学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

奇 妙 数 学 大 世 界

A

前言

美妙的数学

长期以来，一个令人困惑的现象是：一些同学视数学如畏途，兴趣淡漠，导致数学成绩普遍低于其他学科。

这使一些教师、家长以至专家、学者大伤脑筋！

“兴趣是最好的老师。”对任何事物，只有有了兴趣，才能产生学习钻研的动机。兴趣是打开科学大门的钥匙。

对数学不感兴趣的根本原因是没有体会到蕴含于数学之中的奇趣和美妙。

一个美学家说：“美，只要人感受到它，它就存在，不被人感受到，它就不存在。”

对数学的认识也是这样。

有人说：“数学真枯燥，十个数字来回转，+、-、×、÷反复用，真乏味！”

有人却说：“数学真美好，十个数字颠来倒，变化无穷最奇妙！”

认为枯燥，是对数学的误解；感到了兴趣，才能体会到数学的奥妙。

其实，数学确实是个最富有魅力的学科。它所蕴含的美妙和奇趣，是其他任何学科都不能相比的。

尽管语文的优美词语能令人陶醉，历史的悲壮故事能催人振奋，然而，数学的逻辑力量却可以使任何金刚大汉为之折服，数学的浓厚趣味能使任何年龄的人们为之倾倒！茫茫宇宙，浩浩江河，哪一种事物能脱离数和形而存在？是数、形的有机结合，才有这奇奇妙妙千姿百态的大千世界。

数学的美，质朴，深沉，令人赏心悦目；数学的妙，鬼斧神工，令人拍案叫绝！数学的趣，醇浓如酒，令人神魂颠倒。

因为它美，才更有趣，因为它趣，才更显得美。美和趣的和谐结合，便出现了种种奇妙。

这也许正是历史上许许多多的科学家、艺术家，同时也钟情于数学的原因吧！

数学以它美的形象，趣的魅力，吸引着古往今来千千万万痴迷的追求者。

一、数学的趣味美

数学是思维的体操。思维触角的每一次延伸，都开辟了一个新的天地。数学的趣味美，体现于它奇妙无穷的变幻，而这种变幻是其他学科望尘莫及的。

揭开了隐藏于数学迷宫的奇异数、对称数、完全数、魔术数……的面纱，令人惊诧；观看了数字波涛、数字漩涡……令人感叹！一个个数字，非但毫不枯燥，而且生机勃勃，鲜活亮丽！

根据法则、规律，运用严密的逻辑推理演化出的各种神机妙算、数学游戏，是数学趣味性的集中体现，显示了数学思维的出神入化！

各种变化多端的奇妙图形，赏心悦目；各种扑朔迷离的符形数谜，牵魂系梦；图形式题的巧解妙算，启人心扉，令人赞叹！

魔幻谜题，运用科学思维，“弹子会告密”、“卡片能说话”，能知你姓氏，知你出生年月，甚至能窥见你脑中所想，心中所思……真是奇趣玄妙，鬼斧神工。

……

面对这样一些饶有兴味的问题，怎能说数学枯燥乏味呢？

二、数学的形象美

黑格尔说：“美只能在形象中出现。”

谈到形象美，一些人便联想到文学、艺术，如影视、雕塑、绘画，等等。似乎数学只是抽象的孪生兄弟。

其实不然。

数学是研究数与形的科学，数形的有机结合，组成了万事万物的绚丽画面。

数字美：

阿拉伯数字本身便有着极美的形象：1 字像小棒，2 字像小鸭，3 字像耳朵，4 字像小旗……瞧，多么生动。

符号美：

“=”（等于号）两条同样长短的平行线，表达了运算结果的唯一性，体现了数学科学的清晰与精确。

“≈”（约等于号）是等于号的变形，表达了两种量间的联系性，体现了数学科学的模糊与朦胧。

“＞”（大于号）、“＜”（小于号），一个一端收紧，一个一端张开，形象地表明两量之间的大小关系。

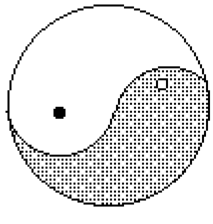
{[（）]}（大、中、小括号）形象地表明了内外、先后的区别，体现对称、收放的内涵特征。

……

线条美：

看到“⊥”（垂直线条），我们想起屹立街头的十层高楼，给我们的是挺拔感；看到“—”（水平线条），我们想起了无风的湖面，给我们的是沉静感；看到“～”（曲线线条），我们想起了波涛滚滚的河水，给我们的是流动感。

几何形体中那些优美的图案更是令人赏心悦目。



三角形的稳定性，平行四边形的变态性，圆蕴含的广阔性……都给人以无限遐想。

脱式运算的“收网式”变形以及统计图表，则是数与形的完美结合。

我国古代的太极图，把平面与立体、静止与旋转，数字与图形，更做了高度的概括！

三、数学的简洁美

数学科学的严谨性，决定它必须精炼、准确，因而简洁美是数学的又一特色。

数学的简洁美表现在：

1.定义、规律叙述的高度浓缩性，使它的语言精炼到“一字千金”的程度。

质数的定义是“只有1和它本身两个约数的数”，若丢掉“只”字，便荒谬绝伦；小数性质中“小数末尾的0……”中的“末尾”若说成“后面”，便“失之千里”。此种例证不胜枚举。

