时的λ的最值，作$y=-x+\lambda$与$(x-1)^2+(y-1)^2=4$的图像

不难看出：（1）当直线和圆相切时λ最大，易计算

$\lambda_{max}=2\sqrt{2}+2$

（2）$\because x$，$y\geq 0$，$\therefore$当圆与y轴相交时直线过点$(0,\sqrt{3}+1)$时λ最小，$\therefore \lambda_{min}=\sqrt{3}+1$

通过以上对构造法典型例题的分析，可以看出，构造法确实是一种解题的好途径，当定向思考常规方法解题繁冗时，本着“纵向深入，横向联系”的原则合理构造数学模型，利用图形或图象，通过数形结合，以形辅数，简单明了，直观地解证有关问题，启发了学生的思维，开拓了解题的途径，同时也提高了学生分析与解决问题能力，起到了出奇制胜，事半功倍的效果。

创设思维情境　重视过程教学

山东省乳山市夏镇黄岭初级中学

王秀妮　尹龙山

《九年制义务教育全日制初级教学大纲》中指出：“数学教学不仅要给学生数学知识，而且还要揭示获取知识的思维过程，后者对发展能力更为重要。数学教学要立足于把学生的思维活动展开，辅之以必要的讨论和总结，

并加以正确引导。”新大纲的这段精辟论述，不仅点明了揭示思维过程的重要作用，而且也指出了开展学生思维活动的一些基本要求。但是，以前我们的教学一直停留在知识的灌输和记忆上，不注意知识的发生、发展及应用过程的揭示，不善于将这些过程中丰富的思维方法讲授出来。为了改变这种状况，几年来，我们在学习新大纲的基础上，对此进行了一些探讨，基本做法是：创设思维情境，重视过程教学。

一、创设思维情境，重视概念的建立过程

在数学概念教学的过程中，往往容易发生下列两种现象：一是对学生较易理解的概念，教师一提而过；二是概念本身较抽象，教师讲得口干舌燥，但学生不得要领，只好死记硬背定义。这两种现象的弊端都是以教师的思维替代了学生的思维，使学生不能在一定的思维情境中受到必要的思维能力训练。实际上，从形式逻辑的观点看，思维表现为三种基本形式：概念、判断、推理，而数学概念则是人脑对现实对象的数量关系和空间关系的本质特征的一种反映形式，是一种思维形式，是构成定理、法则、公式的基础。因此数学概念的建立过程，应该是引导学生从特殊到一般，从具体到抽象的思维训练过程。在教学实践中，我们经常采用以下二种方法：

1．从学生实际生活经验中创设思维情境。

概念的引入，必须符合学生的认识规律，虽然初中生的抽象逻辑思维能力在日益增强，但他们思考问题时，仍需要感性材料的支持。因此，引入概念尽量做到从生活实际、实物模型出发，让学生感知数学知识与现实世界的密切联系，以增强学习兴趣与信心。例如“数轴”这一概念的接受，对刚刚步入中学的学生来说有一定的困难。教学时我们举出了“温度计”这一实例，从而引入“数轴”的定义，学生既容易掌握且能很快记住其定义。

再如，在讲点的轨迹定义时，为创设一个思维情境，让学生深刻理解好此概念，首先提出如下几个问题让学生思考。

1．把粉笔头看成一个点，让它在黑板上随意乱动，它能形成一个符合某一条件的图形吗？

2．假若把粉笔固定在圆规上，使圆规的一端固定在点 0 的位置上，让带粉笔的一端绕点 0 保持一定的距离转动，它能作出符合某一条件的图形吗？

3．上述二问中所形成的图形有什么不同点和相同点？

4．请举出几个实际生活中见到的例子：点移动后留下痕迹并且有合乎条件的图形，以及有不合乎条件的图形。

学生思考后，进行必要的讨论和交流，同时教师引导学生把所举的事例进行分类，说明点移动形成图形总有两大类。其一是乱动有迹无轨；其二是按一定条件而动有迹有轨。

在此基础上，教师再进行点拔指导：一定条件译成数学术语就是“具有

相同性质”，有迹有轨即“轨迹”，所有点组成的图形可以说成“点的集合”。至此，教师就可以让学生给出点的轨迹定义。最后教师进行矫正指导，总结定义的内容。

2．从课本提供的感性材料创设思维情境。

很多数学概念在建立的时候，课本都提供了很多感性材料。我们在教学过程中就尽量从这些材料中创设思维情境，使学生加深理解，从而进一步掌握概念的内涵。

例如：在学习正数和负数的概念时，课本上给出了这样几个问题：

A、仓库里运进钢材 15 吨和运出钢材 15 吨。

B、出校门向北走 4000 米和向南走 6000 米。

C、天安门东边 3000 米处和西边 2000 米处。

针对这些问题，我们在教学时先提出下面的问题让学生思考：

1．课本上三个事例中各几个量？

2．各事例中的量具有怎样的关系？

3．为了区别这样的量，用我们已学过的数来表示行吗？

在学生讨论的基础上，教师进一步指导点拨，引出正数和负数的定义，学生很易接受。

再如：在学习三角函数定义时，课本给出了在山坡修扬水站铺设管道的事例。为了使学生对三角函数定义加深理解，教学时，我们提出这样问题让学生思考研究：

1．在课本例子中，山坡倾斜角α是否为一个确定的值？

2．当倾斜角确定时，铺设的管道长与管口竖直高度之比是否唯一确定？依据是什么？

3．当山坡倾角变化时，上面所提到的比是否变化？

在学生热烈讨论的基础上，教师点拨指导：上例中，管道长，管口的水平距离、管口的竖直高度所组成的比与倾斜角α都具有函数关系，这些比都是角α的函数。

至此教师再提出三角函数的定义，学生就很易接受。

二、创设思维情境，重视公式、定理的推导过程

心理学研究成果表明：青少年都有一种要求尝试和显示自己才能的渴望。为此，我们在公式、定理、法则的教学过程中，更新教学观念，改变了以往那种“给出定理（公式）——证明定理（公式）——讲解要点——巩固定理（公式）”的教学模式，而采用引导学生探索、发现的启发式教学模式，创设思维情境，给学生动脑、动手、动口的机会，让学生在经历知识“再发现”的过程中，品尝到获取知识的乐趣，获得成功的喜悦，并受到应有的思维能力训练。在这方面，我们是这样做的：

1．从以旧迎新中，创设思维情境。

在数学教学中，如果能将已有的知识体系上升到一个新的高度，由旧知识引出新内容，则能使学生很自然地将新旧知识融为一体，起到分散难点，以旧引新的功效。

例如，在学习射影定理的过程中，常用的教学方法则是提出射影定理的内容后，教师进行推理证明，然后讲解应用。我们在进行本节教学时，采用下面的做法，收到了较好的效果。

首先，让学生观察：在 Rt△ABC 中，若 CD 为斜边上的高，则图形中有几组相似三角形？并写出有关的比例式。

然后，结合比例中项的概念，让学生说明上面得到的比例式的含义，用文字语言加以叙述。

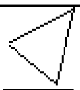
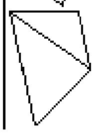
最后，教师讲述射影定义，并且让学生将上面得到的比例式译成文字语言，即为射影定理。到此，射影定理的推理证明，已由学生在三角形相似等旧知识的基础上得到了学习。

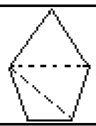
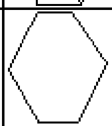
2．从不完全归纳中创设思维情境。

任何一个新知识的学习都是通过观察、分析、概括、归纳，准确地把握基本属性的。

例如，在学习凸多边形对角线条数和内角和公式的推导过程中，我们是这样创设思维情境的。

第一步让学生填写下表：

多边形边数	图形	从一顶点所引对角线条数	所分成的三角形个数	多边的内角和
3		0	1	180°×1
4		1	2	180°×2

多边形边数	图形	从一顶点所引对角线条数	所分成的三角形个数	多边的内角和
5		2	3	180°×3
6		3	4	180°×4
……		……	……	……

第二步，引导学生观察上表，归纳表中各数量间的关系，让学生大胆提出猜想。

第三步，讨论猜想的依据，重点放在如何转化方面，让学生用数学归纳法证明“猜想”正确。

在定理、公式、法则的推导过程中，采用这种方法，有助于提高学生的学习兴趣，发展学生的思维能力。

3．从类比中创设思维情境。

知识的系统阶段一般在单元小结、复习阶段完成。每结束一个单元或几个单元的教学都应进行知识归类与分类。根据它们之间的逻辑关系用一定图式组成一定序列的知识体系，把学生感知“孤立”、“散装”的知识纳入相应的教学知识体系中去，对一些邻近或联系密切的知识可用类比方法，引导学生概括出它们之间的异同，让学生获得一个条理清晰的知识网络。如在初三代数复习时，我们把函数、方程、不等式归为一类复习。具体分以下三个阶段进行：

首先，通过引导学生对函数因变量的讨论来发现三者之间的内在联系，揭示出这三者是以函数为核心同一个大家庭的成员，使学生对它们有一个整体认识。如函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$），当$y>0$或$y<0$时，函数式则为不等式。

第二，进行各自的纵向分类。如进行函数分类时，我们引导学生以二次函数为中心进行讨论：

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\text{当}a=0\text{时，}b\neq0\text{时则为一次函数}y=bx+c\\ \text{当}a=0\text{，}c=0\text{，}b\neq0\text{时，则为正比例函数，}y=bx\text{。}\end{cases}$$

第三，进行三者之间的横向归类。如把二次函数、一元二次不等式、一元二次方程归为一类讨论，揭示它们同属于一个概念体系，以二次函数的图像为核心，概括二次函数、一元二次不等式、一元二次方程在性质上、逻辑上及运算上密切联系。再如复习方程性质时可与等式性质进行类比，复习分式性质时与分数性质相类比。

类似的引导与训练，可培养学生逻辑思维能力及知识迁移能力，使学生对所学知识的理解进一步深化。

实践证明，创设思维情境，重视过程教学，能建立和谐的教学氛围，使教学内容触及学生的情绪和意志领域，让学生把学习活动变成自己精神的需要，从而优化课堂教学过程，提高教学效率。当然，思维情境的创设受制于各种因素，如教师的业务素质和各种基本功等。这就需要我们进行长期不懈的积累和探索。

浅谈数学变式训练
培养学生的思维能力

山东省胶州市西湖中学　刘鑫　刘华

数学教学的各个环节，都应把培养和发展学生的思维能力作为主要的目标。在复习课教学的过程中，应避免简单的重复和机械的训练，而要教给学生解题的方法。变式训练是发展学生的思维能力，提高教学质量的有效方法之一。

一、变图式训练

数学中的有些内容，可以借助图形变化来反映事物的空间形状及位置关系，引导学生去思索、去探讨。

例 1：　初二几何 P_{193}20 题：从平行四边形 ABCD 的顶点 A、B、C、D 向形外的任意直线 MN 引垂线 AA'、BB'、CC'、DD'，垂足分别为 A'、B'、C'、D'。求证 AA'＋CC'=BB'＋DD'。（如图 1）

变式：1．把直线 MN 向上平移且过点 A，求证：CC'=BB'＋DD'（如图 2）

2．把直线 MN 向上平移与平行四边形邻边相交。求证：CC'-AA'=BB'＋DD'．（如图 3）

3．把直线 MN 向上平移且过 O 点，求证：AA'－CC'=DD'-BB'．（如图 4）

4．把直线 MN 向上平移且过 D 点，求证：AA'-CC'=BB'（如图 5）

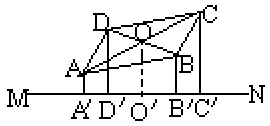


图1

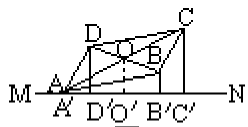


图2

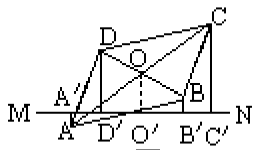


图3

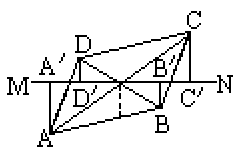


图4

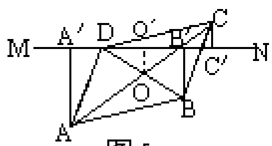


图5

例 2：　如图，已知 AC⊥AB，BD⊥AB，AD 和 BC 相交于点 E，$EF\perp AB$于F，又$AC=p$，$BD=q$，$EF=r$，$AF=m$，求证$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$。

证明：设 FB=n。

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}AC\perp AB\\EF\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow EF\parallel AC\Rightarrow\frac{r}{q}+\frac{n}{n+m}\\\left.\begin{matrix}DB\perp AB\\EF\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow EF\parallel DB\Rightarrow\frac{r}{q}=\frac{n}{n+m}\end{matrix}\right\}\frac{r}{p}+\frac{r}{q}=\frac{n}{n+m}+\frac{m}{n+m}=1\Rightarrow\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}。$$

可利用上述结论证下列各题。

变式 1．把垂直改为平行，求证原结论仍成立。（图 2）

2．AE 是∠A 的平分线，求证原结论仍成立。（图 2）

3．梯形 ABCD，AD∥BC，过对角线的交点 E 引 FG∥AD 交 AB、CD于F、G，求证$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{FG}$。（图3）

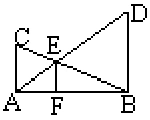


图1

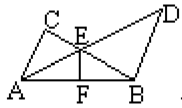


图2

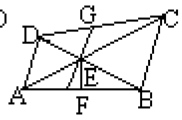
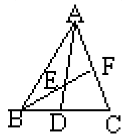


图3

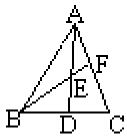
二、逆反变式训练（即条件、结论互变式）

数学复习过程中可以把一部分内容的条件、结论互相交换，以此揭示这部分事物的内在联系，认识概念之间的各种关系，不仅有助于对概念加深理解，更有助于运用概念进行推理判断。

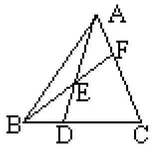
例如，在复习比例线段时，初二几何教材 P_{193}18 题已知 AD 是三角形 ABC 的中线，E 是 AD 的中点，F 是 BE 的延长线与 AC 的交点，求证：AF：FC=1：2。此题可进行如下的变式：（如下图）



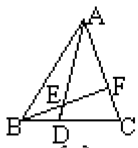
(原)



(2)



(2)



(3)

1．E 点在 AD 上，且 AE：ED=1：3，求证：AF：FC= 1：4.

2．D 点在 BC 上，且 BD：DC=1：3，求证：AF：FC=1：3。

3．E、D 点分别在 AD 和 BC，且分别满足（1）、（2）中的条件，求证：AF：FC=1：6.

把上面各题进行逆反变式，结论当条件，条件当结论，各命题仍成立。

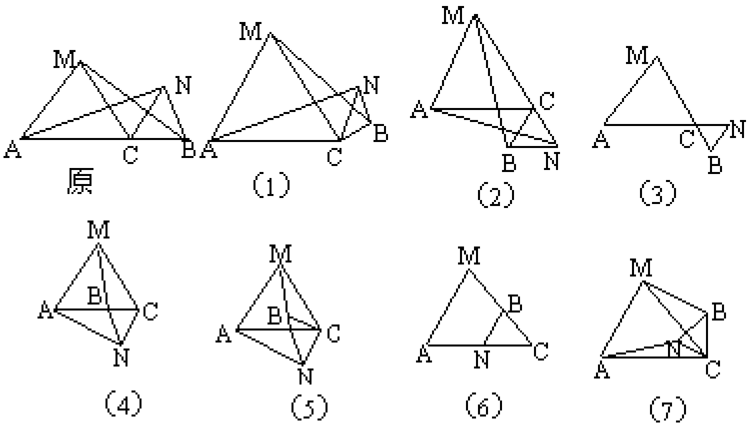
由上面的互逆训练得出，证明线段成比例和求线段的比，辅助线的一般作法是通过“分点”作平行线建立桥梁（中间量），由平行证得线段成比例，由线段成比例证得平行。

三、综合变式训练

在数学复习过程中利用综合变式训练可以把所学知识有机的结合起来，培养学生的分析综合、抽象概括、推理论证的能力。

例如　初二教材 P_{115}13 已知点 C 为线段 AB 上一点，△ACM、△CBN 是等边三角形，求证 AN=BM．在常规分析后提出：如果让三角形 ACM 绕 C 点任意旋转可得几种情况？结论如何？通过学生动手画，互相讨论、研究、证明，结果得到七种情况，结论都一样。使学生感到异常的兴奋，提高了学生的想象能力和思维能力。

1．图形变换如下



2．条件变式

（1）若△ACM、△CBN 为顶角相等的等腰三角形（图（1）），结论如何？（成立）

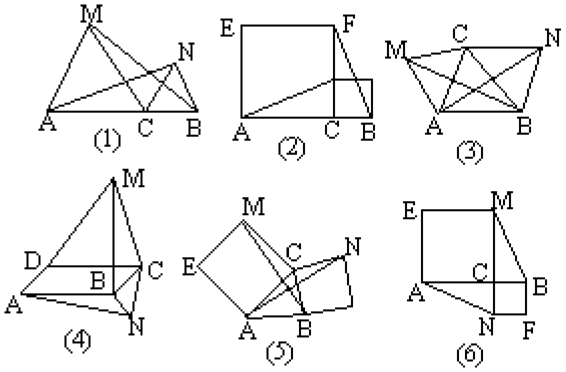
（2）若△ACM、△CBN 都换成以 C 为公共顶点的两个正方形，（图（2）），结论如何？（成立）

（3）若把线段 ACB 换成三角形（图（3）），结论如何？（成立）

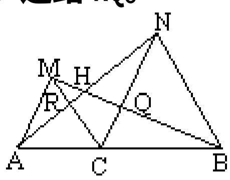
（4）若把三角形换成▱ACBD，以 BC、CD 为边向外（或向内）作等边三角形（图（4）），△AMN 是什么三角形？（可证△AMN 是等边三角形）。

（5）以△ABC 的 BC、AC 为边向外作正方形（图（5）），结论如何？（仍成立并且有 AN⊥BM）。

（6）在线段 AB 异侧做正方形（图（6）），结论如何？（仍成立）



3．推广（原命题）如图，连结 RQ。



（1）求证：∠MCN=60°；

（2）求证：CR=CQ．RN=BQ．AR=MQ；

（3）求证：RQ∥AB；

（4）H、C、B、N 四点共圆且 MC 为其切线，H、C、M、A 四点共圆且 NC 为其切线。

总之，在数学复习过程中可以根据不同情况采取变条件、变结论、变形式、变图式等方法，使学生对所学的知识进行分析、综合、归纳、整理，使之系统化、深刻化，掌握各部分知识之间的内在联系，提高自己的思维能力。

从一道高考题谈培养学生的综合能力

贵州省开阳县职业高级中学　张廷均

1995年全国高考数学试题理工科第（22）题是：求$\sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20° \cos 50°$，这是一道三角题函数的和差化积和积化和差的综合求值题，它在现行高中必修教材中有明显的背景，是由代数教材上册第 193 页例 4，“求$\sin^2 10° + \cos^2 40° + \sin 10° \cos 40°$的值”改变角度而得到的。这类问题不仅是高考的热点问题，而且也是数学竞赛中的热点问题。近年来的高考题和数学竞赛题中也有它的影子，例如：

求$\cos^2 73° + \cos^2 47° + \cos 47° \cos 73°$的值（1987年江苏青少年数学夏令营）

求$\cos^2 10° + \cos^2 50° - \sin 40° \sin 80°$（1991年全国高中数学联赛题二（1））

求$\sin^2 20° + \cos^2 80° + \sqrt{3} \sin 20° \cos 80°$（1992年全国高考数学文科第 24 题）

这些题形式都一样，只是将其中的某些数据改变一两个或者变成余函数得到的，这充分说明在高考和竞赛中对三角函数的和差化积与积化和差的这类问题有较高要求，属于重要知识点。现就 1995 年的那道题为例谈谈学生综合能力的培养。

分析一：从题设先考虑降幂，后利用和积互化，即可产生特殊角的三角函数值或正负相消的项。

解法一：原式 $= \frac{1}{2}(1-\cos 40°) + \frac{1}{2}(1+\cos 100°) + \frac{1}{2}(\sin 70° - \sin 30°)$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\cos 100° - \cos 40° + \sin 70°)$$

$$= \frac{3}{4}$$

分析二：考虑平方关系，将其转化成平方差公式进行因式分解，最后和积互化可得。

解法二：原式 $=1-\cos^2 20°+\cos^2 50°+\sin^2 20°\cos^2 50°$

$=1+(\cos^2 50°+\cos^2 20°)(\cos^2 50°-\cos^2 20°)$

$+\sin 20°\cos 50°$

$=1+2\cos 35°\cos 15°(1-2\sin 35°\sin 15°)$

$=1-4\sin 35°\cos 35°\sin 15°\cos 15°+\frac{1}{2}\sin 70°-\frac{1}{4}$

$=1-\sin 70°\sin 30°+\frac{1}{2}\sin 70°-\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$