2.公式、法则的高度概括性

一道公式可以解无数道题目，一条法则囊括了万千事例。

三角形的面积=底×高÷2。把一切类型的三角形（直角的、钝角的、锐角的；等边的、等腰的、不等边的）都概括无遗。

“数位对齐，个位加起，逢十进一”把各种整数相加方法，全部包容了进去。

3.符号语言的广泛适用性

数字符号是最简洁的文字，表达的内容却极其广泛而丰富，它是数学科学抽象化程度的高度体现，也正是数学美的一个方面。

$a+b=b+a$　$abc=acb=bca$……

其中a，b，c可以是任何整数、小数或分数。

$S=\frac{1}{2}(a+b)h$，适用于各种形状梯形面积的求解。

$a\cdot b=\frac{a}{\frac{1}{b}}$，$a\div b=a\times\frac{1}{b}$，表达了乘与除相互转化的关系，反映了事物的对立统一。

$\pi R^2-\pi r^2=\pi(R+r)\cdot(R-r)$，环形面积的多解性便富含其中。

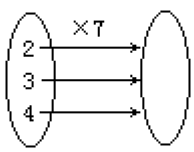
$\frac{\pi r^2-2r^2}{2r^2}=\frac{(\pi-2)r^2}{2r^2}=\frac{\pi-2}{2}=57\%$，则表明：“圆中方”剪去部分与正方形面积间的固有联系。

所以，这些用符号表达的算式，既节省了大量文字，又反映了普遍规律，简洁，明了，易记，充分体现了数学语言干练、简洁的特有美感。

四、数学的对称美

对称是美学的基本法则之一，数学中众多的轴对称、中心对称图形，幻方、数阵以及等量关系都赋予了平衡、协调的对称美。

略举几例：

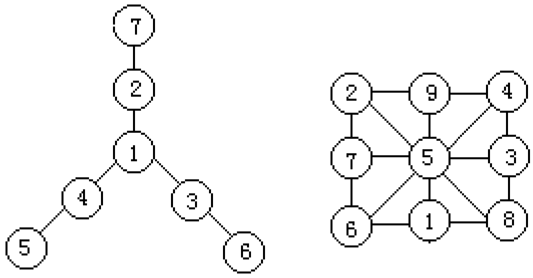


算式：

2：3=4：6

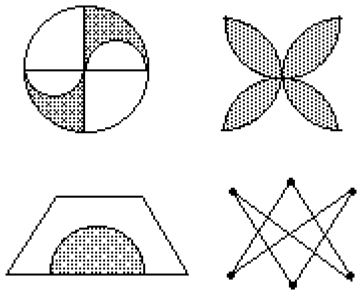
x＋5=17-9

数阵：



图形：

数学概念竟然也是一分为二地成对出现的：“整—分，奇—偶，和—差，曲—直，方—圆，分解—组合，平行—交叉，正比例—反比例……，显得稳定、和谐、协调、平衡，真是奇妙动人。



数学中蕴含的美的因素是深广博大的。数学之美还不仅于此，它贯穿于数学的方方面面。数学的研究对象是数、形、式，数的美，形的美，式的美，随处可见。它的表现形式，不仅有对称美，还有比例美、和谐美，甚至数学的本身也存在着题目美、解法美和结论美。

上述这些只是浮光掠影的介绍，然而，也足见数学的迷人风采了。

打开这本书，如同进入一个奇妙世界，呈现眼前的尽是数、形变幻的奇妙景观，一个个“枯燥”的数字活蹦乱跳地为你做精彩表演，一个个“抽象”的概念娓娓动听地向你讲述生动的故事。它揭示了隐藏于深层的数学秘密，展示了数学迷宫的绚丽多彩。数的变幻，形的奇妙，有的令你追根究底，有的令你流连忘返，有的令你惊讶感叹，有的令你拍案叫绝……

走进这个奇妙世界，必将如咀嚼一枚橄榄果，品尝到数学的浓浓趣味，感受到数学王国神异高妙，从而使我们眼界大开。你将惊呼：“哇！数学原来是这么有趣啊！”

奇妙数学大世界 A

数字花絮

十个阿拉伯数字，像五彩缤纷的花絮。四种运算符号+、-、×、÷，如变幻多姿的魔棒。数字与符号的组合分化，则构建一道道迷人的风景线，它牵动着多少智者的神经，激荡起几多想象和思考。

一代代人的耕耘培育，使数学园地繁花似锦，光彩夺目。这里的每一个数字都是一朵彩色的花瓣，这里的每一道问题都诱发出迷人的魅力。

一些题隐去了数字，只呈现一片虚幻的空白。每一块空白又都是一个等待回答的问号，扑朔迷离，直令人魂牵梦绕。

再没有比“悬念”更能激发思考了！空白虚幻之中却又隐藏种种技巧。

数字趣题虽没有像应用题、故事或游戏趣题那样的事件、情节，往往只透露一点点信息，却要求从已知的点滴信息中，推出它的整体面貌。它像一团雾，像一个谜，虽然一时看不清，抓不住，却又有着实实在在的答案。这样，就更加激人深思，引人思考。一经入目，必欲弄个水落石出。

数字趣题中，有的是在一个算式中只保留部分数字，而将另一些数字隐去，只用“□”、“☆”或其他文字符号来替代。要求根据已有的数字，运用分析、推理，将被隐去的数字复原，使算式完整，成立。这种趣题，在我国古代称为“虫蚀算”，意思是，本来很完整的算式，被书虫啃蚀了，因而，数字便残缺不全。有的只提供一些数字，要求添加运算符号或巧妙组合，使它们符合规定的条件。

有的是通过数字的排列组合出现一些奇妙的有规律的现象。如幻方、数阵，它们纵横或周边，在同一直线上的各个数字之和，都为同一数值，奇幻迷人。

数字趣题，依其表现形式，常见的有以下数种：

一、竖式谜

二、横式谜

三、填空谜

四、幻方

五、数阵

解数字谜，要根据四则运算的法则、规律，对照已知条件，理清数与数间的内在联系，先易后难，由此及彼，使被隐去或要求填写的数字，一个一个地暴露出来。从而拨开迷雾，显出“庐山真面目”。幻方和数阵的制作，则更有一套独特的方法。

解数字趣题，如同侦察员破案一样，开始如理乱麻，渐渐便理清线索，继而顺藤摸瓜，最终便真相大白了！

竖式谜

在加、减、乘、除四则运算中，比较复杂的题目，都要先列竖式进行演算。

常见的竖式，都是单纯的求和或差，或积或商。竖式谜，却只提供不完全的条件。有时给出几个或一个数字，隐去了其他各数；有时一个数字也没有，只用“□”或“★”等特殊符号，把竖式的框架显示出来。

这种竖式看上去像一团迷雾，扑朔迷离，简直是个没解开的谜。只有熟练算法、算理，根据已提供的点滴信息，分析、推理，顺藤摸瓜，才能使一个个隐去的数字重新出现。

解加、减法的竖式谜，主要根据进位、退位情况，进行分析、判断。乘、除法，除了考虑进、退位问题，还要根据乘、除法的法则，认真推敲。一般要先将容易找出的数字填出来，这样，未知数的范围便越来越小，最终便可找出全部隐藏的数字。

解数字谜，如同侦察员破案一样，新奇，有趣。

例 1

```
   □ 5
+ □ □
———————
 1 8 9
```

解：加数都是两位数，从第一个加数个位是 5 与和的个位数是 9，可以推断第二个加数的个位数必定是 4。即 5+？=9。从和的百位数与十位数是 18，可断定，两个加数的十位数都是 9，这样，谜便揭开了：

```
   9 5
+  9 4
———————
 1 8 9
```

例 2

```
     5 □
   2 □ 7
+  □ 7 5
—————————
   6 7 8
```

解：三个加数，只知道其中两个加数的个位分别是 7、5，而和的个位却是 8，肯定是进位造成的。从 7+5+？=□8，可判断另一个加数的个位必为 6，十位上 5+□+7=□7，可断定：□加上个位进上来的 1 是 5，去掉进上来的 1 应是 4。百位上 2+□=6，可知：□=4，去掉进上来的 1，□=3。

可知原式为：

```
     5 6
   2 4 7
+  3 7 5
—————————
   6 7 8
```

例 3

```
  □ □ □ □
-       1
———————————
    □ □ □
```

解：这个减法算式，只告知了减数是 1，被减数、减数都不知道！全式应有八个数字，其中七个都是未知数，初看是比较难解的。但是认真分析一

下减法算式各部分的数位，便可以找到突破口。被减数有四位，减去 1 后，差却成了三位数，只有相减时连续退位，才会如此。那么，什么数减去 1 需要向高位借数呢？只有“0”！而最高位退 1 后成了 0，表明被减数的最高位就是“1”。这样，就可以断定被减数是 1000。知道了被减数和减数，差就迎刃而解了！

可知，原式是：

$$\begin{array}{r} 1\;0\;0\;0 \\ -\quad\quad\;\;1 \\ \hline 9\;9\;9 \end{array}$$

例 4

$$\begin{array}{r} \square\,\square\,\square\;7 \\ -\quad\quad 8\;\square \\ \hline 9\;\;9\;\;6 \end{array}$$

解：个位上，被减数是 7，差是 6，可知减数是 1。十位上，减数是 8，差是 9，可知被减数必小于 8，借位后才使差比减数大的。那么，？-8=9，可知被减数十位上是 7。再看百位，因为被减数是四位数。相减后，成了三位数，差的百位数又是 9，从而断定，被减数的百位上是 0，千位上必定是 1 了。

可知，原式是：

$$\begin{array}{r} 1\;0\;7\;7 \\ -\quad\;\;8\;1 \\ \hline 9\;9\;6 \end{array}$$

例 5 下面的算式，加数的数字都被墨水污染了。你能知道被污染的四个数字的和吗？

$$\begin{array}{r} \square\,\square \\ +\,\square\,\square \\ \hline 1\;8\;9 \end{array}$$

解：和的个位数是 9，可知加数的个位数字相加没有进位。即两个数字和是 9。和的百位与十位上的数是 18，便是两个加数十位数字的和。所以，被污染的四个数字的和是：18+9=27。

例 6 下面算式中的数字都被遮盖住了，求竖式中被遮盖住的几个数字的和。

$$\begin{array}{r} \square\,\square\,\square \\ \square\,\square\,\square \\ +\,\square\,\square\,\square \\ \hline 2\;9\;9\;1 \end{array}$$

解：这是一道三个三位数的加法。从和的前两位是 29，可断定三个加数的百位必须是 9，因为三个 9 的和才是 27，多出的部分便是进位造成的。同理，可断定加数的三个十位数字的和，也必须是 9，多出的 2（29-27），是个位进位造成的。而和的个位数是 1，断定三个加数的个位数字和是 21。

因此，被遮盖的数，数字和是：

27+27+21=75

例 7

$$
\begin{array}{r}
\square\,2\,\square \\
\times\qquad 7 \\
\hline
\square\,\square\,2
\end{array}
$$

解：这是个三位数与一位数相乘的算式。被乘数只知道十位数是 2，积只知道个位数是 2，乘数是 7，其余都是未知数！但是从个位的一个数与 7 相乘，积的个位数是 2，可推断被乘数的个位数只能是 6。 6×7=42，十位上进 4。被乘数的十位数是 2，20×7=140，加上进位的 4，积的十位应是 8，进位 1。从积是三位数，可断定被乘数的百位数必为 1（因为若大于 1，积则为四位数了！），1×7=7，加上进上来的 1，积的百位数便是 8 了。