分析三：为了消去二次幂，利用平方关系配对（即构对偶式）

解法三：设 $a=\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°$

$b=\cos^2 20°+\sin^2 50°+\cos 20°\sin 50°$

$\therefore a+b=2+\sin 70°$，$a-b=-\sin 70°-\frac{1}{2}$

$\therefore 2a=2-\frac{1}{2}$ **即** $a=\frac{3}{4}$

分析四：由题设自然会联想将其配方，再进行化简。

解法四：原式 $=(\sin 20°+\cos 50°)^2-\cos 20°\cos 50°$

$=(\sin 20°+\sin 40°)^2-\frac{1}{2}(\sin 70°-\sin 30°)$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 20°)-\frac{1}{2}\sin 70°+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 70°-\frac{1}{2}\sin 70°+\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$

分析五：用提取公因式的方法，进行变换。

解法五：原式 $=\sin 20°(\sin 20°+\cos 50°)+\cos^2 50°$

$=\sin 20°(\sin 20°+\sin 40°)+\frac{1+\cos 100°}{2}$

$=2\sin 20°\sin 30°\cos 10°+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 10°$

$=\frac{1}{2}(\sin 30°+\sin 10°)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 10°$

$=\frac{3}{4}$

分析六：利用二元代换法，即

解法六：a＋b=sin20°，a-b=cos50°，则

$a=\frac{1}{2}$ （$\sin 20°+\cos 50°$） $=\frac{1}{2}\cos 10°$

$b=\frac{1}{2}$ （$\sin 20°-\cos 50°$） $=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°$

原式$=$ （$a+b$）^{2} $+$ （$a-b$）^{2}$+$ （$a-b$） （$a-b$）

$=3a^2+b^2=\frac{3}{4}$

分析七：认真分析题设，不难发现，原式$a^3-b^3=$ （$a-$ **b**） （a^2+b^2+ab）**中**（a^2+b^2+ab）**是如此的相似，因此得下面的解法**

解法七：原式$=\frac{\sin^3 20°-\cos^3 50°}{\sin 20°-\cos 50°}$**，再联想到正余弦的三倍角公式：**

$\sin^3 20°-\cos^3 50°=\frac{1}{4}$ （$3\sin 30°-\sin 60°$）

$-\frac{1}{4}$ （$3\cos 50°-\cos 30°$）

$=\frac{3}{4}$ （$\sin 20°-\cos 50°$） $-\frac{1}{4}$ （$\sin 60°-\cos 30°$）

$=\frac{3}{4}$ （$\sin 20°-\cos 50°$）

故原式$=\frac{3}{4}$

分析八：利用三角恒等式$\sin$（$\alpha+\beta$） $\sin$（$\alpha-\beta$） $=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$**，可得**

解法八：原式$=1+$ （$\sin^2 20°-\sin^2 50°$） $+\sin 20°\cos 50°$

$=1+\sin 70°\sin$（$-30°$） $+\frac{1}{2}$ （$\sin 70°-\sin 30°$）

$=1-\frac{1}{2}\sin 70°+\frac{1}{2}\sin 70°-\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$

分析九：由题设特征，即两项平方和，两项积，因此形式类似于余弦定理，故考虑正、余弦定理合用

解法九，特将原式化为：

$\sin^2 20°+\sin^2 40°-2\sin 20°\sin 40°\cos 120°$**，可构造三角形**ABC**，使∠A=20°，∠B=40°，∠C=120°，则由正、余弦定理得**

原式$=\sin^2 20°+\sin^2 40°-2\sin 20°\sin 40°\cos 120°$

$=\frac{1}{4R^2}$ （$a^2+b^2-2abcoxC$）

$=\frac{c^2}{4R^2}=\sin^2 C=\frac{3}{4}$

分析十，由分析八知，能用余弦定理解答本题，自然联想到，能对它进行几何解释，所以可以考虑构造符合条件的三角形进行解答。

解法十，如图 1，以 AB=1 为直径作图，并作∠CAB=20°，∠DAB=40°，连结 BC、BD 和 CD，易知∠CAD=60°，∠CBD＝120°，BC=sin20°，BD＝sin40°。

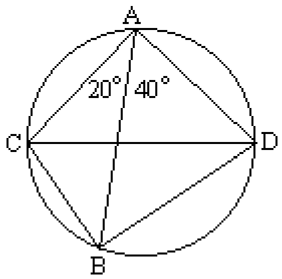


图1

对三角形 BCD，由余弦定理，得

$$
\begin{aligned}
CD^2 &= \sin^2 20° + \sin^2 40° - 2\sin^2 20° \sin 40° \cos^2 120° \\
&= \sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20° \cos 50° \\
&= \text{原式}
\end{aligned}
$$

但对$\triangle ACD$用余弦定理，则有$CD^2 = \sin^2 60° = \frac{3}{4}$，故原式 $= \frac{3}{4}$

分析十一，根据分析九，能用正弦定理解的问题，也可用三角形面积，故可构造三角形。

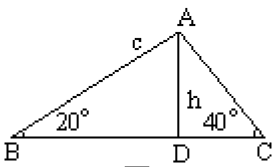


图2

解法十一：

作△ABC，使∠B=20°，∠C=40°，记 BC=a，AC=b，AB=c，高 AD=h△ABC 的面积为 S，由三角形的面积公式有

$S = \frac{1}{2}bc\sin\angle BAC = \frac{1}{2}bc\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$。又由余弦定理有

$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos 120° = b^2 + c^2 + bc$

$$
\begin{aligned}
\text{故原式} &= \frac{h^2}{c^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2}{bc} = \frac{h^2}{b^2c^2}(b^2 + c^2 + bc) \\
&= \frac{h^2a^2}{b^2c^2} = \frac{(2S)^2}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)^2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

以上解法三至八虽然不如解法二自然，但对于巩固知识，活用过去所学的知识都不失为一种好方法，有的解法均比解法一简捷，且方法灵活，构思巧妙；解法九至十一，用几何方法解决三角函数的求值问题，突破常规，富有创造性。

奇怪的是，上述课本例题、高考题、竞赛题的答案都是$\frac{3}{4}$，这是为什么呢？不难发现它们的正弦和余弦角度之差都是 30°，能否将此类问题写成一般形式呢？即对任意角α，求，$\sin^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，其答案也是$\frac{3}{4}$呢？不妨解之。

$$原式=\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=1+\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos2\alpha\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(-2)\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$

因此，对任意角α有：$\sin^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$

根据α的任意性，可构造一系列的类似题目来。

从以上高考题的解法分析中，我们体会到对同一问题，若能从不同的角度去观察、思考、分析，得出的解法也不一样，特别是高考前的复习课，采用多种方法对一问题进行研究、推广，可以把一些零碎的知识有机结合起来，达到复习巩固的目的，同时也培养了学生分析问题，综合运用知识的能力以及发散思维的能力。

平面几何教学中发散思维能力的培养

辽宁省建昌县第一初级中学　王锦光　穆海齐

数学在思维科学中具有极其特殊的重要地位，中学数学教学几乎无时无刻都在引导学生进行思维能力训练。发散思维在创造思维中占主导地位，它是为了达到某种目的而设想出全部或相当多的可能性，以供选择的思维过程。我在几年的初三几何复习中尝试对学生进行了发散思维能力的培养，使学生不断受到思维方法的具体熏陶、感应和体验，优化了学生的思维品质，取得了较好的成效。

一、引导学生对问题的条件进行发散思维

在复习直角三角形中的射影定理时，可以引导学生进行归纳总结，在直角三角形中只要出现斜边上的高时，图 1 中一共有六条线段，而这六条线段中，只要任意给出两条线段的长（允许值范围内）就能求出其余四条线段的长。

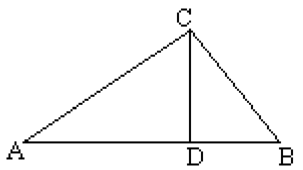


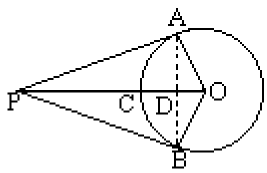
图1

例 1：在 Rt△ABC 中，∠ACB=Rt∠，CD⊥AB 于 D，在图 1 中共有六条线段 AB、AC、BC、CD、AD、BD，如果要求 AC 的长，只需给出任意两边的长（在允许值范围内）即可，此时教师可引导学生根据结论配备条件，通过学生自编题目，不但弄清了射影定理的应用，而且能激发学生的学习积极性。

又如在复习圆中的垂径定理的应用时，引导学生归纳定理及推论的实质是：一条直线与弦、弧、圆心之间的关系。这种关系可分为：直线通过圆心；直线垂直于弦；直线平分弦（非直径）；直线平分弦所对的劣弧；直线平分弦所对的优弧。在这五种关系中，只要任意两条作为题设，则其余三条就是结论。学生也可自编题目，这样就可全面理解和掌握“ 垂径定理 ”及其推论。

二、引导学生对问题的结论进行发散思维

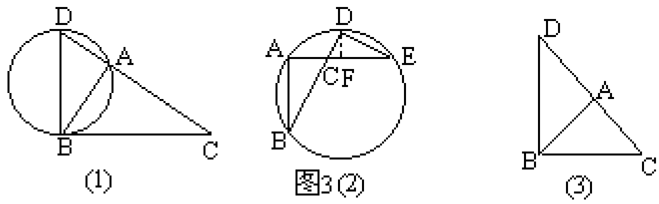
在进行切线长定理的复习时，可让学生根据图形对切线长定理的结论进行发散思考。



例 2：　如图 2，PA、PB 为圆 O 的两条切线，A、B 为切点，则由切线长定理知道，PA=PB，∠APO∠BPO．除了这个结论外还有没有其它的结论？利用以前学过的知识尽可能多地得到新结论。如连结 OA、OB，可得到 DA⊥PA，OB⊥PB，∠AOP=∠BOP，且有 P、A、O、B 四点共圆，利用圆是轴对称图形，可得 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$；又如连结 AB，则 PO 为 AB 的垂直平分线，且有∠OAB=∠OBA=∠APO=∠BPO；再考虑到 AD 为 Rt△OAP 斜边上的高，还可应用射影定理进行有关的线段计算，这样结论就更多了。总之，这种发散是在确定了已知条件后，由学生尽可能多地确定未知元素，寻找图形的内在规律，充分揭示了思维的深度和广度。

三、引导学生对“数与形”统一进行发散思维

数与形是和谐的、统一的整体，对于给出一定结构的代数式结构的几何题，通过变换代数式的结构，可构造一定的几何图形与之对应，常能克服思维定势的消极因素，启迪解题思路。

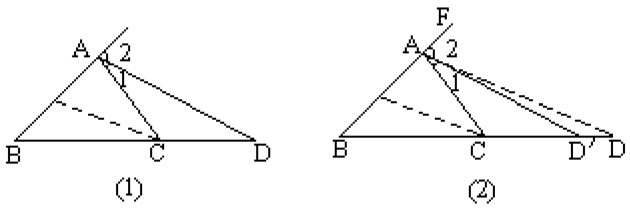


例3： △ABC的∠A、∠B、∠C的对边分别为a、b、c，且$a^2 = b^2 + bc$
求证：$\angle A = 2\angle B$。思路一：$a^2 = b^2 + bc$ ⇔ 切割线定理 ⇔ 构造一个以CB为圆的切线长，以CA和CA＋AB图的两段割线的长 ⇔ 辅助线：延长CD至D，使AD＝AB，过A、B、D三点作圆（图1（1））。思路二：$a \cdot a = b(b+c)$ ⇔ 相交弦定理 ⇔ 构造一个含长为a＋a和b＋（b＋c）的二弦的圆 ⇔ 辅助线：延长 BC 至 D，使 CD=BC，过 A、B、D 三点作圆（图 1（2））。
思路三：变形$a : b = (b+c) : a$ ⇔ 相似三角形 ⇔ 以边BC，夹角C为基础构造三角形与△ABC相似 ⇔ 辅助线：延长CA至D，使AD＝AB，连结BD（图 3（3））。

四、引导学生对问题的解法进行发散思维（一题多解）

选取多种解题方法，以培养学生扩散思维能力和学习兴趣。

例 4： 已知△ABC 中，AD 是∠A 的外角平分线，交 BC 的延长线于点D，求证：$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$



证法一：过C作CE∥AE交AB于E，（图4（1））$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$

又∵∠1=∠ACE，∠2=∠AEC，∠1=∠2∴∠ACE=∠AEC

∴AE＝AC＼∴$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

证法二：在BC的延长线上取一点D'，使$\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC}$…①

过 C 作 CE∥AD'交 AB 于 E（图 4（2））。

$$\begin{cases} \dfrac{BD'}{C'D'} = \dfrac{AB}{AE} \cdots ② \\ \angle AEC = \angle D'AF \\ \angle AEC = \angle CAD' \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{由①、②得} AC = AE \\ \therefore \angle AEC = \angle ACE，\ \therefore \angle D'AF = \angle CAD' \\ AD\text{是}\angle A\text{的外角平分线} \Rightarrow \angle DAF = \angle CAD' \end{array}\right\} \Rightarrow AD'\text{与}AD\text{重合。}$$

证法三：在△ACD中，$\dfrac{AC}{\sin\angle D} = \dfrac{CD}{\sin\angle 1}$……①

在△ABD中 $\dfrac{AB}{\sin\angle D} = \dfrac{BD}{\sin\angle BAD}$……②（图4（3））。

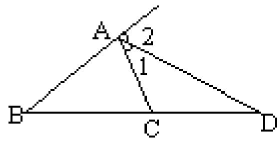


图4 (3)

∵∠BAD=180°-∠2

∴sin∠BAD=sin∠2

∵∠1=∠2

∴sin∠1=sin∠2

∴sin∠BAD＝sin∠1

$\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$

证法四：反证法（略）

这样，一道例题便复习到直接证法，间接证法，三角证法等。

五、通过一题多变培养学生的发散思维

在初中几何教学中，利用典型例题，引导学生向题的深度和广度发展，培养他们的发散思维。

原题：过△ABC 的顶点 C 任作一直线，分别与中线 AD 及边 AB 相交于点 E 和 F，求证：AE：ED=2AF：FB

A．将原题的条件限在锐角三角形内（图 5（1））。若 CF⊥AB，过 D作DG∥CF，交于AB于G，则DG⊥AB，又BD = DC，则有$DG = \dfrac{1}{2}$ CF，令 AD=CF，便有

发展题 1，在锐角三角形中，AD 是中线，CF 是 AB 边上的高，AD=CF，求证：

∠BAD=30°。

B．让原题中的 CF 过 AD 的中点 E（图 5（2）），过 D 点作 DG∥AB 交 CF

于G，则△AFE≌△DGE，有AF=DG，DG∥AB，BD=DC．于是$AF=\frac{1}{2}BF$，即$AF:BF=1:2$

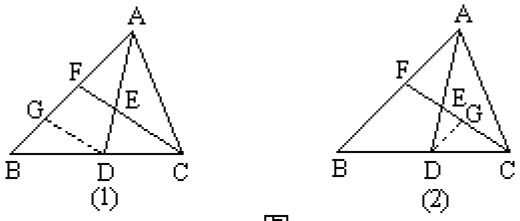


图5

发展题2，如果从△ABC的顶点C引一条直线平分顶点A的中线AD，那么这条直线把AB分成1∶2。

总之，在教学中，只要教师善于启发引导，创造活跃的课堂气氛，重视思维信息的传递与交流，就会有利于学生发散思维能力的培养和发展。

初中学生数学自学能力的培养

江苏省海门市临江中学　陆纯山

数学自学能力主要是指学生独立获取知识的能力，系统整理知识和灵活应用知识的能力。当代国际上各国综合国力的竞争，关键取决于科学技术的发展水平，高科技的发展离不开数学，如果没有自学能力，就跟不上时代的发展。因此，培养学生数学自学能力，不仅是有利于提高数学教学质量，更重要的是为了培养高素质的社会主义建设人才，适应时代发展的要求。为此，我在数学教学中十分重视学生的自学能力的培养，主要抓住如下几点：

一、培养学生独立获取知识的能力

培养学生独立获取知识的能力，必须从培养学生阅读能力入手，阅读能力提高了，也会促进其他能力的发展；中学生所学的数学知识，主要在课本上，因此，培养学生阅读能力主要是培养学生阅读课本的能力。对此，我从以下两个方面入手：

（一）培养学生阅读的习惯。有些学生往往没有形成认真看书的习惯，有的学生认为只要听懂，会做题目就算学好了；有的不看书，就做作业；有的走马看花读课本，不求甚解；有的贪玩，只完成作业，不预习、不复习课本。针对学生各种不良习惯，我进行了耐心的思想教育，通过介绍数学家自学成才的故事，介绍学生中认真自学取得优异成绩的事迹，使学生认识到自觉认真阅读教材是学好数学的重要途径。为了养成学生看书的习惯，开始对每堂课布置预习提纲（以问题为主）或复习要点，在课上以提问或书面回答方式进行检查，表扬看书认真、回答得好的学生，对回答差错多的学生课后询问情况，教育帮助，促使学生较快地养成阅读教材的习惯。

（二）培养学生阅读教材、理解教材的能力。在学生初步形成自学习惯的同时，要教会学生阅读教材，开始时采用教师范读、领读（教材的重点部

分），学生个别朗读、齐读、默读等多种形式，帮助学生能比较流畅地阅读数学教材，在这过程中还要提醒学生注意：数学语言十分精练，非常严密，逻辑性强。因此要求学生看教材时思想高度集中，善于分析思考，对于定义、定理、公式、问题都要仔细审阅题意，抓住关键词语，分清条件（已知）和结论（求解），看懂和掌握定理的证明或公式的推导过程，以利对教材的深刻理解和记忆。阅读理解教材能力的训练对不同年级应提出不同的要求，初一阶段，因学生所学科目不多，精力较集中，时间较多，要求他们多读，必要时多背。在多读、多背中加深理解和记忆。到初二、初三阶段的阅读训练中侧重于提高学生阅读和理解教材的速度和深度，掌握重要定理、公式的证明或推导，掌握典型例题、习题的解题思路，以提高学生自己解答综合性问题的能力。

二、培养学生系统整理知识的能力

系统整理知识能使所获取的知识深化和提高，为了培养学生系统整理知识的能力，开始阶段，在教完一节一章后，及时布置学生系统复习，在教师启发指导下，让学生参与讨论，师生共同归纳小结一个章节的主要内容。结合小结，还要使学生了解所学知识的内在联系，抓住重点，扫除难点。例如有理数一章复习小结时，结合数轴，通过提问、讲座让学生进一步理解有理数的有关概念，如正数与整数学生往往混淆，让学生从定义入手，谈出正数与整数的区别与联系，并在数轴上用不同颜色形象地区分。特别是｜a｜如何表示，学生较难理解，让学生回忆绝对值、相反数的定义，再通过字母 a 取正数、负数、0 等一些具体数值去思考，尤其是当 a＜0 时，｜a｜=-a 学生不易理解，可先用｜-2｜=-（-2）=2 的具体例子和图示，让学生细细思考、领会，再总结出正确解答。这样为学生今后学习二次根式时打下了基础。在章节复习学生容易疏忽的地方也应加以提醒。诸如：（-20）+（+3）-（+5）-（-7）=（-20）+（+3）+（-5）+（+7）=-20+3-5+7，这例题要求学生会把加、减运算统一成代数和的形式，再写成省略加号的和的形式，并且能正确读出式子，这是有理数加减运算的精华所在，务必使学生清晰理解，以免运算中出差错。至于有理数的混合运算，要求学生在掌握法则、运算定律的基础上，课后完成一定数量的习题，来提高自己的运算速度和正确性。通过多次训练，使学生养成归纳小结所学教材的习惯。后阶段还要指导学生系统整理一个学期，一个学年，乃至整个初中阶段的数学知识。例如，初三代数复习时要引导和帮助学生梳理三年教材和知识结构，先把实数（有理数和无理数）系统的有关概念、运算法则，运算定理系统整理，理清知识脉络，类似地再把代数式、方程（组）、不等式（组）、函数等各部分知识系统整理，由纲到目，或由目归纳，既要弄清各部分的知识结构，又要弄清各部分知识间的内在联系与区别，如一元二次方程、一元二次不等式、二次函数，结合二次函数的

图像有机地把这三者的内在联系与区别搞清楚。学生通过自己动脑、动手、动口，不仅提高了概括能力，更重要的是更深刻地、系统地理解和掌握所学教材，找出各部分知识间的联系，弄清来龙去脉，形成一个知识网络，促使学生所学知识正迁移的不断发生，克服负迁移的消极影响。