可知，原式是：

$$
\begin{array}{r}
1\ 2\ 6 \\
\times\qquad 7 \\
\hline
8\ 8\ 2
\end{array}
$$

例 8

$$
\begin{array}{r}
\square\square\square\square \\
\times\qquad \square\,9 \\
\hline
\square\,7\,5\,4\,7 \\
\square\,5\,\square\square\square \\
\hline
\square\square\square\square\square\square
\end{array}
$$

解：这是个四位数与两位数相乘的算式。从乘数的个位数 9 和部分积个位是 7，可推知被乘数的个位是 3，进 2。据此，推知被乘数的十位是 8，8×9=72，加上进位 2，才符合积的十位数得 4 的要求。再根据积的百位数是 5，推知被乘数百位是 2，2×9=18，加上进位 7，得 5，进 2。继而推知被乘数千位是 5，5×9=45，加上进位 2，才可得积的千位数 7。

从被乘数是 5283 和第二部分积中的 5，可以推断乘数的十位数，因为被乘数的前两位是 5、2，经过尝试，乘数的十位数只能是 3。

至此，其他各数字，便容易得出了！

$$
\begin{array}{r}
5\ 2\ 8\ 3 \\
\times\qquad 3\ 9 \\
\hline
4\ 7\ 5\ 4\ 7 \\
1\ 5\ 8\ 4\ 9 \\
\hline
2\ 0\ 6\ 0\ 3\ 7
\end{array}
$$

例 9

$$
\begin{array}{r}
\square\square\square \\
\times\ \square\,2\,1 \\
\hline
\square\square\square \\
\square\square\square\square \\
\square\,8\,\square \\
\hline
\square\square\,9\,\square\,2\,\square
\end{array}
$$

解：为了分析，我们将题中的关键位置用字母标出。

算式中，只有被乘数与 2 的积是四位数，与 A、B 的积都仍是三位，从而断定 A=B=1。以此为突破口，再追寻其他。

其中，部分积 D 与完全积中的 C，也很明显是 1。D 由“□×2”得来，最大的一位数乘 2 也只能进 1。由 D=1，断定 C=1。

知道 D=1，“D+E”又进位，推断 E 不是 8 必是 9。如果 E 是 8，则 F 非 6 即 7，但是 F+8=9，所以 E 不可能是 8。

```
       □ □ □
    ×  A 2 B
   ----------
       G H □
   D F □ K
   E 8 □
 -------------
 C □ 9 □ 2 □
```

部分积“GH□”和“E8□”都是被乘数与 1 相乘得到的，所以，E=G=9，H=8。

知道了 H=8，从“8+K=□2”断定 K=4。K 是被乘数与 2 相乘得到的，乘 2 后积的尾数是 4 的只有 2 或 7。

再通过一些试算，算式中的数字，便一个个都推断了出来：

```
       9 8 7
     × 1 2 1
     -------
       9 8 7
   1 9 7 4
   9 8 7
 -----------
 1 1 9 4 2 7
```

例 10 下面的算式，没有一个已知数。只知道式内的全部数字都是质数。能把所有的数字都找出来吗？

```
      □ □ □
   ×    □ □
   ---------
    □ □ □ □
  □ □ □ □
  ---------
  □ □ □ □ □
```

解：式中的全部数字都是质数，那么组成算式的数字只能是 2、3、5、7 四个数字。

从三位数乘得的积都是四位数，并且得数全部是质数，我们可以用 2、3、5、7 任组成一个三位数和一个一位数相乘，凡积也全部是质数的就记下来，不符合就舍弃，这样使范围逐步缩小。

经尝试，只有 775×3=2325，555×5=2775，755×5=3775，325×7=2275 四种情况。

要符合题目的条件，乘数只能是数字相同的两位数。这样也有四种情况：775×33 555×55 775×55 325×77。

相乘后，不仅它们的部分积，连完全积也必须都是质数，才能符合题意。

经检验后，只有下面的算式符合：

```
      7 7 5
   ×    3 3
   ---------
    2 3 2 5
  2 3 2 5
  ---------
  2 5 5 7 5
```

这团迷雾，终于真相大白。

例 11

```
     □ □ □
   ×   8 9
   --------
   □ □ □ □
   □ □ □
   --------
   □ □ □ □
```

解：在乘法中，积的位数估算方法是：看被乘数与乘数首数相乘的积：

首数相乘满 10 时：

积的位数=被乘数位数+乘数位数

首数相乘不满 10 时：

积的位数=被乘数位数+乘数位数-1

本题是三位数与两位数相乘，积为四位数。可知，属首数相乘不满 10 的。由此断定，被乘数的首位是 1。再由两部分积首位相加不进位，断定被乘数的十位数也只能是 1。被乘数的个位数，则根据积是四位数，参照乘数的十位数 8，相乘后，部分积的首位不能满 10，断定必是 2。这样，全式便可以列出了：

```
    1 1 2
  ×   8 9
 --------
  1 0 0 8
  8 9 6
 --------
  9 9 6 8
```

例 12

```
           □ 8 □ 7
      ┌─────────────
 □ □ ╯□ □ □ □ □ □
       □ □ □
     ───────────────
         □ □
         □ □
       ─────────────
             □ □
             □ □
           ─────────
                 0
```

解：这个除式中，除了告知商中两个数字外，其余的全是未知数！初看很难。但是，当认真观察全式后，便可发现线索：除数是两位数，与商的首位相乘，其积是三位数，而与商中的 8 相乘，则积是两位数了，从而可断定：①商的首位是 9；②除数的首位是 1；③除数的个位数字，一定小于或等于 2。因为，1□中个位若是 3，与 8 乘积就是三位数了；个位若是 1，与商的首位 9 乘，又不是三位数了。可知，必为 2。即除数是 12。

再看商的十位数。从商 98□7，对照除式是落下一位不够除的，才连落两位数，这样，又可断定，十位上的商是 0。

已经知道了除数和商，被除数便是：12×9807=117684。

可知，原式是：

```
           9 8 0 7
     ┌────────────
 1 2╯1 1 7 6 8 4
     1 0 8
     ─────────────
         9 6
         9 6
       ───────────
             8 4
             8 4
           ───────
               0
```

例 13

```
          1 □ 6
      ┌─────────
  2 □╯□ 2 7 □
      2 □
     ───────────
      1 9 7
      1 8 4
     ───────────
        1 3 □
        1 3 8
       ─────────
            0
```

解：首先要找出解题的突破口。

从余数是 0，表明商与除数相乘得 138，即“2□×6=138”，一个数乘 6 个位是 8 的只有 3 和 8，但是 2□方框中若是 8，便不合题意，因为 28×6≠138。

确定了除数是 23，23×6=138，则被除数的个位数也必是 8。

再从商的十位数□与除数 23 相乘得 184，即 23×□=184，可知商的十位数也是 8。

商的百位数已知是 1，与除数 23 相乘仍是 23，从首商差的数字是 19，可推断被除数的首位数字应是 4。

这样，算式便全部恢复了数字：

```
            1  8  6
2  3 ) 4  2  7  8
       2  3
       1  9  7
       1  8  4
          1  3  8
          1  3  8
                0
```

例 14

```
               1  □  □
2  1  □ ) 2  □  0  9  □
          □  □  5
             5  □  □
             □  □  □
             □  □  9  □
             □  □  □  □
                      0
```

解：这是除数是三位数的除法。

商的百位是 1，它与除数相乘的积个位是 5，可知除数的个位也是 5，即除数是 215，从而可知第一次相减余 55，拉下 9，得 559。被除数的千位数必是 7。

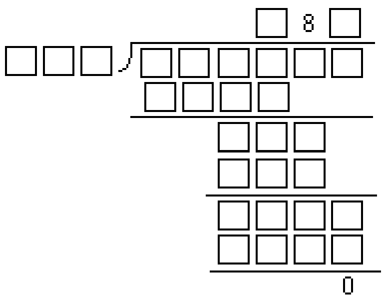
再看 559 被 215 除应商几呢？从相减余下 9，可知商的百位数是 2。余 129，再拉下 0，继续除。

除数 215 的多少倍是 1290 呢？从而又确定了商的个位数是 6。

这样，全式便是：

```
                  1  2  6
2  1  5 ) 2  7  0  9  0
          2  1  5
             5  5  9
             4  3  0
             1  2  9  0
             1  2  9  0
                      0
```

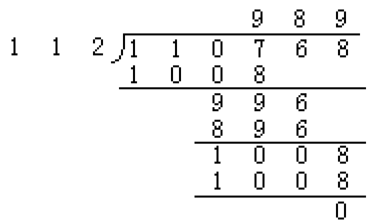
例 15



解：这道题被除数是六位数，除数和商都是三位数，这么复杂的除式，知道的数字只有一个 8，要将那些隐去的数字都找出来，就要有侦察员破案的精神。

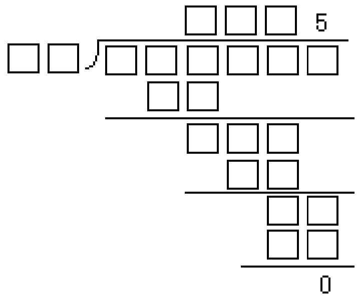
从除数与 8 相乘的积是三位数，而除数与商的百位和个位相乘都得四位数，说明商的百位和个位都比 8 大，那就只能是 9 了！

即完全商是 989。



从除数乘 9 得四位数，断定除数百位是 1，否则与 8 乘也是四位数了。同理，商的十位数也必须比较小。经对照商与乘积关系，反复尝试，确定了除数是 112。这样，其他各数便不难推断了。

例 16



解：这是一道六位数除以两位数，商是四位数的除法算式。整个算式中，只知道商的末位数字是 5，要我们把全部数字都找出来，真是个难解的谜！

从何处下手呢？

首先要认真观察算式特点，由易到难，顺藤摸瓜。一般都是从除数、商与被除数的关系进行推导。

在除法中，余数必须小于除数，落下被除数中的一位后，仍不够除，必须在商的空位上补 0。由竖式特点，可判定商的百位数是 0。

商的千位数是几呢？

从商的百位数是 0，可推断，被除数的首位数和第一次余数的首位数必定是 1，由此，又可推断，如果除数是 11，商的千位数是 9，如果除数是 99，商的千位数是 1。因为三位数减去两位数，余数是 1 的，只能是 100—99，而从除式的末尾看，商与除数的积只有两位数，除数若是 99，那么与商的末位数 5 相乘，便是三位数了！所以，除数只能是 11。

同样，根据除式的特点及已推知除数是 11，可断定，商数的十位数也是

9。

这样，整个算式便可恢复原状了。

9095×11=100045

原式为：

```
         9 0 9 5
1 1 )1 0 0 0 4 5
      9 9
        1 0 4
          9 9
            5 5
            5 5
              0
```

例 17

```
              □.□□
□.□□ )□.□
        □.□□
          □□□
          □□□
              0
```

解：这道小数除法算式中，竟然连一个已知数都没有。但是却要求根据算法、算理把全部数字都补上去，真是奇妙！

从哪里寻找突破口？

我们知道，小数除法最后一个不完全积的右端必有若干个 0，这是它与整数除法的特殊之处。这就决定了它的商和除数的最后一位数字，必然为一个是 5，另一个是偶数，否则，它们的积，便不可能是整十、整百、整千……了。

从这道式的特点看，商的十分位是 0。首次商后的余数，数字在 1～9 之间，若不考虑小数点，补 0 后为 100～900 之间。定下这个数之后，便可进一步分析除数和商的末位数了。