三、培养学生独立、灵活运用知识的能力

认识客观世界的目的在于改造客观世界，所以培养学生独立、灵活运用所学的知识解决问题，是数学教学的目的，也是培养学生自学能力的重要组成部分。学生独立解题能力的培养主要通过平日的经常训练，由易到难，逐步提高，课堂教学中先是将教材中练习部分让学生当堂思考，独立解答。其次是习题部分，最后是复习题，分层次分别让学生在课上或课后独立完成作业，个别较难的问题可布置学生课后先思考，到下一节上课时，让学生说出解题思路，或教师作适当点拨后，再让学生自己解答。还要根据教学实际，适时选一些跳一跳能够摘桃的实际问题，如在初一教完二元一次方程组应用题后，提出一道学生很感兴趣的问题：某幼儿园花 100 元钱，买回大、中、小三种球共 100 个，已知大球 5 元 1 个，中球 3 元 1 个，小球 1 元 3 个，问大、中、小三种球各有几个？为了扫除学生解题障碍，同时布置一道题：适合方程 $3x+2y=20$ 的自然数解有几组？这两道题请学生课后一起思考，第二次上课时先了解学生思考解答情况，有的完整解答，有的找到一组解，有的不会解，于是叫解得好的学生口述解题过程，教师作简要板书：解：设大、中、小三种球分别是 x 只、y 只、z 只。

由题意得 $\begin{cases} x+y+z=100 & (1) \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100 & (2) \end{cases}$

把（2）×3-（1），整理后，得 $y=\dfrac{100-7x}{4}$

（到此，请学生讲讲思考方法，因为三种球的只数均是小于 100 的自然数，且从 $y=\dfrac{100-7x}{4}$ 分析，$7x$ 小于 100，$100-7x$ 要能被 4 整除）

经心算，适合方程 $y=\dfrac{100-7x}{4}$ 的自然数解为

$\begin{cases} x=4 \\ y=18 \end{cases}$ $\begin{cases} x=8 \\ y=11 \end{cases}$ $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases}$

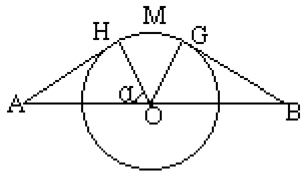
所以适合题意的三组解是 $\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases}$ $\begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases}$ $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$

答：略。

初二时曾提出这样一道思考题：1995 年银行整存整取一年期的年利率为

10.98%，三年期年利率为 12.24%，现存入一万元，问存一年期连续三年（每年到期后本利一起存入下年）与存三年期哪种存法利息多？这是社会生活中常碰到的实际问题，学生很感兴趣，有的问家长，有的问银行职工，核对自己的算法是否正确，其实了解了计算方法，不难回答这个问题。（前者：$10000[(1+10.98\%)^{3}-1)\approx 3669$（元），后者：$10000\times 12.24\%\times 3=3672$（元）。

初三复习时，提过这样一道题：在相距 40 公里的两个城镇 A、B 之间有一半径为 10 公里的园形湖泊，湖泊的半径恰好位于 A、B 中点处，现要绕过湖泊从 A 城去 B 城，最少要走多少路？（假设湖泊外其余地方均可行走），让学生思考后（可讨论），然后请学生说出解法，教师作简要板书。



解：如图，AH、BG 分别是圆 O 的切线，H、G 分别是切点，设 $AH = X$，则有 $AH^2 = AC\cdot AO$，即 $X^2 = 10\times 30$，所以 $X = 10\sqrt{3}$。设 $\angle HOA = \alpha$，则 $tg\alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$，所以 $\alpha = 60°$。同理 $\angle BOG = 60°$，$\angle HOG = 60°$，又因为 $\overset{\frown}{HG} = \frac{\pi}{3}\times 10 = \frac{10\pi}{3}$。

$\therefore$ A城至B城的路程为 $AH + \overset{\frown}{HG} + GB = 10\sqrt{3} + \frac{10\pi}{3} + 10\sqrt{3} \approx 45.1$（公里）。

容易证明，其他走法所走的路程要比此多。

如经过 AC，沿半圆周 CMD，再经 DB 走，那么 A 至 B 的路程为：$10 + 10\pi + 10 \approx 55.4$（公里），几何证明也很简单：因为 $AC + \overset{\frown}{CH} > AH$，$BD + \overset{\frown}{DG} > GB$（连结两点的线中，线段最短），所以 $AC + \overset{\frown}{CD} + DB > AH + \overset{\frown}{HG} + GB$，类似以上这些联系实际的数学问题，容易激发学生独立解题的兴趣，从而提高了学生灵活运用所学知识独立解答综合问题的能力。

培养学生自学能力的内容是多方面的，方法是多种多样的，但要注意如下三点：

一是贯彻教师为主导，学生为主体的原则，教师要认真备课，精心设计，不管是自习提纲，小结提要，还是课堂语言和板书，都要起示范作用。例如余弦定理，用公式表达学生比较容易记住，但用语言表达，学生往往讲不完整，这时教师一方面完整地口述和板书，另一方面请学生看书，检查教师口述和板书的内容是否和课本上一致，大多数学生注意力比较集中，看教师板书是否有错漏的地方，在这过程中既体现教师的主导作用，又发挥了学生的主体作用。

二是要贯彻循序渐进的原则，培养学生自学能力的各种训练，要由浅入深，由易到难，让学生有梯度递进。

三是要根据学生的年龄、心理、个性、班级等特点，因材施教，因人因地制宜，灵活运用各种方法，以期取得理想的效果。

重视学生自学能力的培养，有助于提高教学质量，提高学生整体素质，效果较好。近几年期末统一考试，我所教班的数学平均成绩比学校中平行班高 5 到 10 个百分点。80 年代所教的一个初三班，规定同类学校派五名学生参加县初中数学竞赛，结果获县团体总分第一，其中有三位学生进入前五名，1994 年春辅导学生参加华罗庚杯全国少年数学竞赛，有一名学生获南通市二等奖，创学校历史最高水平。

以上是我在数学教学中培养学生自学能力的几点尝试和粗浅体会，有待今后进一步完善和提高。

例谈数学教学中
对学生跨越思维能力的培养

——兼议中考综合题的失分与对策

河北省兴隆县大水泉中学　傅延堂　张明云

九年义务教育数学教学大纲指出：“ 初中数学教学中，发展学生的逻辑思维能力主要是逐步培养学生，会观察、比较、分析、抽象和概括，……形成良好的思维品质。 ”达到《大纲》所提出的能力要求，培养学生形成良好的思维品质的一个重要途径，那就是要培养学生的跨越思维能力。

纵观这几年，在初中数学教学中，发挥着“ 指挥棒 ”作用的中考试题，都具有一个共同的特征，即以综合题（纵向、横向）为压轴题，来考察学生综合运用代数、几何知识解决问题的能力。这类题所涉及的知识点多，覆盖面广，综合性强，即也不偏不怪。而学生的失分率较高，特别是横向综合题（几何、代数相综合）的失分率更高。造成这种状况的根本原因就是学生的跨越思维能力较低，总摆脱不了纯几何或纯代数知识的思维定势。我们认为其原因主要有以下三个方面：

第一，由于教材分为《几何》、《代数》，课本中的例题和习题的设置对几何、代数知识之间的沟通应用比较少。这样，从形式上给学生造成了几何、代数相分离的印象，缺乏一种整体的统一的认识。

第二，在平时的教学活动中，教师对几何代数相关知识没注意进行有效的沟通、演练，缺乏跨越思维的训练和培养，使学生在解题进程中形成了纯几何、纯代数的单纯解题思想和思维定势。

第三，一些老师们为应付中考，只在考前复习时采取“ 识别类型、死套模式、强化练习 ”的机械训练，强行灌注，而没有进行思维方法的启迪与跨越思维能力的培养，其结果也必然事倍功半。

事实上，横向综合题的目的也正是考察学生的跨越思维能力。因此，我

们在教学中，应重视这个问题，这不仅是中考的需要，也是《大纲》对学生思维能力培养的一项内在要求，还是素质教育对数学课堂教学的必须。我们认为，对学生进行跨越思维能力的培养应从以下几方面入手。

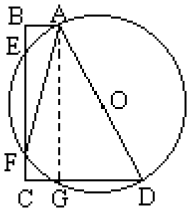
一、在教学过程中，我们应让学生明确代数、几何具有各自的独立性，同时相互间有密切的联系。改变学生头脑中的纯几何、纯代数思想，打破定势。为此，老师在备课时，首先应考虑所要讲授的代数（或几何）知识与几何（或代数）知识之间的联系，进行发掘提炼。其次，在讲课时，要适时地揭示它们之间的密切关系，并进行阐述和总结。

如，讲三角形的三边关系时，应考虑到不等式；讲三角形三个内角关系或外角与内角关系时，应考虑到方程问题；讲平面直线坐标系应考虑到轴对称；在讲一次函数、二次函数时，应考虑到直角三角形和等腰三角形等。

二、要适时上好综合习题课，进行跨越思维训练。

首先，要精选习题。要结合学生的实际水平，选择例题，要注意选题的针对性、典型性、启发性和综合性。

其次，要对习题的构成进行分析，对习题的解决，要充分暴露思维过程，总结解题的思维方法。



例：如图，已知直角梯形 ABCD 的边 AB=a，BC=b，CD=c，腰 AD 是圆 O 的直径，直角腰 BC 与圆 O 交于点 E、F。求证：tg∠BAE 和 tg∠ BAF是方程$ax^2 - bx + c = 0$的两根。（94年山西省某市中考模拟题）

（一）对题目的构成分析：

（1）此题是证明两个角的正切值（tg∠BAE 和 tg∠BAF）是某一元二次方程（$ax^2 - bx + c = 0$）的两根的问题，所以应该想到韦达定理。

（2）又由所给条件可知，这是一个以直角梯形的斜腰为直径的圆和这个梯形的各边相交的图形，所以又应考虑圆中的一些线段的关系。

（3）又知∠EAB 和∠BAF 处在两个直角三角形中，所以应考虑直角三角形的边角关系。（且有 AB=a BC=b，CD=c 的条件）……。

（二）对解题方法进行探求分析：

若证结论成立，则只需证：$\mathrm{tg}\angle BAE + \mathrm{tg}\angle BAF = \frac{b}{a}$，$\mathrm{tg}\angle BAE \cdot \mathrm{tg}\angle BAF = \frac{c}{a}$**；根据条件可知：**$\mathrm{tg}\angle BAE = \frac{BE}{AB}$，tg $> \angle BAF = \frac{BF}{AB}$**，所以有**$\mathrm{tg}\angle BAE + \mathrm{tg}\angle BAF = \frac{BE + BF}{AB}$……

①，$tg\angle BAE \cdot tg\angle BAF = \frac{BE \cdot BF}{AB^2}$……②；若 $\frac{BE = CF}{\blacktriangle}$，则

①为$tg\angle BAE + tg\angle BAF = \frac{BC}{AB} = \frac{b}{a}$，（问题解决一部分），而

②为：$tg\angle BAE \cdot tg\angle BAF = \frac{BE \cdot BF}{AB^2} = \frac{CF \cdot CE}{AB^2}$．据切割线定理的推论得

$CF \cdot CE = CG \cdot CD$，即$\frac{CF \cdot CE}{AB^2} = \frac{CG \cdot CD}{AB^2}$，于是得$tg\angle BAE \cdot tg\angle BAF$

$= \frac{CF \cdot CE}{AB^2}$．易知$CG = AB$．所以连结AG，则可得到矩形ABCG，则BC

∥AG，可证 Rt△ABE≌△RtGCF，故 BE=CF。问题解决。

（三）写出解题过程（略）

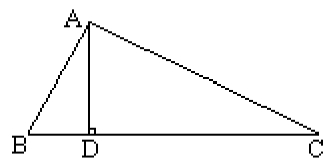
（四）总结：这类问题是证明某两个角的三角函数值是某一元二次方程的两根问题。通过分析，可知这类题的关键是要抓住这两个角的三角函数值的积、积与方程两根的关系。注意结合代数中韦达定理及其逆定理和几何中三角形的边角关系、面积公式、有关线段间、有关角间关系等知识，达到问题的解决。此题还可对一些条件进行变化，提出新的问题。

三、搞一些横向变式训练。

进行横向变式训练，要选一些课本上的典型习题或例题，让学生参与对题目的横向变式。教师要注意引导，激发兴趣，使学生的跨越思维能力得到逐步提高。

例 1．　原题：如图 AD 是 Rt△ABC 的斜边 BC 上的高，设 AC=60，AB=45，求 AD、BD、CD。（九年义务教育教材四年制几何第二册 P_{206}8 题）横向变式为：

如图，AD 是 Rt△ABC 的斜边 BC 上的高，设 AC=60，AB=45，若以 D 为原点，BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系。



（1）求 A、B、C 三点的坐标。

（2）求线段 AB、AC 的解析式。

（3）求经过 A、B、C 三点的抛物线。

解答：（略）。

例 2：　原题：已知一个二次函数的图象过（-1，10），（1，4），（2，7）三点，求这个抛物线的解析式。（九年义务教育教材四年制代数第三册 P_{148} 例 6）

横向变式为：

已知三个点（-1，10），（1，4），（2，7），（1）求作△ABC，并使其三个顶点与三个已知点关于 y 轴对称。（2）求作△A'B'C'与三个已知点关

于 x 轴对称。

解答（略）

例 3：原题：一条抛物线 y=ax+bx+c 经过点（0，0）与（12，0），最高点的纵坐标是 3，求这条抛物线的解析式。（九年义务教育教材四年制代数第三册 P_{168}7 题）。

变式为：

已知点 A（0，0）与 B（12，0），并知 C 点纵坐标为 3；连结 AC、BC，作 CD⊥x 轴，垂足为 D，DE⊥CB 垂足为 E。

（1）求经过 A、B、C 三点，并以 C 为最高点的抛物线。

（2）求 $\frac{BE}{AD}$ 的值。

（3）求△ADC 的外接圆面积。

解答：（略）

在我们的教学实际中，跨越思维不仅体现在代数与几何知识间，还体现在纯代数知识或纯几何知识前后的联系，纯数学问题与实际应用问题、以及数学知识与相关学科（如物理、化学等）间的联系等诸多方面。我们只是在做初步的探讨。到底如何更好地培养学生的跨越思维能力，达到《大纲》提出的能力要求，还需广大同仁共同研究探讨，以适应素质教育的需要。

试谈数学教学中创造能力的培养

山东省曹县一中　刘法聚

在数学教学中，如何培养学生的创造能力？笔者认为，只要激发起学生的求知欲望，不断地鼓励他们发现的热情，进行探索性思维的必要训练，就可能达到培养创造能力的目的。

一、培养归纳能力，鼓励大胆猜想

归纳猜想是科学发现最常用的方法之一，要培养跨世纪的人才，在数学教学中必须重视归纳思想的培养。

1．用归纳的方法引进新课

归纳猜想是教学中揭示规律的重要方法，可以在新课进行时广泛地使用，例如在高中代数中讲用分析法证明不等式时，作如下处理：

在下列横线上填上不等号

$\frac{2+3}{5+3}$——$\frac{2}{5}$；$\frac{3+2}{4+2}$——$\frac{3}{4}$；

$\frac{5+3}{2+3}$——$\frac{2}{5}$；$\frac{4+2}{3+2}$——$\frac{4}{3}$

观察上面所得不等式，看有什么规律？试归纳出这一规律：

若 a，b，meR 并且 a＞b，则

（1）$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$；

（2）$\frac{b+m}{a+m}<\frac{b}{a}$

（1）就是高中代数下册第 12 页例 7

2．引导学生用归纳法寻找科学结论

例如等差（比）数例的通项合式虽然可用选加（乘）法得到，但在讲新课时并不急于运用这种方法，而只用归纳法，从而进行归纳思想的培养。

如引导学生观察下面一类不等式

（1）x-3＞0；

（2）（x＋2）（x-3）＞0

（3）（x＋1）（x-2）(x-3）＞0；

（4）（x＋2）（x＋1）（x-1）（x-3）＞0

然后用数轴表示画出不等式的解，得出归纳猜想。①上述这类不等式的解总是以一个个区间的形式出现的；②区间（x_n，＋∞）必是不等式的解；（3）不等式解区间和不是解的区间相邻接地出现。

二、运用类比方法，发展横向联想

教学中注意运用类比，将概念和法则进行延伸、推广和迁移，对探索和预测具有重要作用。

1．抓好类似概念的类比

例如：正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，

（1）求上底面中心 O_1 与平面 C_1BD 的距离；

（2）求 B_1D_1 与平面 C_1BD 的距离；

（3）求平面 AB_1D_1 与 C_1BD 的距离；

（4）求异面直线 B_1D_1 与 BC_1 的距离；

本例是围绕有关距离概念进行对比，正确达到区分点与面的距离、线与面的距离、面与面的距离（即异面直线的距离）等概念。把握各自本质特征，并且了解它们之间的相互转化关系，掌握解这类问题的思维方法。

2．抓好形式类比

例如，对于任意实数x，恒有f（x＋a）$=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$成立，（其中a≠0），问（f）x 是否是周期函数？若是，求出它的一个周期，若不是，说明理由。

分析：要判断 f（x）是否是周期函数，容易联想到熟悉的周期函数，不难发现f（x＋a）的表达式类似于tg（$x+\frac{\pi}{4}$）的展开式，由于f（x）

$=\text{tg}x$的周期是$\pi=4\times\frac{\pi}{4}$，故猜测$4a$是$f(x)$的一个周期，于是：

$$f(x+2a)=f[(x+a)+a]=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=-\frac{1}{f(x)},$$

$$\therefore f(x+4a)=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$$

∴4a 是 f（x）的一个周期。

三、暴露知识发生过程，培养思维能力

数学知识是前人通过辛勤的智力劳动所获取的，它的获取过程，它的获得过程，蕴含着培养智力的因素，因此教学中暴露知识的发生过程和学生的学习过程，就可以培养学生的思维能力。

1．暴露知识的发现过程

例如，左数列前几项和公式的推导

课本上说：“为了求图 6—1 所示的钢管的总数，我们可以设想如图 6—4 那样，在这堆钢管的旁边倒放着同样的一堆钢管……”

这样设想不但是可以的，而且是科学的，问题的关键在于这个设想是如何想出来的？如果课本上没有给出这个设想，我们是否可以作出这种设想？在课堂上提出以上问题，学生思维活跃，激起了创造性的火花，接着又提出如下问题：

（1）等差数列有哪些性质？

（2）观察图 6—1 象什么图形？

（3）梯形的面积公式是什么？是如何推导的？你能得到什么启示？

就等差数列前几项和公式本身来说并不难，然而公式推导过程中优美的动机和想法却给人以启迪，为求一般等差数列前几项的和，先图 6—1 所示的钢管数，这里却运用了一般与特殊的转化思想，又用了数形结合思想，通过图形倒放给反序相加法以直观表示，然后用这种方法求一般等差数列前几项的和。通过展示公式的推导过程，使学生知道知识的来龙去脉，知其然，更知其所以然，较好地掌握了知识。

2．暴露问题的探索过程

教学中反映科学的思维过程，将使学生更为主动地思考，得到更加透彻的认识，例如在一堂练习课上，鼓励学生对下题作多种解法。

已知：a、b、c、d 成等比数列，求证 a＋b，b＋c，c＋d 成等比数列（高中代数下册 P_{128}·7）

多数同学的解法与人教出版的教参给出的证明相同，即

已知a，b，c，d成等比数列，设公比是q，则：$b=aq$，$c=aq^2$，$d=aq^3$

∵a＋b=a（1＋q），b＋c=a（1＋q）q，

$c+d=a(1+q)q^2$ ①

$$\therefore \frac{b+c}{a+b}=q=\frac{c+d}{b+c}$$ ②

即 a＋b，b＋c，c＋d 成等比数列

有几位同学把 b，c，d 分别用其前一项与公比之积表示出来，证明显得较为简捷。

有个同学说我还有更简捷的证法，就是举例说明！

证明命题成立如何举例说明呢？同学们感到惊讶，这时我鼓励他把自己的证法写出：

若 a，b，c，d 分别为-1，1，-1，1，那么 a＋b，b＋c，c＋d 均为零，不成等比数列，与求证的结论矛盾，因此题目有问题！

同学们还能举出其他例子说明命题不真吗？在上面例子的启发下，同学们又举出不少例子。

检查一下自己前面的证明，问题出在何处？

我们对这个习题应作如何修改？

有的同学提出，把题设条件加上公比 q≠-1，有的同学把题目改为发散型：

已知 a，b，c，d 成等比数列，试问 a+b，b+c，c+d 是等差数列，还是等比数列？

（当公比 q=1 时，既是等差数列，又是等比数列；当公比 q=-1 时，成等差数列；当公比 q≠±1 时，成等比数列。）

教学中，暴露知识的发生过程，有利于培养学生类比、归纳、猜想和探索的能力，进而达到培养创造能力的目的。

通过习题课教学
努力开发学生的数学思维

四川省金堂县高板中学　沈友胜

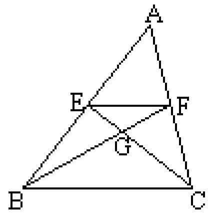
中学数学教学的中心问题是如何开启学生的数学思维，提高学生的数学素质。课本上的例习题可以说是编者精心设计出来的，是教师传授知识的纽带，是学生掌握双基的重要手段。教师利用习题课，从教材的习题出发，充分联想、深究，沟通知识间内在联系，对于大面积提高教学质量，发展智力，开启学生数学思维都是至关重要的。这就要求教师摒弃那种单一的讲评习题的作法，而应注重对课本习题的多层次处理，深挖隐藏于习题背后的丰富内涵。