除数是三位数与商的末位相乘得整百的数只有：125×4=500，225×4=900。

如果除数是 125（实际是 1.25），则被除数是 130（实际是 1.25+0.05=1.3）。

如果除数是 225（实际是 2.25），则被除数是 234（实际是 2.25+0.09=2.34）。

经检验，这两种情况都符合题意。

则此式可能是：

解 1：

```
             1.0 4
1.2 5 )1.3
       1.2 5
           5 0 0
           5 0 0
               0
```

解 2：

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 1.04 \\
2.25 & \overline{\big)\,2.34} \\
 & \underline{2.25} \\
 & 900 \\
 & \underline{900} \\
 & 0
\end{array}
$$

横式谜

横式谜比竖式谜更为复杂、迷人。

竖式谜只是四则运算中的一种，横式谜则常把加、减、乘、除四则运算贯穿在一个题目中，有着更大的灵活性。

解横式谜，不能孤立地只看一数一式，必须兼顾上下左右的联系，使所填数字适应整体要求。

例 1　将 0、1、2……9 这十个数字，不遗漏，不重复，分别填入□中，组成三道算式：

□＋□＝□

□－□＝□

□×□＝□□

解：这类问题，虽然要多作尝试，但也要找准突破口，否则，胡乱尝试，费时费功也难找到正确答案。

这道题，首先要确定 0 的位置。经分析，前两式不可能含 0。0 只能在第三式的积中。两数的积含 0 的有：2×5＝10　4×5＝20　6×5＝30　8×5＝40，共四道算式。这样，就把尝试的范围大大地缩小了！

经验证，如下填法可符合要求：

7＋1＝8

9－6＝3

5×4＝20

例 2　将 1～9 九个数字，不重复，不遗漏，填入下列式中的□，使等式成立。

□□÷□＝□□÷□＝□□÷□

解：全式中含有三道算式，都是两位数除以一位数，解题应从商入手。

商只能是一位数，若是两位数，则重复的数字太多，三道算式便不能把 1～9 九个数字都包括进去。

这样，只能从商是 2～9 各式中去尝试、筛选。

商是 2	商是 3	商是 4	商是 5
18÷9	27÷9	36÷9	45÷9
16÷8	24÷8	32÷8	40÷8
14÷7	21÷7	28÷7	35÷7
10÷5	18÷6	24÷6	30÷6
15÷5	20÷5	25÷5	
12÷4	16÷4	20÷4	
12÷3	15÷3		

商是 6	商是 7	商是 8	商是 9
54÷9	63÷9	72÷9	81÷9
48÷8	56÷8	64÷8	72÷8
42÷7	49÷7	56÷7	63÷7
36÷6	42÷6	48÷6	54÷6
30÷5	35÷5	40÷5	45÷5
24÷4	28÷4	32÷4	36÷4

18÷3　　　21÷3　　　24÷3　　　27÷3

12÷2　　　14÷2　　　16÷2　　　18÷2

从这一些算式中，按照要求进行分析，把式中含有重复数字的式子全部剔除，余下的式子若符合条件，便是正确的解。

我们发现，只有商是 7 或 9 的有符合要求的算式。即：

21÷3＝49÷7＝56÷8

或：

27÷3＝54÷6＝81÷9

例 3　在下列式中，每个□内填入一个大于 1 的数字，使等式成立。

[□×（□3＋□）]²＝8□□9

解：可采用“层层剥笋”的方法，逐步缩小谜底的范围。

把方括号内看作一个数，此式便成为：一个数的平方是四位数，这个四位数是八千几百几十九。

我们知道，在乘法中，被乘数与乘数的首数相乘满十的，积的位数＝被乘数位数＋乘数位数。由此，缩小了方括号中数的估算范围。

经试算，能满足等式右端条件的完全平方数只有 93，即：93²＝8649，从而断定：方括号内的数必须是 93。

再分析方括号内各□应填的数。

把小括号看成一个数，则是□×□□＝93，93 分解成因数相乘是 3×31，可知小括内的数和应为 31。由“□3＋□＝31”，可推知是 23＋8。这样，全式便破译出来了：

[3×（23＋8）]²＝8649

例 4　在下式□中，分别从 1～9 个数字中，选取八个填入，使带分数相减的差值最大。

$$\square\square\frac{\square}{\square}-\square\square\frac{\square}{\square}$$

解：要使差的值最大，必须把数字组合成被减数最大而减数最小。

可先确定它们的整数部分：被减数填 98，减数填 12。

分数部分从 3、4、5、6、7 五个数选取。

最大的真分数是分子比分母小 1。因此，被减数的分数部分只能在 $\frac{6}{7}$、$\frac{5}{6}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{3}{4}$ 中挑。减数的分数部分值要求最小，应取分母与分子的差最大，由上述3、4、5、6、7五个数组合，应是 $\frac{3}{7}$。这样，被减数的分数部分只能挑 $\frac{5}{6}$，才能避7字重复出现。

故而，上题可填为：

$$98\frac{5}{6}-12\frac{3}{7}$$

例 5　将 1～8 八个数字，分别填入下式□内，使全式的值最小：

□□×□□×□□×□□

解：这是两位数相乘的算式，要使相乘得的积最小，必须使各数的高位数字尽可能小。

根据这个原则，填写的顺序应是：

从左至右，先将 1、2、3、4 填在各个数的十位上，再从右至左，将 8、7、6、5 填在各个数的个位上。最后便得到：

15×26×37×48

例 6　将 1～9 这九个数字，分别填入九个□内，使算式的值为最大。

□□□×□□□×□□□

解：要使乘积最大，同样，要遵循“把比较大的数都填在高位上”的原则。据此，可先从左至右，在各数的百位上分别填 9、8、7，再从右至左，在各数的十位上填 6、5、4，最后再从右至左，在各数的个位上填 3、2、1。结果得：