一、教学生归纳，掌握解题规律

数学教材体系是以知识和数学思想方法为核心的，在习题课教学中忌就

题论题，应重视培养学生的观察、分析和归纳能力。要通过解一道习题的训练，掌握解一类题的方法，以达到“以点带面”触类旁通的效果。

例1：已知BE、CF是△ABC的中线，它们相交于G，求证：$\frac{GE}{GB}=\frac{GF}{GC}=\frac{1}{2}$



教法：（1）通过分析找出证题途径。（2）证题后提问：本例是通过什么方法证明四条线段成比例的？怎样找出两个三角形相似的？怎样添辅助线的？（3）在已知三角形边中有中点时，添作中位线的一般规律。

二、深究习题内涵，达到举一反三

习题课教学应注意引导学生对所解习题作适当的推广，深化对命题的认识，培养学生思维的深刻性，获得举一反三的本领，久而久之，可以培养学生深入钻研的良好习惯。

例2 代数（必修）上册P_{172}，5（4）题求证：$\sin^2\alpha-\sin^2=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$，它形似$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，不妨称之为“正弦平方差公式”，深究了这个内涵对于解两道高考题显得异常简单！

如：求sin10°sin30°sin50°sin70°的值（1987年高考题）

解：原式$=\frac{1}{2}\sin10°\sin(60°-10°)\sin(60°+10°)$

$=\frac{1}{2}\sin10°(\sin^2 60°-\sin^2 10°)$

$=\frac{1}{8}(3\sin10°-4\sin^3 10°)=\frac{1}{8}\sin30°=\frac{1}{16}$。

再如：求$\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin20°\cdot\cos50°$的值

解：原式$=\sin^2 20°+1-\sin^2 50°+\sin20°\cdot\cos50°$

$=1+\sin(20°+50°)\sin(20°-50°)+\sin20°\cdot\cos50°$

$1-\frac{1}{2}\sin70°+\frac{1}{2}(\sin70°-\sin30°)$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。

三、注重一题多解，培养发散思维

课本上的许多习题，不乏精典之作，从不同的角度思考可有不同解法，因此在习题课教学中，有目的地引导学生周密地思考是否还有别的求解途

径，以求最简的解法，培养学生发散思维能力。

例 3　《立几》（必修）P_{44}9 题，已知：三个平面α、β、γ，若α⊥γ，β⊥γ，α∩β=l，求证：l⊥γ。

我在批改作业时，发现这道题四种不同的解法，为了启发全班学生，我特让四位学生在黑板上板书出来：

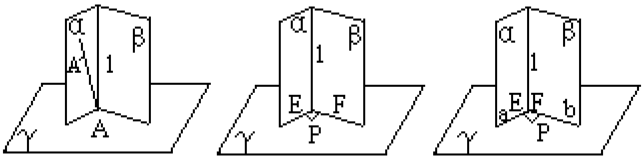


图1　图2　图3

学生 1，证明：设α、β、γ的公共点为 A，假设 l 不垂直于γ，过 A 点作 AA'⊥γ，

∵A∈α，α⊥γ，∴AA'⊂α

A∈β，β⊥γ，∴AA'⊂β

∴α∩β=AA'，又∵已知α∩β=1，此与两平面相交有且只有一条公共直线矛盾，∴假设 l 不垂直于γ不成立。

∴l⊥γ

学生 2，证明：在γ内任取一点 P，过点 P 作 PE⊥α于 E 点，∵α⊥γ，∴PE⊂γ，同理过P作PF⊥β于F点，

∵l⊥γ，∴PF⊂γ，又∵α∩β =l

∴l⊥PE，l⊥PF，∴l⊥γ。

学生 3，证明：设α∩γ=a，β∩γ=b，在γ内任取一点 P，作 PE⊥α于 E，过 P 作 PF⊥b 于 F，∵α⊥γ，∴PE⊥α，β⊥γ，∴PF⊥β，又∵α∩β=l.

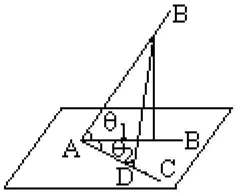
∴l⊥PE，l⊥PF，∴l⊥γ。

还有学生四的证法，但较繁，从略。面对黑板上如此富有启发性的思维层，我抓住时机指出：大家的思路是成功的，但证明中有些不严密的地方，比如学生 2 和学生 3 所设的 P 点，如果在 a，b 上呢？另外 PE、PF 为什么相交？遇到一个习题，可以教学生多角度思考，这样可以促使学生发散思维的培养和形成。

四、试用习题结论，挖掘深刻价值

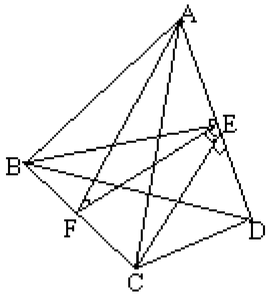
教材上有些习题，貌似平常，实际上内涵特别丰富，有着不寻常的功能和再应用价值。如果能教学生注意应用这些习题的结论，回过头去解之前或之后的习题，不但解法别开生面，而且使所学知识融汇贯通。

例4　《立几》（必修）P_{117}3题：如图，AB和平面α所成的角是θ_1，AC在平面α内，AX和AB的射影AB'成角θ_2，设∠BAC = θ，求证：$\cos\theta = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2$。



学生证明此结论不成问题，但学生如能灵活应用解有关余弦值问题可得意想不到的简便。

如：在棱长都相等的四面体 A—BCD 中，E、F 分别是棱 AD、BC 的中点，连结 AF、CE，如图，求异面直线 AF、CE 所成角的大小（88 年上海高考题）。



解：设异面直线 AF、CE 所成的角为 α，连结 BE、EF．∵四面体为正四面体，E、F 为中点，∵AE⊥EC， AE⊥BE，∴AE⊥平面 BCE，

∴AF在平面BCE上的射影是EF，$\cos\angle AFE=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\cos\angle FEC=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

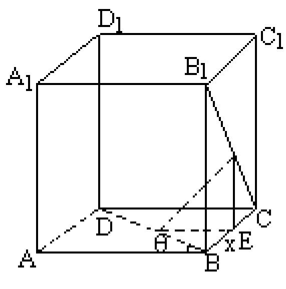
∴$\cos\alpha=\cos\angle AFE\cdot\cos\angle FEC=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}$。

∴异面直线AR、CE所成角为$\arccos\dfrac{2}{3}$。

五、设计错解，培养学生思维准确性

在平时的习题课中，利用事先反馈的信息，有意识设计错解，让学生自己来找易混易错的地方，总结出应该注意的问题，提高学生辨析能力。

《立几》第一章结束时，我布置了一道求异面直线距离的题目：“已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_2$ 的棱长为 a，求异面直线 B_1C 与 BD 的距离。”从收来



的作业本中发现有一种错解如下：

错解：设P_1是B_1C上任意一点，过P_1作$P_1E\perp BC$于E，过E作EQ1⊥BC，交BD于Q_1，连结P_1Q_1．设$BE=x$，则$EC=a-x$，$P_1E=a-x$，$EQ_1=x$。

$\therefore |P_1Q_{11}| = \sqrt{EP_1^2 + EQ_1^2} = \sqrt{2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}}$。

∴当$x = \frac{a}{2}$时，P_1Q_1取最小值$\frac{\sqrt{2}}{2}a$，即异面直线B_1C与BD的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$。

我让学生指出错在哪里，学生开始感到茫然，我给予点拨：P_1Q_1具有什么样的几何性质？同学们终于明白，这里的 P_1Q_1 不可能同时垂直于异面直线 B_1C 和 BD，∴｜P_1Q_1｜不能是异面直线的距离。进一步强调求异面直线间距离应注意的地方，这比单纯只给出正确答案要好得多。久而久之，培养了学生思维的准确性。

总之，中学数学教材中不少习题的题型重要，解法典型，内涵丰富。精心策划习题课，对于平时教学十分重要，注重习题多层次处理，对于落实“三基”，提高学生思维能力有着非常重要的作用。

精心设计练习　优化课堂教学

山东省滨州市第二小学　庞春泽

现代教学论认为：练习是一种有目的、有指导、有组织的学习活动，是学生形成各种能力的基本途径之一。在数学课教学中，练习是学生的一项经常性学习实践活动。从这个意义上讲，它不能简单地以巩固知识、运用知识为满足，更不能一味地要求学生盲目地去做重复性练习，而应本着有利于学生智力能力的培养与开发、有利于学生整体素质的提高的原则去精心设计。因此，转变思想观念，设计精心的练习内容，是优化课堂教学的关键。多少年来，我在小学数学教学过程中摸索、探讨出“五段式练习法”，提高了课堂教学效果。下面就“五段式练习法”谈点自己的做法。

一、准备练习——铺路架桥

著名教育学家苏霍姆林斯基说：“在我看来，教给学生借助已有知识去获得知识，这是最高的技巧之所在。”数学教学中，准备题的设计就是引导学生借助已有的知识去获取新知识的一个重要环节。一道好的准备题不仅能够帮助学生搭好知识联系之“桥”，而且更重要的是引导学生自己攀上这座“桥”，到达“桥”的彼岸。

新授课的起始阶段通常都要复习旧知识，为学习新知识做准备，教学中要抓住知识的内在联系和新旧知识的衔接点，有目的地进行铺垫，以利于知识的正迁移。例如，五年制第七册教材第 37 页例 5 的教学，它是在学生学习了小数乘以整数和整数乘以小数的基础上进行的，关键是能否根据积的变化规律确定小数点的位置。教学时我设计 44.95×12 和 4495×1.2 这样的两道

练习作为准备题，让学生计算，并谈谈计算时是怎样想的？然后引出例题：449.5×1.2，让学生通过与准备题比较发现不同点，并提出以下问题让学生思考、讨论：（1）能不能像上面的准备题一样，把两个因数都看作整数算出积？(2) 如果能，算出的积又发生了什么变化？要得到原来的积，该怎么办？通过问题①的思考使学生的思路找到了落脚点，为知识的迁移作了准备，而问题②则帮助学生顺利地实现了正迁移，使思维在新知识的伸长点上有序地展开。有效地运用旧知识解决新问题，促进思维能力的发展。

二、尝试练习——探讨新知

该阶段的练习一般结合教师的讲授进行，目的是让学生运用已有的知识、经验和方法探索新的知识。例如在教长方体表面积的计算中，例 1“一个长方体的纸盒，长 6 厘米，宽 5 厘米，高 4 厘米，求这个纸盒的表面积。”上课一开始，我出示了一道尝试题：“一个长方体的木盒长 3 分米，宽 2 分米，高 5 分米，求这木盒的表面积是多少平方分米？”老师让学生认真审题，再仔细观察实物，然后提出下列三个问题让学生思考：

（1）题中告诉了哪些条件？要求什么问题？

（2）要求表面积是几个面的总面积？

(3) 要想求表面积是否把六个面的面积分别求出来？如不分别求出来应怎样去做？为什么？

这些问题激发了学生的求知欲，使学生产生了解决问题的迫切愿望。此时再让学生看课本中例题自学。由于学生做题心切，想找出解题方法，自然产生了自学要求。由于出示的尝试题与例题相仿，学生争做尝试题。做完尝试题，不论是优生，还是差生，做的对与否，都有一种获得探求新知的自豪感和快乐感。接着让学生们讨论长方体表面积的计算方法，大部分都踊跃举手发言，为学习新知创造了条件。

三、基本练习——巩固新知

讲完新课例题后，教师一般采用“试一试”、“做一做”等形式，让学生进行模仿性练习，教材中每个练习的前几题也大都是与例题相类似，都属于基本练习。它的作用主要是让学生巩固新知。例如除数是小数的除法，关键是移动除数的小数点使它变成整数，依据是商不变的性质。在讲清法则后我设计了如下的练习：不计算，将下列竖式变成除数是整数的除法：

$1.2\overline{)2.76} \rightarrow \quad 3.54\overline{)65.3} \rightarrow$

这样把基本练习设计的重点放在重复新知上，解题的依据就是体现新课主要的知识点，做到练中再重复学，学中练，从而强化知识，形成技能。

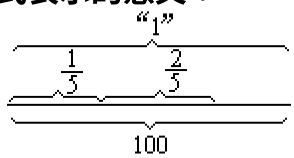
四、变式练习——活跃思维

过一层次的练习题采用变化结构和表达形成的方式，引导学生从不同角度理解新知识，避免思维定势的消极影响，同时扩大迁移量。经常采用的题型是对比题组、判断正误、选择填空、变换图形的方向、位置等。例如在讲解分数乘除法应用题时，弄清各个量中谁是谁的几分之几，是关键也是难点，所以我在教学时设计了如下的练习：

1．用直线把左右两边相对应的量与率连起来——语言对应练习。

男生占全班的$\frac{3}{5}$	裤子用布2米
又运进的占原有的	$\frac{1}{2}$男生有30人
未修的占全长的	$\frac{1}{4}$又进了4吨煤
裤子用布占上衣的$\frac{6}{7}$	未修的有432米

2．看图，写出下列算式表示的意义：



（1）$100\times\frac{1}{5}$ （2）$100\times\frac{2}{5}$ （3）$100\times(1-\frac{1}{5})$

（4）$100\times(\frac{1}{5}+\frac{2}{5})$ （5）$100\times(\frac{2}{5}-\frac{1}{5})$ ……

这样抓住分数应用题中各个量之间相对应的几分之几关系，通过多种形式逐步深化训练，对于正确解答分数应用题，提高解题能力起到了很好的作用。

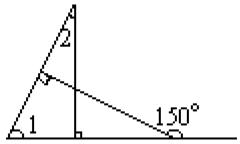
五、综合练习——形式技能

综合练习目的在于沟通新旧知识的联系，引导学生把刚学过的新知纳入已有的认知结构中，形成纵横有序的合理网络，使学生对知识的理解与认识上升到一个新水平，从而形成技能。

例如：在第八册几何初步知识复习课教学时，我设计了如下的综合练习。

（1）下面的图形中有（　　）条直线，有（　　）条线段，有（　　）条射线。

（2）如图所示∠1=（　　）°∠2=（　　）°



2．判断题：（对的打“√”错的打“×”）

（1）一个15°的角，透过放大5倍的放大镜看，这个角是75°。（　　）

（2）平行于同一直线的两条直线互相平行。（　　）

这样通过综合练习，使学生熟练掌握直线、射线、线段和有关角的一些概念及性质，掌握平面图形的基本特征及其内在联系，理清解题思路，把握解题方法，对提高学生灵活运用知识的能力有很大帮助。

激发学习兴趣　注重开发智力

山东省莒南县岭泉中心小学　王纪连

古人云：“知之者不如好之者，好之者不如乐之者”，这说明兴趣是最好的老师，它是推动人们学习的一种动力，是学习动机中最活跃的心理因素。小学生一旦对数学产生了兴趣，学习积极性就会大大提高。下面谈谈我培养学生学习兴趣的几点做法。

1．导入激发兴趣

一堂课引入的好，这堂课就成功了一半。因为小学生年龄小，自治能力差，他们认为学习是为家长和老师学的，因此，一开始就必须抓住他的注意力，使他爱听、爱学。如在讲“分母越大分数值越小”时，我讲了这样一个故事：一天中午，天气非常炎热，唐僧师徒四人走在山沟里，又饥又渴。唐僧叫猪八戒去找解渴的东西。一会猪八戒抱回一个大西瓜，猴子说：“咱们四个人每人吃四分之一。”猪八戒一听火了，忙对猴子说：“这样分不行，西瓜是我找来的，我要多吃，我得吃八分之一。”猴子一听暗暗高兴，忙说：“好好好，就叫你吃八分之一。”猪八戒吃完他那份后苦丧着脸说：“上当了，上当了！”要知猪八戒为什么上当了，这节课就来解决这个问题。这样导入新课，学生的情绪很高，一个个都在集中精力听讲。

2．实践激发兴趣

好动是小学生的特点之一，让他们动手操作，一方面能增加其感性认识，另一方面容易激发起他们的学习兴趣。我们知道圆周率π既是教学的重点，又是教学的难点，我在讲这个问题前，先把学生分成四人小组，要求上课前每个小组都带回一个圆环和一条细绳。上课时告诉学生，今天讲‘圆周率π”。要想知道π是什么意思，只要大家先动手测量圆环的周长和直径的长，并把圆周长与直径长作一比较，问题就解决了。学生听后立即动起手来，而且都在认真地量，细心地算。结果发现，不管圆环的大小如何，他们的周长都是其直径的三倍多一点。此时老师总结：“圆周长与直径的比是一个定值，这个值称做圆周率，记作π，它的大小约等3.1416。”

3．竞争激趣

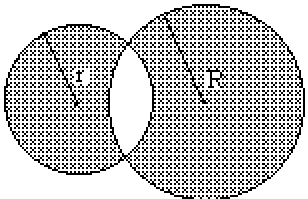
好奇好胜是小学生的又一特点。把竞争机制引入课堂，同样能激起学生的学习兴趣。再加上教师的鼓励和表扬，能使好者更好，差者急追。如我出了这样一道题：$\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$，要求计算它的值，并提出要比谁算的快而准，谁的计算方法好，算完后马上举手，最后一起报告答案与算法。结果有的学生一项一项的加，当然算得较慢；有的把所有的$\frac{2}{7}$先加起来再与$\frac{3}{7}$相加；又有的这样算：$\frac{2}{7}\times 4+\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\times 3=\frac{8}{7}+\frac{3}{7}+\frac{6}{7}=2\frac{3}{7}$；还有的这要算$\frac{2}{7}\times 7+\frac{3}{7}=\frac{14}{7}+\frac{3}{7}=2\frac{3}{7}$；再有的这样算：$\frac{2}{7}\times 7+\frac{3}{7}=2+\frac{3}{7}=2\frac{3}{7}$。老师最后作一总结，肯定并表扬了后两种算法，使每个学生都受到激励和启发。

加里宁曾经说过：“数学是锻炼思想的体操。体操能使你身体健康，动作敏捷；数学能使你的思想正确敏捷。有了正确的思想，你们才有可能爬上科学的大山。”一个人只要智力发达了，就能有正确的思想，因此开发学生的智力非常重要。开发学生智力的工作可以内、外结合进行，我采用的方法是：

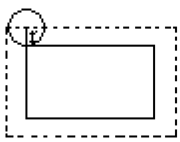
1．做智力题

例如：已知半径分别为 r 和 R 的两圆相交（如图一），求阴影部分的面积。

按通常的想法应先求出没阴影部分的面积，然后再求阴影部分的面积，这样求很难求。若想到被减数与减数同加上一个相同的数，其差不变的性质，此题马上可以解出，其值为π（R^2-r^2）。



图一



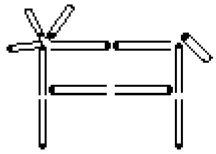
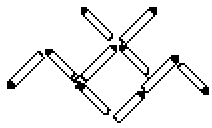
图二

又如：图二，一个半径为 r 的小圆，沿着一个正方形各边滚动，小圆的圆心滚出的痕迹是否如图所示？为什么？

2．做火柴趣题

（1）如图一，用 13 根火柴摆成一头牛，牛的头朝西，你能只移动其中的两根火柴，使这头牛的头朝东吗？

（2）如图二，用 10 根火柴摆成一个蝙蝠，这个蝙蝠的头朝上，限你只移动其中的 3 根火柴，使这个蝙蝠的头朝下。

图一　　　　图二

答案提示：由图一看出，牛头朝东还是朝西，关键决定组成牛头的三角形，而且牛嘴的方向就是决定牛头的方向。因此只要把牛嘴的方向一变就行了。

由图二知要这个蝙蝠头朝下，一要改变两只耳朵的方向，二要改变两个翅膀的方向。由于限你只准移动其中的 3 根火柴，所以移动时要充分利用原图中未动的部分，也就是要知道每移动一根对蝙蝠的耳朵和翅膀的改变方向有多大的作用。根据图形的对称性，如果把蝙蝠身子左下方的一根移到它的右耳朵和右翅膀处，则蝙蝠的身子有了，朝下的一只耳朵也有了，改变方向的右翅膀也基本形成了，这一根是移动的关键，只要移好了这一根，其他的两根就知道该怎么移了。

3．猜数学中的谜语

谜面谜底（算术中名词）

（1）时刻准备着；　　　　（1）等号；
（2）两边清点；　　　　　（2）分数；
（3）再见吧，妈妈；　　　（3）分母；
（4）四、三、二、一；　　（4）倒数；
（5）考试作弊；　　　　　（5）假分数；

（以下谜底为一数字）

（6）数字虽小，却在百万之上；　　　　（6）；
（7）两个蚂蚁抬根棍，一个蚂蚁上面困；　（7）六；
（8）摘掉穷帽子，挖掉穷根子；　　　　（8）八；
（9）添一笔，增百万，减一笔，少九成；　（9）十；
（10）舌头。（10）千。

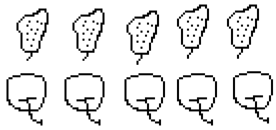
加强思维训练　提高学生思维素质

福建省连城县姑田中心小学　杨水萍

思维是人脑对客观事物的一般性和规律性的一种概括反映过程，大纲中明确提出，学生初步的逻辑思维能力的发展，需要一个长期的培养和训练过程，要有意识地结合教学内容进行。如何加强思维训练，提高学生的思维素质呢？现就此谈谈笔者的认识。

一、注意在操作中，培养学生思维素质的准确性

具体形象思维是低年级学生思维的主要形式，好动是低年级学生的年龄特点，因此低年级学生在教学中必须从学生的年龄特点出发，加强直观引导，让学生的实际观念、操作、多种感官参与下进行学习。例如：在教学“两数相差多少”的应用题时，让学生做如下操作：1）先让学生摆 5 个苹果，再在苹果下面相对地摆 3 个雪梨。如下图：



老师提问苹果与梨相经结果怎样？梨与苹果比结果又如何？让学生边摆边说；2）如果梨和苹果同样多，梨应再摆几个？梨一共是多少？摆一摆；3）现在如果苹果比梨多 3 个，那么苹果又应该是几个？摆一摆，操作后让学生回答以下问题：（1）看桌上摆的苹果和梨想谁多谁少？（2）谁可以分成两个部分？哪两个部分？（3）如果要求苹果比梨多几个，可以怎样想？这样让学生边动手操作，以操作诱发思维，用思维指导操作，再用语言叙述思维。这种手到脑到的方法，不仅有助于学生理解和掌握知识，而且培养了学生思维的准确性。

二、注意纵向思维训练，培养学生思维素质的深刻性

思维的深刻性即思维的深度，指善于深入问题本质和核心，追究现象间的因果关系，不为表面现象所迷惑，在学习中表现为重视内在联系和规律。如，教学 25×112 时就可以运用有关乘法运算定律解答：

解法一：25×112=25×（4×28）=25×4×28=100×28=2800

（先把乘数分解后，运用乘法结合律进行计算。）

解法二：25×112=25×（100+10+2）=2500+250+50=2800

（运用乘法分配律）

在教学中还经常发现有些学生在学习上满足于一知半解，对概念不求甚解，做练习是照葫芦画瓢，不去领会解题方法的实质，这反映了学生在思维上的惰性。要克服学生这种惰性，首先要克服学生思维的表面性和绝对性，这就要求教师善于挖掘教材，引导学生的思维。例如：在二年级数学的教学中有这样一道题：“若三个连续自然数的和是 18，则这三个自然数分别是多少？开始学生不是抓住问题的本质而是先写出一组一组的自然数，再看看哪一组的和会等于 18，从而得到答案。如果教师只是满足于答案的正确与否，而不了解答案的由来，学生的思维就得不到发展。此时教师应引导学生深思，发现问题的规律，即只要用三个自然数的和除以它的个数“3”，就可以找出中间的那个数，从而得到问题的解答。通过这样的教学，学生不但会解题，其思维的深度也得到发展。

三、注意顺向思维和逆向思维相结合，培养学生思维素质的广阔性

思维的广阔性即思维的广度，它是思维具有灵活性的基础，也是发展教学综合能力的条件。在数学教学中教师要引导学生的思维，由封闭状态逐步转化到开放状态。教学中应当提倡多角度多层次的思维，引导学生从多方面思考问题。如在讲解分数乘除法的应用题时，提出如下两个已知条件：甲种树 50 棵，乙种树 40 棵，根据这两个已知条件让学生从不同角度提出条件所涉及到的各种问题：

1）甲种树的棵数是乙的多少倍？

2）乙种树的棵数是甲的几分之几？

3）甲种树的棵数比乙种的多几分之几？

4）乙种树的棵数比甲种的少几分之几？

5）甲种树50棵，乙是甲的$\frac{4}{5}$，乙种树多少棵？

6）甲种树50棵，是乙的$1\frac{1}{4}$倍，乙种树多少棵？

7）甲种树50棵，比乙多$\frac{1}{4}$，乙种树多少棵？

8）乙种树40棵，甲是乙的$1\frac{1}{4}$倍，甲种树多少棵？

9）乙种树40棵，甲比乙多$\frac{1}{4}$，甲种树多少棵？

10）甲种树50棵，乙比甲少$\frac{1}{5}$，乙种树多少棵？

11）甲、乙共种树90棵，甲是乙的$1\frac{1}{4}$倍，甲乙各种树多少棵？

12）甲比乙多种10棵，甲是乙的$1\frac{1}{4}$倍，甲、乙各种树多少棵？

13）甲乙共种树 90 棵，甲比乙多种 10 棵，甲、乙各种多少棵？

通过这些问题的变换教学，一方面使学生透彻地理解乘除法应用题的三种类型题目之间的内在联系，另一方面从不同角度开阔学生的思路，发展了学生思维的广阔性。

四、注意横向思维训练，培养学生思维素质的灵活性

思维的灵活性具体指思维活动能根据客观情况的变化而变化，也就是能随机应变。可是有的教师在讲授例题时过多地强调解题的程式化，容易造成学生只能套用模式解题，而不能开拓学生思路。因此我们在教学中应给学生提供联想的机会，启发学生从多角度思考同一问题。例如“ 东风村计划修一条长 480 米的公路，前 6 天修了 20%，照这样计算，修完这条公路还需几

天？”一般的学生得出如下两种思路和解法：

解法一：要求还需几天，先要知道还剩多少米未修和每天修多少，于是列式为：

（480-480×20%）÷（480×20%÷6）

解法二：要求还需几天，可以先算修完这条路共需的天数，以及已修的天数，于是列式为：

480÷（480×20%÷6）-6

为发展学生思维的灵活性，应启发引导学生从另一角度去考虑，若把这条公路的长看作一个整体，又可以得到如下解法。

解法三：1÷（20%÷6）-6

解法四：考虑还未修完的部分是已修完的几倍列式为：

6×[（1-20%）÷20%]

解法五：根据已知一个数的百分之几是多少，求这个数的思路来解，列式为：

6÷20%-6

这样教学可以加快学生的思维节奏，培养学生思维的灵活性。

实践证明，在教学中，从多方面、多角度对学生进行思维训练，不仅有利于调动学生的学习积极性，而且还能培养学生的思维能力，提高学生的思维素质。

大面积提高农村中学
初中数学教学质量的探索

广东省中山市横栏镇六沙中学　江展增

随着九年义务教育的实施，初中数学的教育已由应试教育转为素质教育，如何大面积提高学生的素质将是我们研究的课题。我们知道学生对感兴趣的学科，总是想方设法去学好它。而不同的学生又有不同程度的学习兴趣，如何使每一个学生的学习兴趣由原来的层发展到更高的层次，最大限度地调动起不同层次学生的学习积极性，这是值得研究的课题。我的试验模式是：分层激励——分组讨论——分层训练——分层辅导。

一、分层激励，调动不同层次学生学习的积极性

一个农村中学教学班的全体学生，由于诸多因素的影响，成绩相差很大，有的学生分数是 90 多分，有的学生分数是个个位数字，因此学生学习数学的兴趣就有不同的层次。如何使每一个学生的学习兴趣都有所提高，我是注重以下两点。

（1）相信全部学生都能学会数学

我坚信学生只要生理无缺欠，都可以学会数学，如果不能坚持这一信念，就会使一部分学生，不能从教师的期待、信任、关怀中得到鼓励和勇气，造成师生间感情的疏远，甚至发展到厌恶数学，放弃学习，更谈不上学习兴趣，直接影响教学的质量。

（2）接受现状，分层激励

学生过去的素质，总会有一些不能令人满意的地方，这就要求教师从中吸取经验教训，若对学生的基础进行责怪，则是有害无益的，它只会损伤学生学习的兴趣，只有从现状出发，制定和实施激励学生的科学方案，才能提高学生的素质。

具体实施情况如下：

组别	试验前统考成绩	三条激励方案
第一组	90≤成绩≤100	（1）在六个组中，每组在每次测验成绩前三名同学各获一面红旗； （2）在六个组中，每组每次测验成绩每超越一个组别获一面红旗； （3）满分双倍红旗奖励。
第二组	80≤成绩＜90	
第三组	70≤成绩＜80	
第四组	60≤成绩＜70	
第五组	50≤成绩＜60	
第六组	成绩＜50	

这样分组有两个目的：一是使每一个学生心中明确自己的竞争对象，有了竞争，就有了进步，他们的素质就一步步地提高；二是便于教师正确评价每一个学生在每一阶段的进步。然后教师在学期末统计每一个学生获奖的次数，及时与学校、家长联系，使学生取得的进步得到肯定，从而引导他们对数学产生不同程度的学习兴趣，并向更高的兴趣层次迈进。这是大面积提高学生的素质的第一步。

由于重视对学生的科学激励，试验班学习有困难的学生，由 12%下降到3%，不同层次的学生都有所提高。

二、分组讨论，激发兴趣

学生的大脑是一架有创造力的“ 机器 ”，决不仅仅是贮藏知识的仓库，因此，教学不只是简单的知识传授过程，更重要的是激发学生去发现数学规律。因此，我在每一知识点（法则、性质、公式、公理、定理、数学思想和数学方法）的出现之前，尽量经过全班同学前后四人的分组讨论（其中一人优生，一人差生，二人中等生），让不同程度的学生都能有发言的机会，从而培养每一个学生认真思考、敢于创新的思想。

例如，我在教三角形内角和定理时，我是这样启发的：同学们在小学曾经做过实验，把一个三角形纸板的三个角拼在一起，发现它们组成一个平角，从而知道三角形的内角和等于 180 度。现在，如果不允许把三角形撕开或翻折，你有什么办法能发现三角形内角和等于 180 度？接着前后四个同学分组讨论。然后教师综合每个小组讨论的结果，第一种：度量三个内角的度数，

再算一算它们的和；第二种：利用尺规作图，作一个角使它等于三角形三个内角的和，再度量它的度数，或者观察它的两边是否在一条直线上；第三种：利于两直线平行，同位角、内错角相等的原理作辅助线。最后教师总结每一种做法的可行性和优越性，得出三角形内角和定理的另一种证明方法。

上述分组讨论方法，不仅活跃了课堂气氛，开阔了学生的思路，而且培养出大批的优秀生，试验班学生的优秀率由 33%上升到 55%。

三、分层训练，培养兴趣

（1）以第五、六组的同学思维水平为起点组织课堂教学。实践表明：要大面积提高教学质量，课堂教学是关键。经过调查，在课堂教学中大批的中下等生的思维很难跟上教师的讲课进度，因此便要求教师的课堂教学必须以第五、六组的同学思维为起点，对新课的引入、新课的讲解、新课的练习设计等，即以使五、六组的同学能够听懂、学会为出发点。

（2）为了突破教材的重点、难点，除了教师的启导外，学生的科学练习也十分重要，因此，我按照层次性原则安排训练阶段，每一个阶段一般围绕一个中心，突出一个重点。如有理数运算的训练我把它分为三个阶段：第一阶段是直接使用法则，以符号法则为重点，单一运算为主，目的在于熟练掌握法则和符号；第二阶段适当加大数的绝对值，增多小数、分数四则混合运算，重点提高数字计算能力；第三阶段是较复杂的四则混合运算，重点是处理运算顺序，适当设置运算技巧，向合理、灵活的高层次发展。

由于重视运算的奠基工程，学生的基础比较扎实，实验班学生的合格率，由 66%上升到 90%。

又如证明三角形全等的训练，我把它分为三个阶段：第一阶段是归纳旧知识得出边、角相等 10 种基本方法，重点是训练几何证明题的入门；第二阶段是掌握证明三角形全等的公理或定理的条件，重点是熟练公理、定理的判定运用；第三阶段是较复杂证明题的分析、证明，重点是掌握推理的合理性及一些证明技巧。

由于有第一层次的引导，很多同学对证明题都不会感到困难，从而树立了学习证明题的信心。95 学年度初二级市统测达到平均 80 多分，取得镇里学科竞赛高出镇平均分 7.85 分的好成绩。

四、分层辅导，培优扶差

任何一个教学班的学生，对数学的学习兴趣都存在着明显差异。而传统的课堂教学必须面对大多数学生的实际水平，结果会有部分学生“吃不饱”，如果不注意对这部分学有余力的学生的培养，很可能挫伤他们求知的积极性，甚至可能埋没人材。因此，我们设立了三个级的三个数学竞赛辅导班，把每个班的尖子生进行竞赛内容的辅导。

其次，我们树立“转化一个学习有困难的学生同培养一个优等生同样重要”的教学思想，成立了初一级、初二级、初三级的后进生辅导班。主要是针对后进生接受能力差的特别，采用“多活动、低起点、小步子”的数学方法，帮助他们复习学过的知识内容，使他们的学业成绩有所提高。

五、总结成绩，再接再励

经过几年来的学习——总结——试验——再总结，我们主要是围绕以上四个方面进行培养学生学习数学的兴趣，探索大面积提高农村中学初中数学教学质量的做法，并取得一定的成绩，主要表现在实验班实践一个学期后的合格率达 90%，优秀率达 50%，差生率控制在 3%左右。1996 年 12 月 2 日至 6 日，作者在佛山市召开的广东省数学会 96 学术第五次年会上，作了题为《如何分层次培养学生学习数学的兴趣》的经验总结，与会者普遍认为这是大面积提高农村中学数学教学质量的试验。

运用尝试教学法培养学生的思维能力

广东省深圳市龙岗区大鹏镇教办　庄伟炎

1994 年，我到横岗中心小学听邱学华教授讲学，并观摩了他的讲课。这次观摩使我进一步认识到尝试法的实质，它不单是一种简单的小学数学教法，还适用于中学教育、幼儿教育等等。它重视训练学生思维和培养学生各种能力，便于实施素质教育。

培养学生的学习兴趣和调动学生的思维积极性，是培养学生各种能力的前提条件。小学教学大纲规定：“小学数学要培养学生的逻辑思维能力。”下面我就如何运用尝试法培养学生的思维能力这一内容谈谈看法。

一、培养学生思维的流畅性

尝试教学的第一步是准备练习，准备练习是一节课最基本的训练，起着架桥铺路的作用，运用知识的迁移，揭示新旧知识的联结点，有利于培养学生思维的流畅性。

从理论上讲，思维的流畅性是指解决某个问题或认识新事物，运用一些有关信息，迅速作出反应，当机立断，思路敏捷。准备练习就是为思考新问题所提供的一些必要信息，所以要使学生的思维流畅，必须注重抓住新问题的生长点，选择承上启下的内容，精心设计形式多样的类型，激发学生的兴趣，创造活泼的思维气氛。如我在教工程问题时，设计如下准备练习：

1．一本书小朋 8 天看完，每天看几分之几？如果每天看 1/4，几天可以看完？（学生讲出数量关系，教师板书）

2．一块地 600 公亩，甲拖拉机 20 小时可以单独耕完，乙拖拉机 30 小时可以耕完，两拖拉机合耕几小时可以耕完？

3．一块地 900 公亩，甲拖拉机 20 小时可以单独耕完，乙拖拉机 30 小时可以耕完，两拖拉机合耕几小时可以耕完？

通过练习，特别是 2、3 题的比较，工作总量不同，为何答案相同，解题过程和解答这个问题都必须运用工程问题的知识。如果把总量不要，便成了尝试题（和例题相似）。这样通过准备练习沟通新旧知识联系，提供思考新问题的必要信息，使学生思维畅通无阻，培养了学生思维的流畅性。

二、培养学生思维的灵活性

思维的灵活性，这里主要是指学生认识客观事物或解决具体问题时思维活动的灵活程度。为了培养学生思维的灵活性，可采取以下几种做法：

1．直接让学生去做尝试题。

2．先让学生自学课本，然后再做尝试题。

3．先让学生看书自学，学生互相讨论后做尝试题。

4．学生自学课本，教师指导自学，然后学生互相讨论，最后才做尝试题。

学生在学习中，教师指导方法的灵活程度会起到潜移默化的作用，不但培养了学生思维的灵活性，还培养了学生学习的兴趣。

此外可设计题组练习，培养学生思维的灵活程度。题组练习多指同类问题或一道题经过变换条件而成的几道题，学生通过练习、分析、比较、沟通数学知识之间的联系，揭示事物本质，培养学生灵活处理问题的能力。

三、培养学生思维的创造性

思维的创造性，是指学生以独立思考，作出与其它同学不同的设想和发表独特新颖的见解，找出解决问题的新方法或最佳途径。

传统教学法多似“满堂灌”、“一支粉笔，一张嘴上课从头讲到尾”为主，而尝试教学理论的基本观点是：学生能尝试，尝试能成功，体现三个为主（以学生为主体，以教师为主导，以练习为主线）。给课堂创造了一种民主、和谐、活跃的气氛，给学生创造性思维提供了先决的条件，学生主动探索的精神得到培养和发展。

尝试题出示后，教师不讲，不做任何提示，先让学生尝试，相信学生是学生发挥创造思维的兴奋剂。如教较复杂的分数应用题（例 1 一个发电厂有煤 2500 吨，用去 3/5，还剩多少吨？）时，我直接用例题作尝试题，出示题后我说：这题我们还没学，但我相信大家都会解这道题，大家动脑筋试一下好吗？这话是活跃学生思维的兴奋剂。当然，教师要因材施教，要分出新知识的难易，像例 1 和第一单元的简单分数应用题，衔接性十分强，而且准备

练习中提供了很多必要的信息，这对六年级的学生来说是轻而易举的事。结果，学生出现几种解法：（1）通过画图用归一法做：2500÷5 ×（5-3）；（2）2500-2500×3/5；（3）2500×（1-3/5）。学生解尝试题在老师没有讲的情况下，鼓励他们自己去探索，思维的方向不受限制，出现了不同的做法，训练了学生的创造思维。这种训练的方法主要是先让学生通过尝试，主动地获得解题的途径，达到充分训练思维的目的。

四、培养学生思维的批判性

思维的批判性是指思维活动中善于冷静地思考问题，对别人的意见和结论，经过自己严格地考察和客观地评价而决定取舍，对自己的思维成果也善于自我批判。它集中表现为有自己的独立见解，具有明辨是非，正确评价他人与自己的思想和行为的能力。

尝试教学中，学生做完尝试训练后，可能一部分学生做对了，一部分学生做错了。这时，学生期望教师的讲解来判断自己的正误，而教师却安排学生讨论，让学生说出自己对的道理在哪里，别人错又错在哪里，让学生互相讨论，甚至争论，不但活跃了课堂气氛，而且给学生评价别人的思想，全面检验自己的机会，从而培养学生的批判思维。

如十二册按比例分配应用题，我设计的尝试题为“四年级（2）班学生48 人，男、女生人数比是 5∶3，男生多少人？”学生完成尝试题有四种解法：（1）归一法：48÷（5＋3）×5；（2）比例分配法：48×5/（5＋3）；（3）倍数法：48÷（1＋5/3）×5/3；（4）分数法：48÷（1+3/5）。当然也有的同学做错了，这时，我先不讲，而是让学生互相讨论，因为学生心理有数，讨论的气氛十分热烈。讨论过程中每个同学最少要把自己的思维过程再呈现一次，同组的同学可以互相评价，增强自我评价和评价别人的能力，从而培养了思维的批判性。

五、培养学生思维的深刻性

思维的深刻性，是通过积极的思维活动，善于在纷繁复杂的表面现象中抓住事物的本质揭露事物产生和发展的原因，预见事物发展的进程和结果。

小学生的思维特点是以具体性为主，缺乏抽象的逻辑思维。特别是中下层学生，在思维活动中难免会出现破绽或错误。这就要求教师的点拨、讲解、归纳。点拨学生联想、比较、分析问题，启发学生全面地深入思考问题，抓住问题的实质，然后抓住学生难以解决的知识点，教材的重点进行讲解，归纳解题的规律，培养学生思维的深刻性。