941×852×763

填空谜

例 1　把 4、5、6、7、8、9、10、11 八个数，分别填在等号两端的□里，使等式成立。

□＋□＋□＋□＝□＋□＋□＋□

解：因为等号两端各有四个数，只要它们的和相等，等式便能成立。题中八个数的总和是 60，则等号两边的四个数的和应各为 30。这八个数还有如下特点：4＋11＝15，5＋10＝15，9＋6＝15，7＋8＝15，只需把这四组数两两一组，或将每一组的两个数分开于等号两端即可。因此，填法有：

（1）4＋11＋5＋10＝9＋6＋7＋8

（2）4＋11＋6＋9＝5＋10＋7＋8

（3）4＋5＋7＋8＝6＋9＋5＋10

例 2　0.25、0.75、22.5、____、____。

解：这类题的各个数间都存在一定的相互关系，并不是彼此孤立毫无联系的。它们都隐含着递增、递减或倍数关系。要认真地观察、分析，找出其中的规律。

本题的各数，愈向后愈大，而且相邻两数间，后一个数总是它前一个数的 3 倍。发现这个规律后，往后的数便可很容易的填出来了。

即：6.75（2.25×3）、20.25（6.75×3）

例 3　0、1、1、2、3、5、8、____、____。

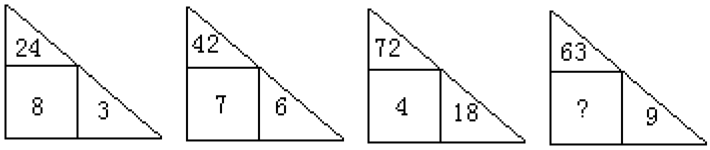
解：这道题初看似无规律：数字虽然逐渐增多，但增多的部分并不相同，又不成倍数关系。仔细分析后，便可发现：后面的数总是它前面两个数的和，这样，问题便迎刃而解了。接下去应填：13（5＋8＝13）、21（8＋13＝21）。

例 4

$\boxed{\frac{17}{14}}$　$\boxed{\frac{51}{48}}$　$\boxed{\frac{22}{19}}$　$\boxed{\frac{?}{23}}$

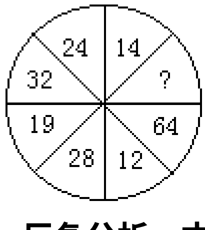
解：每个分数的分子都比分母大，而且差数都是 3。因此可推断最后一个分数的分子是 23＋3＝26，即“？”处应填 26。

例 5



解：每个图中，上端的数是被除数，下端的两个数是除数和商。因此，？＝63÷9＝7。

例 6



解：这类题必须仔细观察，反复分析，才能发现共同的规律，否则，把部分数间的关系当作共同特点，便误入歧途了。本题对顶的两个数间存在共同规律，即较大的数都是较小数的 2 倍。题中不存在小数，因此，与 19 相对

的数应是 19×2＝38，即：？＝38。

例 7

36	15	3
24	5	7
?	13	8

解：这三组数，初看毫无联系。实际，每组数的第一个数都是第二、三两个数和的 2 倍。即：

36＝（15＋3）×2

24＝（5＋7）×2

据此，？＝（13＋8）×2＝42

例 8　请你把 27、32、50、72 各分成任意的四个数，将分成的四个数分别填入各个括号中，使等式成立。

（1）分解 27：（　）＋2＝（　）－2＝（　）×2＝（　）÷2

（2）分解 32：（　）＋3＝（　）－3＝（　）×3＝（　）÷3

（3）分解 50：（　）＋4＝（　）－4＝（　）×4＝（　）÷4

（4）分解 72：（　）＋5＝（　）－5＝（　）×5＝（　）÷5

解：这类问题假如全靠尝试是十分麻烦的。分解成的四个数，分别填入四个括号，各式得数要相等，四个数的和还必须等于原数。

怎样分解原数便成了关键！

从乘式入手，从最小的数 1 试验，而后再调整。以（1）为例，若乘式填 1，则全式仍保持相等就成了：

（0）＋2＝（4）－2＝（1）×2＝（4）÷2

式子虽成立了，但是分解的四个数和为：0＋4＋1＋4＝9，是 27 的三分之一！所以，乘式原来填的 1 太小了，应再扩大 3 倍，这样再保持等式成立，便成了：

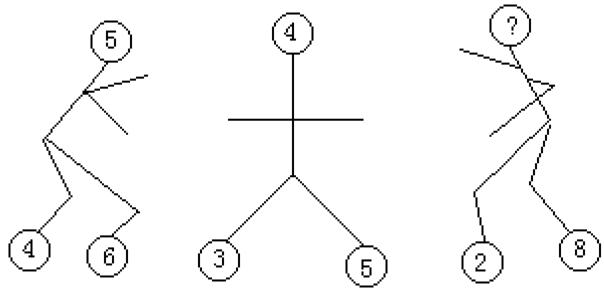
（4）＋2＝（8）－2＝（3）×2＝（12）÷2

各式的结果都等于 6。

分解的四个数和是：4＋8＋3＋12＝27。

其他各题，读者自己填填看。

例 9　找出头、脚数字间的规律，把“？”换成数。



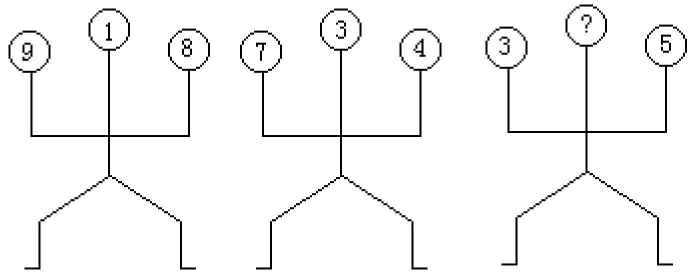
解：寻找数字间的内在关系，可以把每个图作为独立的个体，考察头、脚间三个数的内在联系。也可以把三个人当作一个整体，考察数字的演化过程，用数字间加、减、乘、除，找出存在的共同规律。