如三年级的有关多少的应用题我归纳如下：（1）先审题弄清谁与谁比，谁多谁少；（2）找求多的还是求少的或是相差的；（3）求多的用少的加上

相差的，求少的就用多的减去相差的，求相差的用多的减去少的。注意的一点是教师归纳解法后，千万不要让学生死记硬背，可取的方法是让学生说方法、想思路，练思维，从而培养学生的深刻思维。

再如六年级的分数应用题是小学数学教学的重点和难点，很多老师为此头疼。其实只要你先让学生动手画图分析，动脑看清题意，然后教师加以归纳总结，关键是教给学生找准标准量的方法，问题就迎刃而解了。先让学生不断尝试得出解题的途径，思维得以充分的训练，然后教师再归纳讲解，培养了学生的深刻思维。

总之，尝试法的理论与思维的培养原则是同步的。尝试法注重知识的迁移，体现三个为主，课堂突出一个“趣”字，方法突出一个“先”字，鼓励学生，相信学生，讨论时胸有成竹、畅所欲言，使学生始终保持积极的思维状态，培养了学生思维的流畅性，训练思维灵活性和批判性，加强思维的深刻性，发展了思维的创造性，培养学生思维能力，提高教学质量。

浅谈课堂教学的应变能力

山东省威海五中　丛 礼　袁小娟　张义明

课堂教学的应变能力就是在课堂教学中，当学生的信息反馈出现了教师在教学设计中未曾料到的突发性信息时，教师能通过敏锐的观察，迅速地判断并及时作出准确的处理。

教学活动是师生的双边活动，是信息交流的过程，由于存在智力因素与非智力因素等方面的原因，加上基础的不同，学生发展各异，因而学生的信息反馈就会呈现出多样性和随机性，其中常伴有教师难以预计的信息。这种现象在学生的思维积极性被激发起来的课上出现的机率更大。在这种突发性信息面前若束手无策或措施不当就会影响整个教学目的的完成。因而我们要审时度势，因势利导地处理好这些信息。

课堂教学中的突发性信息，大部分源于学生的认知活动本身，也有少部分来自组织教学中的偶发事件，还有的是来自学生的非认知活动中的突发性信息。

一、对来自学生认知活动本身的突发性信息的应变

对于来自学生认知活动中的突发性信息，教师首先要作出判断，判断这个信息的：正确性、实质与要害、与教学目的的关系以及解决它要花多长的时间等。这些判断要求教师在瞬间做出，若作出判断的时间过长，就会成为“事后诸葛”，失去其实际价值。教师在做出了正确的判断之后，更重要的是进行正确的处理。为了提高课堂效益，可做如下处理：

（1）对于课堂教学中，教师能即刻做出判断，确定对错是非的信息，可

以立即进行处理，包括予以肯定和进行纠正，但要注意艺术性。对于学生独创性的见解和有价值的想法、解法，教师应及时肯定，甚至用赞美的语句给予较高的评价。值得一提的是对一些与正确结论不同的突发性信息的处理，教师应能挖掘出隐含在这些问题内部的有利因素，善于迅速地捕捉它，机敏地分析和处理它，以有利于训练学生的思维能力，完整学生的知识体系，建立正确的认知结构。例如：

在复习三角函数时，有一道涉及坡度（直线斜率）的问题，一学生把坡度解释为："坡角的余切就是坡度。"这个与正确答案相悖的回答顿时引起了学生的哄堂大笑。这时这位教师并未以"坡角的正切才是坡度"作简单的纠正，而是敏锐地判断出学生的回答在科学性上并非错误，可在学生的哄笑中感觉到了学生对坡度的概念没正确领会和掌握，于是他在哄笑的一瞬间迅速而果断地设计出一个小序曲，插入原教学过程中——教师反问："我们能把坡角的余切规定为坡度吗？"学生齐答："不能。"但教师却用极为认真、肯定的语气宣布"能。"此时学生惊奇之余，积极思索"能"的理由。坡度是刻画斜坡的倾斜程度的，用正切可以，用余切当然也可以，能否用正弦、余弦呢？不能用正弦，因正弦函数在（0，π）上，不同的角可能取相同的正弦值。也不能用余弦，因｜cosα｜≤1，用余切可以，但为什么不用呢？因正切函数递增，比余切更方便，所以用正切。至此，学生对这个概念的认识已由朦胧模糊转为透彻理解，收到了可喜的教学效果。

（2）有一些突发性信息，教师虽能判断学生提出的有道理，但对于引出的结论的真伪或方法的好坏，却不能"一眼看到底"，这时可将教学过程和分析过程放慢，在讲述分析的同时师生积极思考，当分析、讲述到某一步时，会获得豁然开朗的结果。因为在这特定的环境逼迫之下，教师必须高度地思维，从而应变出有价值的解决问题的思路和方法。看下面一例：

若$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-1=0$，$b^4+b^2-1=0$，且$ab^2\neq1$，则$\frac{ab^2-1}{a}$的值为多少？讲解本题时，学生突然发问："用构造方程法，即由条件知$\frac{1}{a}$，b^2是方程$x^2+x-1=0$的两个不等的实根，然后用韦达定理去解行不行？"凭直觉这种想法抓住了问题的主要特征，但最后用韦达定理如何去求及能否求出尚无把握，于是教师不做评价，先予以肯定思路的可贵之处，然后与学生一起分析讨论。当分析到$b^2-\frac{1}{a}>0$时，$\frac{ab^2-1}{a}=b^2-\frac{1}{a}=\sqrt{(b^2+\frac{1}{a})2}=\sqrt{(b^2+\frac{1}{a})2-4b^2-\frac{1}{a}}$，豁然开朗，解得值为$\sqrt{5}$。这里教师的应变能力在培养学生大胆想象的学习态度上起到了良好的催化作用。（3）教师的应变能力还表现在一开始就觉察出这一突发性信息的错误及其典型性。但不急于进行纠正，而是顺着他的错误思路或结果，推出相互矛盾的结论，从而加深对概念、性质的理解。

例如：在复习三角形的三边关系时，有这样一道习题：一等腰三角形的两边长是方程 $x^2-10x+21=0$ 的两个根，则三角形周长是多少？大部分同学求得的周长是 17，突然一学生提出："老师，应该是 17 或 13。"这一解答是错误的，根源在于没有理解三边的关系。教师没直接指出 13 是错的，而进行了如下的分析：周长为 13，即腰长为 3，底为 7，则出现 $3+3<7$。这与三角形的任意两边的和大于第三边相矛盾，所以周长为 13 是不可能的。培养了学生考虑问题的全面性。

二、教师应变能力还体现在对自己偶发错误的处理上

由于数学本身的抽象性、逻辑性、严密性和灵活性，所以教师偶尔也会发出错误的信息。当错误信息尚未被学生发现，而迅即被自己察觉，可视错误的性质或立即改正，或作为是非题让学生判断，指出其错误所在。当错误信息被学生发现并指出时，教师不必自圆其说，应实事求是，认真寻找错误的原因，为学生树立勇于承认和修正错误的榜样。

三、对源于学生的非认知活动的突发性信息的应变

突发性信息有时源于学生的非认知活动，因此教师的课堂应变能力还包括教育方面的应变能力。例如，一个偶然的因素使宁静的教室气氛骚动起来，若教师处理不当会影响教学活动的进行和教学目的的实现。这时教师的应变能力体现在机敏地洞察信息的特征，及时调整教育教学措施，变被动为主动，化消极因素为积极因素。例如：

一次数学课上，一只麻雀突然飞进教室，顿时吸引了全班同学的注意力，先是好奇，继而骚动、起哄。教学过程只好中断，而对这一情况，教师急中生智："麻雀飞得多舒展啊！但大家想过没有，麻雀能飞，我们人为什么不能飞？"学生抢答："人太重了。"教师追问："飞机更重，为什么能飞？"学生哑然。这时教师趁势说："麻雀、飞机能飞起来有许多科学道理，数学知识中有一个升力公式能解释这个现象。若我们现在集中精力学好基础知识，以后能懂得这个公式，彻底弄清飞机能飞的原由。"教师即兴应变的一席话，重聚了学生的注意力，恢复了正常的教学过程，并激发了学生学习知识的兴趣。

总之，教师的应变能力是教师从事创造性劳动必不可少的心理品质。它是敏锐的观察，灵活的思维，准确的判断，果断的处置等心理素质的有机结合。作为一名教师，只有不断地充实和丰富数学专业知识，扩大知识面，研究学生的认知规律，认真学习教育学、心理学，提高应变能力，才能积极能动地适应千变万化的情况，机敏地联系教育教学目的，富有成效地处理多种多样的，意想不到的突发性事件，切实提高课堂效益。

加强对《立体几何》中的概念和定理的理解与巩固的一点体会

河南省沁阳县教师进修学校　李永德

由于《立体几何》中的定义和定理较多，加上学生的空间想象力较弱，所以多数学生感到概念和定理难以理解。因此，我在教学中花费了一些功夫，有经验，也有教训。现从以下几个方面谈些体会。

一、直觉观察，导入概念

直觉观察导入概念，就是让学生观察实物或图形等，在教师的引导下，经过思考，获得对一类事物的某种特性的认识，从而导入这类事物的概念。这不仅有利于培养学生敏锐的观察事物的能力，而且也有利于培养学生丰富的空间想象力和周密的审题能力。因此，我在教学中，充分利用典型的实物或图形让学生细心观察，揭示其特点，用来导入概念。

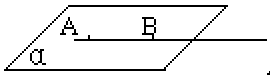
如：在讲“空间两直线位置”关系时，就以眼前的教室为例，让学生观察（横梁与横梁、横梁与门框的竖直边缘、相邻两墙面的交线与墙面和地板面的交线等）。在讲“二面角”的概念时，让学生观察三角铁或相邻两墙面所组成的图形等，认识其特点，从而导入二面角定义。在讲“直线与平面平行的判定定理”时，让学生观察横梁与黑板面的横边缘的位置关系，进而说明横梁与黑板面平行。在讲“异面直线所成的角”时，让学生观察典型的正方体中的棱，用来说明异面直线所成角的大小。在讲多面体和旋转体的概念时，让学生观察模型，认识特性，导入定义。这样，化抽象概念为具体形象概念的方法，学生感到不陌生，易于接受，增强了学好几何的信心。

二、借助旧概念，讲解新概念

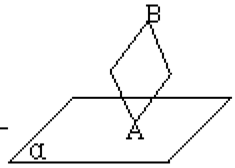
当一个概念与另一个概念相似或有直接联系时，可借助旧概念讲解新概念。

如：在学习“平面”的概念时，我先从直线说起，指出“直线”与“平面”都是原始概念后，问：“你能画一条完整的直线吗？”学生感到问题提的新鲜、容易，随手在纸上画了起来。我说，你们画的都不完整，因为直线是无限的，它就是画上十年、二十年后，还可以继续画。这时，学生的兴趣正浓，又指出：正因为画不出完整的直线，才用画直线上的一段来表示，但决不止这么长。紧接着又说：“平面也是如此，平面可叙述为：它没有厚薄，很平很平，没有大小，可以向空间无限伸展的面，故也只能用平面的一部分（平行四边形）表示。”其结果，加深了理解，提高了教学效果。当我在讲

平面的基本性质时，再也没有人对图（1）说：直线 a 有两点在平面α内，但不全在平面α内；也没有人对图（2）说：α与β相交只有一个交点，但没有交线。这正因为是学生深刻理解了直线和平面的概念结果。



图（1）



图（2）

又如：在学习“异面直线”定义时，（不同在任何平面内的两条直线叫异面直线）容易引起学生误解。我在教学中，为了讲清其含义，先从什么叫平行直线和相交直线讲起，在直觉观察、演示既不平行又不相交的两直线位置关系后，指出：异面直线的实质就是“既不平行又不相交”的两条直线，因为，两直线平行或相交都在同一个平面内，所以，既不平行又不相交的两条直线就不可能在同一个平面内；不可能在同一个平面内的两条直线就是“不同在任何平面内的两条直线”。通过这样的铺路搭桥，使学生达到了真正理解的程度。在一次单元测验中，对有关求异面直线的问题，学生几乎没有什么错误。这说明学生真正掌握了异面直线的概念，不是靠硬背，而是靠理解。

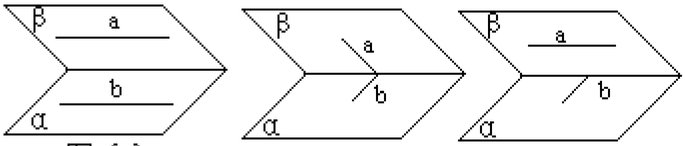
三、剖析概念，讲清关键词句

几何中的许多定义、定理都有关键词或关键句，为使学生理解其含义，教师可把定义、定理中的条件加以剖析，可化难为易。如：“二面角的平面角”定义，学生都叙述不清，可把它分成三个要点：（1）过棱上一点；（2）在两个半平面内；（3）垂直于棱。又如：“三垂线定理”中的条件可分为：（1）平面内的一条直线；（2）与射影垂直，等等。它们是缺一不可的，否则结论不成立。这样，既便于理解又便于记忆。

四、利用图形，明确概念

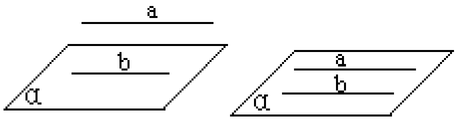
“概念”与“图形”的结合是几何的一个显著特点，因此，利用图形剖析概念，一可显得直观、形象；二可帮助学生明确概念。所以，我在教学中，特别重视概念与图形结合。

如：分别在两个平面内的两条直线是否是异面直线？大部分学生都知道与定义不符，但又表达不出来。为使学生真正明白，除直觉观察实物以外，可用以下图（1）、图（2）、图（3）来刻画。这样，学生一目了然，从而也进一步明确了异面直线的定义，提高了空间想象能力。



图（1） 图（2） 图（3）

又如：如果一条直线 a 平行于平面 a 内的一条直线 b，那么直线 a 与平面 a 是否平行？学生也容易出错，教师可用下图来刻化。从而也使学生牢固地掌握了“直线和平面平行的判定定理”。



在讲定理时，我也着重画图衬托，教给学生画图方法，并要求学生会根据图形叙述定理。久之，我班学生都能根据题意正确地画出图形，完整地写出已知和求证，提高了语言叙述能力，为推理、论证打下了基础。

五、善于类比、归纳，辨析概念

对某些名称、形式类似的概念，在理解、掌握旧概念本质的基础上，用类比、归纳法辨析概念，效果也是很好的。

如：(1)“平行于同一直线的两条直线平行”与“平行于同一平面的两个平面平行”类比；(2) 在平几里，“过一点而和一条直线垂直的直线是唯一的”与在立几中，“过一点而和一个平面垂直的直线是唯一的”类比，不难发现，对性质类似的命题，把某些正确的平面几何中的元素，换成适当的立几元素，可得到一些类似的、正确的立几命题。

又如：(1)“在空间，过一点与一条直线垂直的直线不是唯一的”与“在同一平面内，过一点与一条直线垂直的直线是唯一的”类比；(2)“在空间，垂直于同一条直线的两条直线不一定平行”与“在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行”类比，又不难发现，性质不类似的命题，在平几中的正确命题，在立几中，结论里要加“不”字。学生明白了这一点，就不会把平面图形的性质生搬硬套到空间图形中。开阔了眼界，提高了认识问题的能力。

再如：$S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)\cdot h'$分别与$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}c\cdot h'$和S直棱柱侧 =c · h'类比，不难发现，当 c'=0 或 c'=c 时，由正棱台侧面积公式，可分别推出正棱锥、直棱柱的侧面积公式。同理，由$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)\cdot l$，可分别推出$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}c\cdot l$和S圆柱侧 $=c\cdot h$。再把圆（台、锥、柱）侧面积公式中的“母线 l”换成“斜高 h'”，就又分别推出相应的正棱台、正棱锥、直棱柱的侧面积公式了。这样，学生对公式既加深了理解，又便于记忆，只

要记住圆台的侧面积公式，其它侧面积公式可自行推出，学生也不用死记硬背公式了。当我在讲完柱、锥、台体的体积公式后，学生很自然地按照类似道理，由台体体积公式分别推出锥体、柱体的体积公式。达到了理解、记忆公式的目的。

六、改变关键词句，指导学生判别正误，加深巩固概念

判断在几何中涉及到地方较多，而判断题已成为巩固概念的常用题型。我曾发现，学生在运用定义、定理进行是非判断时，常容易忽视条件中的关键词，造成判别错误。为此，我在教学中，有意改变定义、定理中的条件，深化巩固概念，并指出：若条件不全或意义不同，结论后面打“ × ”号。收到了较好的效果。

如：确定平面条件中的“ 经过不在同一条直线上三点 ”，可改写为：“ 经过三点 ”；三垂线定理条件中的 “ 在平面内的一条直线 ”，改写为：“ 一条直线 ”；直线和平面垂直的判定定理条件中的 “ 一条直线垂直于平面内的两条相交直线 ”，改写为：一条直线垂直于平面内的两条直线（或任意一条直线） ”等等，启发学生动脑思考，判别正误。久之，学生都能根据要点自编真假是非判断题，用来巩固概念。提高了学生的判断能力。

在数学教学中实施素质教育的方法

海南省万宁市第二小学　黄敬锋

实施素质教育，全面提高学生的素质，是培养 21 世纪人才的需要，也是全面贯彻党的教育方针的体现。实施素质教育重在课堂教学。怎样在课堂教学中实施素质教育？我结合自己的教学情况，做了六年的研究、实验。现就在数学教学中实施素质教育的方法问题，谈几点粗浅的看法。

一、要因材施教，面向全体学生

素质教育的基本要求是要面向全体学生。因为人与人之间的差异是普遍存在的，每个人都有与他人不同的特点。所以，要面向全体学生，唯一的办法是因材施教，不因材施教就不能面向全体学生。这样，我们在组织教学时，要把全班教学、分组教学和个别教学结合起来。在教学过程中，对同一个问题，不同的学生可能会出现不同的心理反应，对特殊情况要用特殊的方法和手段处理。要十分注意学生细微的心绪变化，从而采取针对性的教育。只有这样，才能使每个学生都有信心、有所得、有提高，都有自身成长、发展的机会。

学习兴趣是在教与学的实践中形成和发展的。每一节课都要给差生创造

发言的机会，及时鼓励和调动他们的积极性，使他们不仅在学习上有兴趣，还要有求知的欲望。新颖的教学内容和方法，能使学生聚精会神、兴致勃勃地去学习和探索。教学要善于利用数学的趣味点，引发学生的学习兴趣。要根据教材的特点，设计制作各种教学用具，如色彩鲜艳的挂图，直观形象的教具，生动逼真的投影片等，同时指导学生自己制作学具，使学生的主动性和创造性得到较好的发挥。要调动差生的积极性，有意设置情境、条件，让他们获得成功的喜悦，使他们树立信心，有学好的愿望。同时，要设置一些“聪明课”，调动优生的积极性，使他们学习起来不乏味，认真钻研，积极探求。总之，在教学中要让每个学生的认知得到充分提高，个性得到全面发展。

二、要教给学生学习的方法

小学数学实施素质教育，就是要使学生不仅长知识，还要长智慧，不仅要学会，还要会学、乐学。教学过程既是传授知识、技能的过程，又是培养智能、发展非智力因素的过程。六年的研究、实验表明：要有效地提高学生的数学素质，必须教会学生会学习，掌握好操作、类推、尝试、发现等学习方法。

操作学习法是指动脑动手，把抽象变为形象具体的学习法。小学生思维活动正处在由具体形象思维向抽象逻辑思维过渡的阶段，学习数学知识必须建立在感性认识的基础上。学生在学习过程中只动脑不动手，或只动手不动脑，都是片面的，只有手脑并用，才有可能实现人的全面发展。在学习中让学生动手实践，能有效地激发学生的兴趣，发展学生的思维。学生接触新知识时，感到不好理解，如果换成“实物”让他们操作和思考，就能建立起清晰的概念，发现计算规律，理解数量关系。例如，教一年级学 3 的组成和分解时，在教师的指导下，先让学生用小木棒摆摆、看看，3 可以分成几和几，反过来几和几合起来是 3。学习 4 的组成和分解时，要让学生独立操作推知：4 可以分成 2 和 2，也可以分成 1 和 3，反过来，2 和 2 合成 4，1 和 3 也能合成 4。这样，学生通过自身操作去发现规律，加深了他们对知识的理解，使教与学有机地结合起来，认知的印象非常深刻。

类推学习的方法也是数学学习的重要方法。在教学过程中教会学生运用类推学习的方法，能有效地发展学生的联想能力。众所周知，迁移普遍存在于学习过程中，普遍的迁移是基本概念和原理的迁移。根据迁移规律，我们要有意识地引导学生运用类推学习的方法探索新知识，发展新思路。例如，在教学分数应用题时，教师给出表达两个数量之间倍数关系的一句话：“甲数是乙数的 $\frac{3}{4}$”。教师要让学生深刻理解这句话的内涵，类推出它所蕴含的基础知识。①乙数为标准量，确定为单位“1”；②将乙数平均分成 4 份，

甲数占3份；③乙数是甲数的$1\frac{1}{3}$；④把乙数设为4份，则甲乙两数可合成7份，甲数占总数的$\frac{3}{7}$；……。3这些跟标准量、单位“1”、平均分等基本概念发生了联系，形成了知识网络，对学习分数、百分数应用题以及比和比例奠定了基础，为构建新的知识结构创造了条件。

尝试学习的方法实际上就是练习法、实践法，强调在亲自反复练习中达到正确掌握知识和技能的目的。教学实践表明，有相当数量的新知识，我们不先讲，而让学生用尝试学习的方法学习，然后集体讨论，能使学生更好地掌握所学知识，并获得成功的快乐感。例如，教学“三位数乘多位数”。上课开始，先在黑板上出示如下（左下式）乘数是两位数的乘法竖式：

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 6 \\ \times\quad 5\ 2 \\ \hline \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{r} 2\ 3\ 6 \\ \times \boxed{1}\ 5\ 2 \\ \hline \end{array}$$

然后，指名两位学生在黑板上进行演算（其余学生同时进行练习），在学生演算完以后，教师顺手把刚才学生板演的竖式中的乘积擦掉，并在原乘数的百位上添上一个“1”，使原乘数 52 变成 152（右上式）。这时，不要忙于讲解，而是紧紧抓住乘数百位上的“1”与多位数相乘，其积的末位要写在什么位置上，为什么？怎样算下去？让学生边思考边尝试新的算法。这样，学生经过尝试，自己推得：“三位数乘多位数”的乘法法则，既学到新知识，又分享到了成功的欢乐。

发现学习的方法是以培养探究性思维方法为目标，以教材为基本内容，使学生通过再发现的步骤进行学习。它既是教师教的方法，也是学生学的方法。发现学习的重点特点是学生依靠自己的知识经验，通过独立地观察和探讨，通过实验进行分析、综合的探索，独立地发现和解决某些问题，从而获取新的知识。例如，教学长方体体积计算公式时，教师和学生一起准备 24 个 1 立方厘米的正方体。课堂上让学生任意摆出各式各样的长方体，并让学生回答各自摆出的长方体的体积是多少？长、宽、高各是多少？长、宽、高的乘积与体积之间有什么关系？学生通过对 24 个物体的变式观察,发现了长方体的体积计算公式：长方体的体积=长×宽×高。

以上几种学习方法虽然分开作了叙述，但在学习过程中，它们有时是可以综合运作的，例如操作、尝试和发现学习常常结合运用。除此以外，数学学习常见的还有转化、推理、假设等思考方法。在实施素质教育之时，要注意教材特点，做到有针对性的灵活运用。

三、要加强数学思维方法的培养

根据小学数学知识的特点来划分，小学数学素质一般可分为概念素质、计算素质、解问题素质三大块。在每大块教学中，不仅要引导学生根据教材掌握其思维规律，还要引导学生认识分析与综合、比较与分类、抽象与概括、

系统与具体的思维过程，从而优化解题方法，提高解题能力。例如，教学分数应用题：修路队修一条长500米的路，前4天就修了全长的$\frac{2}{5}$，照这样速度，余下的路还需几天修完？教师要启发学生思考：题中哪些条件之间紧密联系着？哪个条件与问题紧密联系着？怎样转化才能使本题解得快、解得准、解得简？于是，学生迅速在题中数量间作各种审度和比较，得到了各自不同的优化解法：从归一法的思路分析，可得解法一：$1\div(\frac{2}{5}\div4)-4=6$（天）；从对应法的思路分析，可得解法二：$4\div\frac{2}{5}-4=6$（天）；从倍比法的思路分析，可得解法三：$4\times(1\div\frac{2}{5})-4=6$（天）。……对学生经常进行这样的培养、训练，对提高学生的思维素质是很有效的。

四、要加强对学习方法的指导

数学是一门系统性、科学性、逻辑性很强的学科。其自身精确、严密的特性，要求学生具有严格、认真的学习态度。在学习中要注意培养学生良好的学习方法和学习习惯，学会独立思考和探索。具体来说，要力争做到：通过严格训练，引导学生专心听讲，勤学好问，善于思考，并逐步懂得如何通过多种不同的途径去掌握新知识；通过认真指导，引导学生细心看书，逐步学会审题，掌握好重点，不放过疑点，进而构建比较科学的知识系统；通过适当的一题多解、多变的训练，引导学生克服片面、孤立、静止的观点，学会全面地、有联系地、发展变化地看问题，提高分析问题和解决问题的能力。

浅谈几何形体教学中思维能力的培养

福建省惠安县黄塘学区　林国定　庄友辉

发展智力，培养能力是现代教学的目标，而发展智力的核心又在于思维能力的培养。小学生的思维特点是从具体形象思维向抽象逻辑思维过渡，优化这种过渡，需要教师在教学过程中把握知识的内在联系，循循善诱，使学生在学习知识和运用知识之中，使思维能力得到迅速地发展与提高。

一、架桥引航，诱发思维

教育心理学认为：学生在学习数学时，他们的认知结构表现出两种功能：（一）是利用已有的认知结构去学习掌握新知识；（二）是凭借已有的认知结构去解决新的课题。而严密的逻辑性是数学的特点，旧知识是新知识的基础，新知识是旧知识的延伸与扩展。所以教学中把握新旧知识的内在联系。在旧知识延伸的“源头”架桥，在扩展的叉口上引“航”，使新知识的“船

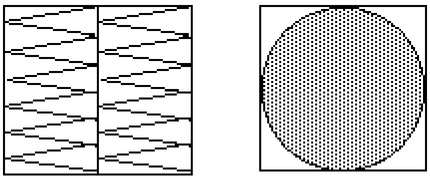
舶”能迅速地固定在原有的认知结构和知识经验的“锚桩”上。

如在学生观察了圆柱体的表面积之后，便引导他们思考下列问题：(1)圆柱体的两个底面能切拼成什么图形？(2)圆柱体的两个底面所拼成的图形与圆柱体的侧面展开图有什么关系？通过问题(1)唤起学生对圆面积推导过程的联想。由问题(2)把学生的思维带到知识的分叉处，不同的联想，得到的解决问题的方法就不同。如果从底面周长相等能拼成长方形，则圆柱体的表面积 S=c×(h+r)(c 为底面圆的周长；r 为底面圆的半径，h 为圆柱体的高)；如果从底面周长相等联想到积的变化规律，就有面积与宽同扩缩的关系。从而把圆柱体表面积的计算转化为计算圆的面积与圆柱体的侧面积之和。所以圆柱体的表面积为：$S=2\pi r^2+2\pi r\times h=2\pi r^2\times(1+\frac{h}{r})$．因此在以后计算 $r=h=3$ 厘米的圆柱体表面积时，同学们可用两种公式求之，计算的结果分别为：$2\times3.14\times3\times(3+3)$ 或 $2\times3.14\times3^2\times(1+\frac{3}{3})$。

通过这样的诱导，使学生立足于已有的知识，思维沿着已架设的“桥”、所引的“航”，不断逼近新知识，使圆柱的表面积计算同化于圆面积，长方形面积的计算和倍数应用题之中。

二、由正及反，扩展思维

心理学研究证明，在某一条件下“真正意味儿童思维成熟是逆向思维的出现。”因此，培养学生思维的一种有效方法就是适时地提供一些逆解材料，引导他们去做和习惯性思维完全相反的探索，使他们以后顺解问题困难时，能自觉地调整思维的



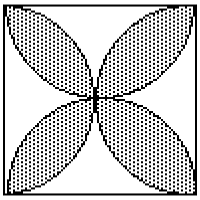
方向，向相反的方向进行猜测、试探、联想出新的意念，产生新的领悟。如下图正方形的面积为 12 厘米^2，求阴影的面积。在学生顺解此题困难时，就引导他们做反向的探索。(1)圆通过切拼能转化为方，而方能否切拼成圆？(2)方切拼成圆应具备什么条件？再引导学生按下图切拼成圆。则拼成圆的周长=正方形的边长×4，而圆的直径 d=正方形的边长，所拼成的圆的周长是直径的4倍，可见能拼成 $\frac{4}{\pi}$ 个圆。所以阴影的面积 $=12\div\frac{4}{\pi}=9.42$ (cm^2)。

通过上述的启发、引导，使学生看到了方和圆能相互转化的辩证思想，

懂得解决问题时还应学会顺解困难时逆解，正面解困难时反寻解法的数学思索方法。

三、数形结合，简缩思维

唯物论认为：数与形不是孤立的，而是紧密联系着的。一般说来，数是形的抽象，形是数的表现。因此，通过形的观察，进行异中求同和寻找彼此之间的联系，再借助数的概念进一步揭示形的本质特征和内在联系。所以数形结合往往能迅速、合理、全面地思考问题和解决问题。



如图，已知正方形的一边长为 6，求其中阴影的面积：观察力弱的同学思维失误或找不到突破口，多数同学按一般思考方法进行观察：（1）计算一叶的面积×4，即$[3.14\times(6\div2)^2\times\frac{1}{4}-(6\div2)^2\times\frac{1}{2}]\times 4$；（2）（S半圆 -$S_{\triangle}$）×4．即$[3.14\times(6\div2)^2\times\frac{1}{2}-6\times(6\div2)^2\times\frac{1}{2}]\times4$．再引导学生对该图进行分解、组合，细致地观察，从而抓住事物内在联系。其本质特征：（1）阴影是四个半圆放入正方形的重叠部分。（2）半圆直径是正方形的边长，从这一点借助于数的概念，得到它们之间的联系是：$S_{半圆}$是 $S_{正方形}$的$\frac{\pi}{8}$。通过这样的启发、诱导，学生顿悟以简代繁，得到较简捷的解法：$6^2\times(\frac{\pi}{8}\times4-1)$。还可引导学生观察阴影与空隙间的关系，通过周密地观察分析发现：正方形的面积减两个半圆的面积等于两个空隙的面积，所以阴影部分的面积 $=6^2-[6^2-\pi(\frac{6}{2})^2]\times2=(\frac{\pi}{2}-1)\times6^2$。这样得到更简捷的解法。

综上，从形的分镜头——分解与组合，探索图形的特点，辅以数量间的关系，来进一步揭示图形的内在联系，本质特点，从而优化了思维过程，提高了解题能力。

加里宁说：“数学是思维的体操。”教学中，如何使学生做好这套“操”，更好地揭示数学教学与思维能力的培养规律，是我们数学教师所追求的教学目标。

浅谈课堂教学中
如何培养学生的数学概括能力

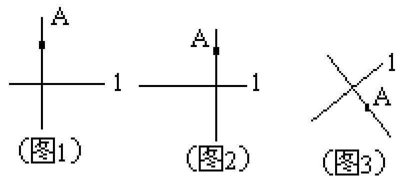
山东省烟台第十四中学　高美兰

概括是一种思维过程，它包含两层意思：一是在思想上把本质特征相同的事物联合起来；二是把被研究对象的本质特征推广为范围更广的包含这个对象的同类事物的本质特征，从数学学习的过程看，无论是数学知识的形成，数学知识的应用，还是在研究知识的来龙去脉的过程中都离不开概括。因此，笔者认为，在课堂教学过程中，培养学生的概括能力应该贯穿于以下过程：

一、贯穿知识的形成过程

数学知识是一个系统化的逻辑体系，而概念是构成抽象逻辑思维的“细胞”，是进行抽象逻辑思维所必备的第一要素。因此，只有重视数学概念和原理的教学，才能确保有效地思维训练。

纵观初中数学课本中的数学概念，它们的定义大多采用“展示实例———抽取本质属性——推广到一切同类事物”的方式给出。教学中应充分展现这类定义的概括过程，要精心选编展现这类定义的教学材料，确保范例的完整性，以便学生在教师的引导下对感知的材料进行准确的加工和提炼，对本质属性进行恰当的综合，因而形成概念，例如，在概括“垂线”概念时，不仅要出示标准图形（图 1），同时应出示变式图形（图 2、图 3），这样，图形的本质特征就得到突出，为学生在教师的引导下顺利地概括定义奠定了基础。



除了正面的引导以外，还可以采取反面的引导方法，“迫使”学生修正错误的认识，概括出正确的定义。例如，概括“二元一次方程”的定义时，先列举正面的实例，要求学生抽象出它们的本质特征，有的“提炼”出：“含有两个未知数且未知数的次数为 1 的整式方程叫做二元一次方程。”在此基础上再出示反例：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，$xy+y=2x$，进而引导学生对二元一次方程的本质属性重新思考，修正错误认识，最后作出正确的概括。

随着学生年龄的增长，学习内容的深入以及学生概括经验的不断丰富，在教学中，引导学生主动、独立地进行包括自己展示实例在内的概括。例如在概括同底数幂的乘法性质时，我首先列举 $2^3\times2^5$ 的实例，在此基础上引导学生运用已有的概括经验，启发学生列举具有相应特征的其它实例，学生不

仅举出了形如 $(\frac{1}{2})^{4}\times(\frac{1}{2})^{7}$，$a^{3}\cdot a^{8}$，$(-3)^{3}\times(-3)^{5}$，$5^{m}\cdot 5^{n}$，等实例，有的还例举出 $(ab^{3})\times(ab)^{5}$ $(a+b)^{8}\times(a+b)^{7}$ 等实例，最最终确保了性质的顺利概括。这样不仅提高了学生自学能力，而且在研究实例的过程中，有效地进行了技能训练，促进学生加深对性质的理解和记忆。

重视知识形成过程的概括，还应体现在知识的产生之后。此时可引导学生将已获得知识纳入已有的知识结构。比如学过同底数幂的运算性质之后，可引导学生将其运算性质纲目性地整理成如下的结构：

$$\left.\begin{array}{l}\text{乘方的意义}\\ \text{乘法运算律}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{同底数幂}\\ \text{的乘法性质}\end{array}\right\}\text{——幂的乘方性质}\\ \left.\begin{array}{l}\text{除法是乘法}\\ \text{的逆运算}\end{array}\right\}\text{——同底数幂的除数性质}\\ \left.\text{积的乘方性质}\right\}\text{——分式乘方性质}\end{array}\right.$$

实践证明，这样的整理，不仅使学生清楚地认识到各个知识在知识系统中的地位和作用，加深对所学知识的理解，加深知识横纵两个方面的联系，同时有利于所学的知识和经验得到广泛地迁移，并随着以上认识的提高，理解的加深，联系的加深，迁移的广泛，最终导致概括能力的提高。

还需指出的是，培养学生的抽象概括能力要重视数学语言的表达训练，做到语言严谨、精练、准确无误。

二、贯穿知识的应用过程

数学是高度抽象的概括化理论，学生学习数学就是学习抽象的数学理论。学习理论必须联系实际，应用于实践。数学学习中最重要的“实践”之一就是运用所学的知识解决问题。长期的教学实践使我认识到，培养学生在运用知识解决问题的过程中的概括能力，不仅有助于知识的系统化，而且对提高学生观察问题、发现问题，分析问题和解决问题的能力有着极大的帮助。

引导学生在解决问题的开始和解决问题之后进行概括是培养学生在运用知识的过程中提高概括能力的有效途径。解决问题开始时的概括，可以确定解决问题的方向，明确解题的思路；解决问题之后的概括，以总结解决问题的经验，把解决问题的经验概括化地积累起来，作为进一步解决问题的基础。比如在解由两个二元二次方程组成的第二类型的二元二次方程组时，我首先引导学生观察各二元二次方程组的项数、系数及其相互间的数量关系，概括出各方程组的本质特征，引导学生运用“消元”或“降次”的思维方法，制定各自的解题策略，从而明确解题方向；在解完课本列举的几种特殊的第二类型的二元二次方程组的基础上，引导学生通过对每一道题的解题过程的反

思，概括在解题过程中涉及的数学思想和方法，使学生清楚地认识到，第二类型的二元二次方程组的解题思路就是通过消元或降次将第二类型的二元二次方程组转化为第一类型的二元二次方程组或二元一次方程组。

解题开始时概括和解题之后的概括在解决问题中的作用是相互关联的，解题开始时的概括为解题后的概括作准备，解题后的概括为下一个问题的概括奠定基础，这样循环往复螺旋式上升，最终必将导致学生概括能力的提高。

在引导学生对形式相同的问题进行概括的同时，还要不失时机地对形式不同的问题运用概括的方法，寻找它们之间本质的联系。例如，平面几何中的“解三角形”和“证三角形全等”及“三角形作图”，虽然形式不同，但三者在本质上是一致的。在数学教学中，我通过精心设计一组练习，引导学生在解题的基础上概括它们的本质联系，使学生认识到，若具备一定的条件（如“SAS”，“ASA”，“AAS”，“SSS”），可以判定两个三角形全等，那么根据这些条件，便可以作出形状、大小唯一确定的三角形，也可以求解三角形（唯一解）；若据条件（如 SSA）无法判定两个三角形全等，那么根据这类条件，作三角形或解三角形时，便要对解的情况进行讨论（一解，两解或无解），这样的概括涉及的知识点跨度大，有助于学生抓住知识的脉络，而且建立了不同知识块之间的联系，有助于学生实现知识与能力之间的迁移。

培养学生在运用知识过程中的概括，要防止搞过窄的题型分类，让学生机械套用，否则就偏离了培养学生概括能力的正确轨道。比如列方程解应用题，通常是根据不同类型将应用题总结成若干类型（如行程问题，工程问题，浓度问题等），从而得出某一类型基本解题思路和方法，但如何把类型搞得过窄，将行程问题分为空中、陆地、水上三种情况，再将各自的情况分为相遇和追及问题，再将相遇问题分为同时出发和不同时出发等，企图全面而无遗漏地概括反而不利于对行程问题中主要数量关系的概括，不利于数学模型的建立，也就是不利于用简化和代替的方法研究复杂问题。久而久之学生只注意题型，而忽视对问题本质特征的分析和概括，学生的思维就会僵化，造成机械学习的不良后果，因此，要正确引导学生认识题型的作用，既要重视题型，又不要迷信题型，解决问题的途径只能依赖于对问题的条件和结论及其相互关系的认真分析，从而找到解题思路。

浅谈学生思维能力的训练与培养

安徽省铜陵县胥坝中学　黄田胜

思维是人脑对客观事物本质特征的反映，它不同于感觉和知觉。以对三角形的认识来说，感知只能反映各种三角形的形状和大小，而思维则能舍弃三角形的具体形状和大小等非本质的属性，而把任何三角形都具有的三条边和三个角这一共同的、本质的特征概括出来。因此，人的思维属于认识的理

性阶段，是更复杂、更高级的认识过程。

一、训练比较的能力

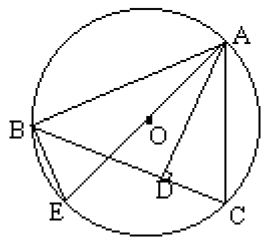
比较是在思维上把对象和现象的个别部分、个别方面或个别特征加以对比，确定被比较对象的共同点和区别点及其关系。有比较，才有鉴别。教师在教学中广泛运用比较，常常通过把这个对象和它十分相似的各种对象进行比较，找出它们之间的不同点，又把这个对象与其它差别很大的各种对象进行比较，找出它们之间的相同点，使学生较容易地明确这个对象的本质特征，来帮助学生突破学习上的难点。

从以上分析可以看出，经常使用的比较形式有两种：一种是同类事物间的比较，如：学习角的概念时，从比较平角、钝角、直角、锐角、周角中，找出其本质的联系，从而得出“有公共端点的两条射线组成的图形叫做角”的概念。再如，要学生建立什么是同类项的概念，可以让他们比较a与$5a$、$8a$是同类项，$-6ab^2c^4$与$\frac{1}{3}b^2ac^4$也是同类项，而$5x^2y$和$3xy^2$不是同类项，让学生自己比较一下它们之间的异同，从而找出“同类项是所含字母相同，并且相同字母的次数也相同的项。”这样学生获得的就不仅是一个概念的正确表述，而且是概念形成的正确思维方法。另一种是不同类的、但是相似的、相近的或相关的事物间的比较。如“岛”与“半岛”、“气温”与“气候”、“代数式”与“方程式”、“整式”与“分式”等的比较。通过这类比较，不仅能使相比的对象的本质特征更加清楚，而且能确切地认清这个对象，防止知识间的混淆。

二、训练分析与综合的能力

分析是在思想上把一件事物、一种现象分解成较简单的组成部分，找出这些部分的本质属性和彼此之间的关系。综合是把分析过的对象或现象的各个部分、各个属性联合成一个统一的整体。分析与综合是同一思维过程中不可分割的两个方面。教学中，教师要把功夫用在引导学生把一些复杂的概念和问题分成几个组成部分，根据学生已有知识基础、将各部分按照事物发展的逻辑顺序进行排列，启发学生由浅入深、由表及里地进行分析，然后再一步步综合为整体，达到解决问题的目的。并在这个过程中启发学生逐步掌握“由整体到部分，从部分到整体”解决问题的思维方法。平面几何中引辅助线是一种重要的解题手段，而一遇到这种题目，许多学生因不知怎么分析，往往束手无策，无从下手。

如：已知 AD 是△ABC 的高，AE 是△ABC 的外接圆的直径。求证：AB·AC=AE·AD。



有的学生面对这道题想了很久，仍然无头绪。如果教师告诉学生，连接BE，△ABE∽△ABC，则 $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$，所以AB·AC = AE·AD。这样，教师讲完，学生就会做这道题了，但是遇到另外一道题，可能他们还是不会。为什么要连结 BE 而不是连结 CE 或别的什么两个点呢？如果教师引导学生用分析法去想，从求证想到已知。想 AB·AC=AE·AD，这样乘积间的关系，可转到证比例线段的问题，而证比例线段常用的方法是什么？即可能需要证三角形相似。以上的分析方法就是从结果 A 去想，假如 A 成立，就必须有 B 成立；假若 B 成立，又必须 C 成立……直至推到已知，问题就解决了。倒过来，就能用综合法写出证明过程。

实际上，学生在证（解）题时，必须学会一系列复杂的分析综合的思维过程。第一步，了解题意，分清条件和问题，这需要有初步的分析能力。第二步，全面分析条件之间、条件和问题之间的逻辑关系，这需要有较复杂的分析综合能力。第三步，决定证（解）题步骤选择适当方法这是在全面分析数量关系的基础上，进行综合得到结果。

三、训练抽象化和具体化的能力

抽象化是在思想上抽出同类事物的本质特征，舍弃非本质特征的思维过程。同抽象相反的过程是具体化。具体化是将通过抽象和概括而获得的概念、原理、理论返回到具体实际，以加深、加宽对各种事物的认识。抽象化和具体化是两个互相渗透，相互交替的思维过程。一般学生由于抽象能力差，不会从大量具体事物中抽象出它的本质属性，所以尽管他们可以把中学课程中的许多概念、公式、定理，背得烂熟，但不会具体运用。因此，概念、公式、定理的形成，必须通过学生大脑的加工，经历一个抽象概括过程，知其所以然，才能真正掌握。

如：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。要学生承认这个公式并不难，但要使学生做到正确运用就不容易了。如有的学生在背下这个公式许久以后，还大惑不解地提出：既然 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，$(a+b)^2$ 就应当等于 a^2+b^2 了。这就说明，学生没有真正理解 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 要使学生真正理解这个公式，只有通过学生的积极思维才能实现。可以先这样启发学生：$(10+3)^2$ 是不是等于 $10^2+3^2=$？$(10+3)^2=13^2=169$，$10^2+3^2=100+9=109$，可知：$(10+3)^2\neq10^2+3^2$。那么，$(a+b)^2$ 应该等于什么呢？$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$。学生即使知道了这个公式的由来，但有

时当作一个“公式”来运用还会有问题。如：$(2x+3y)^2$这个题，有的学生写出$2x^2+6xy+3y^2$。显然，他们还未真正理解公式中字母代表的一般意义。对照公式，要强调指出，公式中的每一项代表一个数，可以是任何形式表示的数。$(2x+3y)^2$这个题也是两个数的和的平方。因此，可以把 2x 看成 a，把 3y 看成 b。这时学生就会写出：$(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)(3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2+2$。

为了训练学生的抽象化和具体化能力，可以为他们设计一些片断思维练习，只训练抽象过程和具体化过程，不必解出答案。

四、培养学生创造性思维

创造性思维是指有创见的思维。即通过思维不仅能揭示客观事物的本质及内在联系，而且要在此基础上产生新颖的、前所未有的思维成果，表现出独创性，它是智力水平高度发展的表现。

创造性思维是在一般思维的基础上发展起来的，它是后天培养与训练的结果。培养学生的创造性思维是学校教育的重要任务之一。

创造性思维是智力水平发展的最高阶段。除了精心组织课堂教学外，还要从以下几方面加以培养。

第一，要丰富学生的知识和经验。丰富的知识经验，可以使人产生广泛的联想，使思维灵活敏捷，富有创造性。要鼓励学生扩大知识面、建立广泛的兴趣，勤于动脑、动手。

第二，要鼓励学生提出问题。思维总是从问题开始的，创造性思维更是如此。

第三，给学生提供富于创造性的练习和活动机会。教师要精心设计、布置富于创造性的活动。如，进行课堂讨论，组织辩论会，设计一题多解的题组，组织数学竞赛，开展小发明、小创造等活动，让学生勤于思考，勇于创新。

在小学数学课堂教学中
对学生进行素质教育的一些探索与实践

山西省太原市南郊区小店学校　刘引花

应试教育向素质教育转轨，已成为广大教育工作者的共识。对基础学科的小学数学教学，如何实现素质教育呢？近几年来，在教学实践中，围绕这一问题，进行了认真的思考和探索。下面就这个问题谈谈我的一些做法和体会。

一、在课堂教学中，加强思想品德的教育

作为一名数学教师既是数学知识的传授者，又是德育工作的渗透者，既要传授好数学知识，又要把德育渗透在教学过程中。具体讲可从以下几方面进行。

1．结合课堂教学，进行学习目的教育

在数学教学中，应适当穿插些学习数学的目的教学，俗话说：“磨刀不误砍柴工”，就是这个道理。学生对学数学的目的意义认识不足，学习劲头就不大，学习成绩就要受影响。因此，要想教好数学，就得让学生认识到数学的重要性，树立学习的远景动机。

一次我发现班内一些学生学习数学的兴趣不浓了，他们不交数学作业，上课不认真听讲。针对这种情况，我组织学生们以“数学”和“四化建设”的关系为题让他们进行讨论，在讨论中有的学生总结出数学和四化建设有五种关系，有的总结出七种关系，有的总结出四种关系等。一个学生很形象地说：四化建设同数学就像鱼和水一样，谁也离不开谁，人造卫星的设计离不开数学，建桥修路离不开数学，农村都离不开数学，就连平常的穿衣吃饭也需要数学。通过这次活动学生充分认识到了学习数学的重要性，端正了学数学的目的，提高了学习积极性。

2．结合教材渗透思想品德教育

在课堂教学中，可结合知识的传授，自行设计德育内容，渗透热爱祖国，热爱社会主义的教育。如在讲“求一个数是另一个数的百分之几”时，我编了这样一个例题，“1950-1979 年”我国农业产值的增长率是 43%。而美国是 1.9%。日本是 2.7%，苏联是 3.3%。比较一下哪个国家增长快？通过计算得出的结论是：我国增长得最快。这样用实例通过对比，使学生认识到社会主义的优越性，加深了爱祖国、爱社会主义的思想感情。

3．在课堂教学中抓住学生的家庭，结合教材内容对学生进行渗透教育

家庭是每个学生最熟悉、最了解的地方，将数学知识和学生的家庭情况联系起来，进行德育教育。可收到明显的效果：

如：教“求一个数是另一个数的几分之几”时，我让学生计算，家中有电扇、电视机、电冰箱、录音机、录像机的情况。结果有电扇的学生占全班人数的五十分之四十二，有电视机的学生占全班人数的五十分之五十，有冰箱的学生人数占全班人数的五十分之三十五，有录音机的学生占全班人数的五十分之四十七，有录像机的人数占全班人数的五十分之十六。

这样可使学生认识到改革开放以来，社会经济及家庭经济的发展，人民生活的提高，家用电器的普及。更坚定了学生们热爱祖国、热爱社会主义的信心。

再如：在数学圆的周长时，可把学生家中的表、圆桌、碗等和我国古代数学家祖冲之联系起来，进行爱国、爱科学的教育。

二、在知识讲授中，加强数学素质的培养

1．挖掘智力因素，注意智力的开发

小学数学课堂教学过程既是学生掌握知识的过程，又是培养能力，开发智力的过程，我在教学中充分挖掘教材内容的智力因素，开发学生的智力。如教“ 长方体的体积公式 ”时我设计了如下教学过程。

（1）摆弄小木块。教师拿 24 个 1 立方厘米的方木块，摆成一个长方体，每排摆 4 个，摆 3 排，摆 2 层，然后分层次引导学生写出长方体体积计算公式。

①这个长方体的长、宽、高分别为 4、3、2 厘米，体积是多少立方厘米。

②这个长方体体积的计算方法是每排个数×每层排数×层数，让学生对长方体体积的计算有一个直观形象认识。

（2）学生小组讨论。这个长方体的体积和多少个 1 立方厘米的正方体一般大？通过讨论让学生认识到长方体的长、宽、高的量数，分别说明每排可以摆几个单位相同的立方体，每层可以摆几排，一共有几层？

（3）学生自己设计长方体的实物体。

接着教师再举一例，引导学生用想象摆木块的方法得出它的体积。试图找出解决问题的突破口，这就为接受学法指导工作做好了心理上的准备。

（4）学生自得结论。摆出的长方体的体积为：

长×宽×高

教师指出，计算体积，如果都是通过摆木块显然十分麻烦。由于长方体的长、宽、高的量数与能够摆出的每排的正方体的个数，每层的排数，总共的层数密切相关，教师抓住时机引导学生通过观察总结出规律，长方体的体积的量数等于相应长度单位的长、宽、高量数之积。从而得到公式：

长方体的体积=长×宽×高

这样从直接测量数字计算，从实物演示到间接想象，由具体到抽象逐步地教给学生计算体积的方法，通过长方体计算公式的形成过程的学习，培养了学生的观察能力。

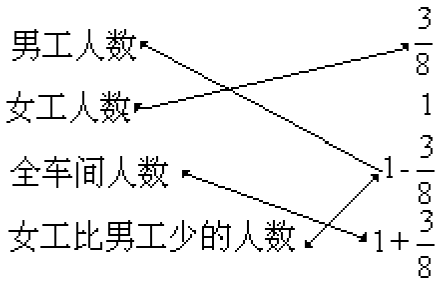
2．在教学过程中，提高学生的思维能力

（1）寻找对应，培养思维的准确性。

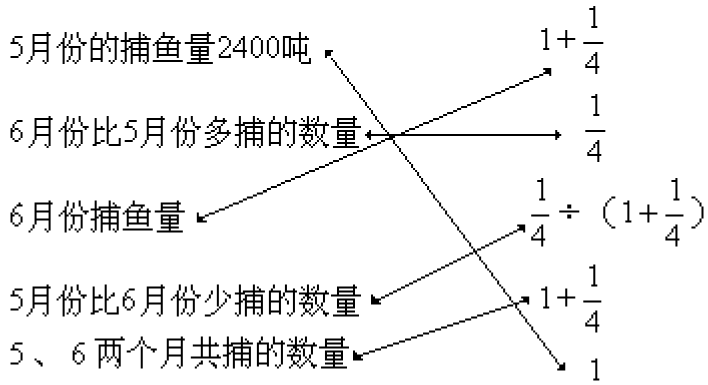
小学分数应用题的最大特点就是一旦标准量确定，每个分率都有一个具体数量与之对应，学生往往由于错找了对应关系而出现一些解题错误。要减少这样的错误，就要进行有关的对应训练。

例如：用线把表示某一个量及其对应分率连起来。

①某车间女工人数是男工人数的 $\frac{3}{8}$，



②某渔业队五月份捕鱼2400吨，六月份比五月份多捕了$\frac{1}{4}$



这种训练，不仅能使学生明确分率和具体数量间的一一对应关系，而且能帮助学生形成初步的对应思想提高解题的速度，培养了学生思维的正确性。

又如，采用一题多变的方法，培养学生思维的灵活性和敏捷性，提高解题的应变能力。

例：某工程队用 40 天时间完成一项任务________原计划要用多少天？

是原计划的$\frac{5}{6}$　　　　$40\div\frac{5}{6}$

比原计划节约时间$\frac{1}{6}$　　　　$40\div(1-\frac{1}{6})$

比原计划多用时间$\frac{1}{6}$　　　　$40\div(1+\frac{1}{6})$

这样练习，活跃和拓宽了学生的思维，培养了学生思维的敏捷性。

3．激发学习兴趣，加强非智力因素的培养

在课堂教学中，激发学生的学习兴趣，树立近景动机，对提高教学质量起着至关重要的作用，也是培养非智力因素提高学生素质的一个重要方面。

数学教师要想方设法通过鲜明的图象，新颖的故事，生动的语言，成功的喜悦，竞争的手段等等激发学生学习兴趣，培养学生学习数学的情感，要通过制度的约束，目标的追求，良好习惯的培养，来锤炼学生在学习数学中克服困难的精神和坚韧不拔的意志。事实证明抓了对学生非智力因素的培养，不仅不会削弱智力因素，相反，会促进智力因素的发展。使学生有兴趣地学，积极主动地学，从而培养他们走向成功所需要的各种优良的心理品质。

如教学“商不变的性质”时，开始由“猴王分桃的故事”引入：猴王对

甲猴说：“ 我给你 4 只桃，要求平均分给 2 只猴。 ” 甲猴听后，捧桃去了。猴王对乙猴说：“ 我给你 40 只桃，要你平均分给 20 只猴。 ” 乙猴听了，脸上露出笑容，捧桃高兴地去了。猴王对丙猴说：“ 我给你 400 只桃，要求平均分给 200 只猴。 ” 猴王刚说完，丙猴就乐起来，一蹦一跳地执行任务去了。

过了一会儿，三只猴都回来了，甲猴显得很平静，乙、丙两猴都满脸不高兴，尤其是丙猴，嘴还翘得老高呢！为什么甲猴显得平静？乙、丙两猴先是高兴，后来不高兴呢？这时同学们争先恐后地发表起自己的见解，达到了以故事导入新课的目的，既充满儿童情趣，又符合学生认识特点，成功地引入了新课。

三、在课堂教学中，把数学教学融入审美之中

充分发掘数学教材中所蕴含的美，引导学生把数学学习引入审美的教育之中，对克服枯燥疲劳，强化感知，活跃思维，促进数学能力的和谐发展具有多方面的效能。

我的做法首先是引导学生发现数学 “ 美 ” 。因为数学是从数量关系与空间形式上反映自然规律的科学，它的美首先表现数形的美、比例的美、整齐的美、和谐的美……，这些美的形式不仅给学生以舒适的美感，而且吸引着他们去认真地观察，积极地思考。如让学生认识圆美时，我从 “ 圆是一切平面图形中最美的 ” 思想出发，出示圆形的物体图案，如圆圆的月亮，圆圆的桌子等，让学生观察圆上下左右是那么匀称，不管从什么方向看都是圆圆的，真是圆满无缺。

其次是引导学生享受数字美。古希腊有位数学家说过：“ 哪里有数，哪里就有美。 ” 小学数学教学中有机渗透美的教育，可以培养学生对数学知识真挚而深厚的感情。比如对一年级刚入学的新生，教师就可以利用各种图形让学生让记 1 -10 的数学符号的结构写法。“ 1 ” 像小棒，“ 2 ” 像小鸭，“ 3 ” 像耳朵,“ 4 ”像小旗……让这些有趣的图形连同数字留在学生美好的记忆里，从而来培养他们对数学学习的好奇心和求知欲。促使他们从心灵上的快感转化为精神上的升华。

实践告诉我们，在数学教学中，对学生进行素质教育，根基在课堂，教师必须树立完整的数学教育观，从观念上，意识上树立起提高学生素质的思想。在教学中，从整体发展着眼，从培养能力、开发智力着手结合教材内容和学生实际，有意识地实施素质教育，使学生的素质进一步得到提高。

谈几何证明教学中思维能力的培养

山东省烟台开发区二中　林馨韵

在几何证明的教学中，如果只按例题的内容平铺直叙、单调练习，久而

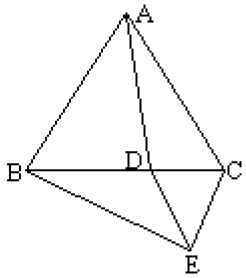
久之就会造成学生的思维呆板，反应迟钝，遇到几何证明题就束手无策。如果采用灵活多变的，具有启发性的教学方法，让学生多动脑、动手、动嘴，从不同角度、用不同方法解题，就会开阔视野，拓开解题思路，学生的思维能力才能不断提高。

一、培养学生的观察能力

一道几何题是否能够迅速、准确的证出来，很大程度上取决于学生的观察能力。细致地■

观察是解题过程中一种最重要的思维活动。如果解题时有意识的对题目的数与形的特点进行直觉上的认识，常常会使受阻的思路茅塞顿开。

例如：已知△ABC 和△DCE 都是等边三角形。求证：AD=BE。



在学过全等三角形后，要证 AD=BE，就要证 AD 和 BE 所在的三角形全等。观察图形，AD 在△ABD 和△ADC 中，BE 在△BEC 和△BDE 中，要证哪一对三角形全等呢？如果观察不仔细，开始就证△BDE 和△ADC 全等，是证不出来的。因为细致地察看后，可以发现△BDE 和△ADC 不但形状不同，大小也不一，所以它俩不可能全等。再通过仔细观察，△ BEC 和△ADC 很有可能全等，而实际上通过已知条件，也证明了这两个三角形全等。

所以，细致观察能力的培养，在几何教学中有着很重要的意义。

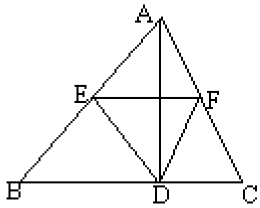
二、利用一题多解、多变，培养学生思维的灵活性

中学生思考问题的方式，通常是直线型的，顺着一种思路考虑问题，一旦走不通，就束手无策了。所以在几何教学中要善于鼓励学生采用灵活多变的思维方式，如果这种思路行不通，就回头重看已知条件，再从不同的角度，用不同的方法，寻找别的证题思路。

1．充分分析已知条件，找出证题思路

例如：如图，△ABC 中，AD⊥BC 于 D，E 是 AB 的中点，F 是 AC 的中点，且 AB＞AC。

求证：∠DFE＞∠DEF.



此题根据已知条件 AD⊥BC，知△ADB 与△ADC 都是 Rt△，根据 E 是 AB 的中点，F 是 AC 的中点，说明 DE、DF 分别是两斜边 AB 和 AC 边

上的中线，那么就得出$DE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}AC$。

再根据 AB＞AC，得出 DE＞DF，根据“大边对大角”的定理就得出∠DFE＞∠DEF．

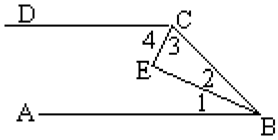
这道题沿着已知条件这条主线，“一路顺风”地得出了结论。所以，充分挖掘已知条件之间潜在的联系，既巩固加深了以前所学的知识，又培养了学生思维的灵活性。

2．一题多变，培养思维的敏捷性

在几何证明题中，已知条件的改变，影响着思维的方向，从而培养了学生的多方向思维。

例如：已知如图，AB∥CD，∠1=∠2，∠3=∠4。

求证：BE⊥CE。



可以将已知条件和求证变为：

已知：∠1=∠2，∠3=∠4，BE⊥CE．

求证：AB∥CD．

或已知：AB∥CD，BE⊥CE，∠1=∠2．

求证：∠3=∠4．

利用一题多变，培养了学生解题的灵活性，提高了分析问题和解决问题的能力。

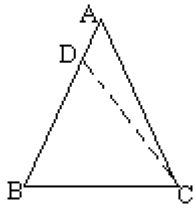
3．一题多解、拓开思路

在几何证明题中，常常是一题有多种证明方法。利用一题多解，让学生从不同的角度，不同的方法在变中思维，克服思维的局限性，拓开解题的思路。

例如：

已知：在△ABC 中，∠ACB＞∠B．

求证：AB＞AC



证法一.

证明：以点 C 为顶点，CB 为一边作∠BCD=∠B，CD 交 AB 于点 D．

∵∠ACB＞∠B，（已知）

∴CD 在∠ACB 内（一个角大于另一个角的定义）

∴点 D 在点 A 和点 B 之间，即 AB=AD+DB．（线段和定义）

∵DB=DC，（同一三角形中，相等的角所对的边也相等）

又∵AD+DC＞AC，（三角形中任意两边的和大于第三边）

∴AD＋DB＞AC（等量代换）

∴AB＞AC．

证法二：（反证法）

证明：假定 AB≯AC，那么 AB=AC 或 AB＜AC．如果 AB=AC

那么∠ACB=∠B（等腰三角形两底角相等）

这与已知的∠ACB＞∠B 矛盾．

∴AB=AC 的假定是不可能的．

如果 AB＜AC，

那么∠ACB＜∠B，（大边对大角）

这也与已知的∠ACB＞∠B 矛盾．

∴AB＜AC 的假定也是不可能的．

∴AB＞AC．

通过一题多解能达到培养思维的灵活性、创造性的目的