若从头上的数字变化，仅三个人 5→4→？看不出规律。经尝试，每个人“头上”的数，都是“脚”上数字和的一半。可知“？”是（2＋8）÷2＝5。

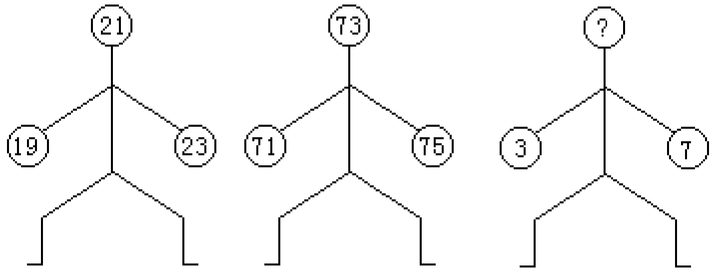
例 10　将“？”填上合适的数：

解：头手共三个数。

若把三人当作整体，仍看不出头上数的变化规律。把每个人当作独立的个体。经尝试，前二人头上数的规律为：中数为两边数的差。从而可知“？”应填上“2”，即 5—3 的差。



例 11

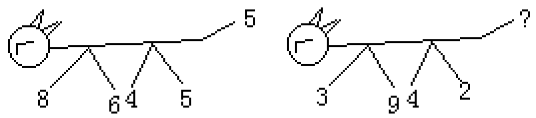


解：第一人头手三数是 19、21、23。

第二个人头手三数是 71、73、75。

都是连续的三个奇数。第三人手中的两个数也是奇数，可知“？”应填“5”。

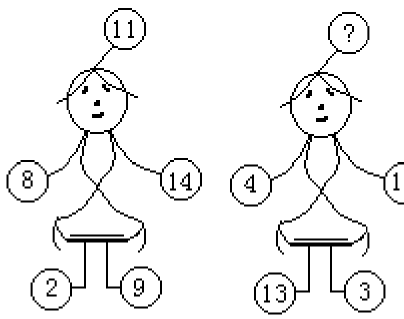
例 12



解：小动物的四条腿和尾上都有数字。共五个。要我们求解的是尾上的数字。应考虑尾上的数可能是由四条腿上的数字而来。

通过多方尝试，第一个动物中，前两腿中两数和与后两腿中两数和相减，差为 5。即：（8＋6）－（4＋5）＝5。可知后一动物中，？＝（3＋9）－（4＋2）＝6。

例 13

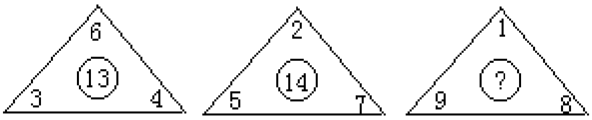


解：小姑娘的头、手、足共有五个数字。头上的数字很可能是其余数字的计算结果。

经检验，两手数字和与两足数字和的差，恰为头上数字。

可知：？＝（4＋15）－（13＋3）＝3

例 14



解：三角形内角三个数的和恰为中心数。可知

？＝9＋8＋1＝18

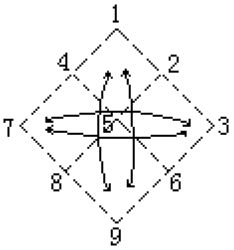
幻方

例 1　将 1～9 九个自然数，填入下图空格内，使横、坚、斜对角每三个数的和都是 15。

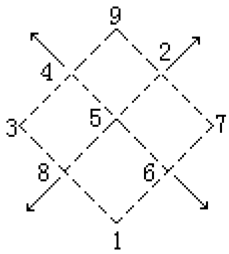
解：在一个由若干个排列整齐的数组成的正方形中，图中任意一横行、一纵列及对角线的几个数之和都相等，具有这种性质的图表，称为“幻方”。我国古代称为“河图”、“洛书”，又叫“纵横图”。

由三行三列数组成的幻方，称为“三阶幻方”。制作这种幻方的方法是：

把九个自然数，按照从小到大的递增次序斜排（如图一），然后把上、下两数对调，左、右两数也对调（如图二），最后再把中部四个数各向外拉出到正方形的四角，幻方就制成了。



图一



图二

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图三

如果把图三制好的幻方，旋转 90°、180°、270°都各成一个新的幻方。如果画在透明纸上，反过来观察，再旋转上述角度每次所得到的幻方，也具备上述性质。这样便可得到八个图，当然，它们并无实质上的区别。

幻方的神奇有趣，还不仅仅表现在纵、横、斜和为 15，它具备的许多奇妙特性，人们尚未充分认识。

例 2　将 1～9 九个自然数，填在 3×3 正方形表格内，使其中每一横行、每一竖列及任一条对角线上的三数之和都不等，并且相邻的两个数在图中位置也相邻。

解：具备题中特征的称为“反幻方”。

据美国当代科普作家加德纳研究发现，符合上述条件的反幻方，只有两个，即：

1	2	3
8	9	4
7	6	5

9	8	7
2	1	6
3	4	5

反幻方也很有趣，瞧，它的数字排列酷似个螺旋，前一个由外向内转，后一个由内向外转。

这使我们想到古代的回文诗。

莺啼岸柳

月明弄
夜睛春

这是一首联珠顶真的回文诗，自外向内再自内向外，如螺旋，可读作：

莺啼岸柳弄春晴，柳弄春睛夜月明。

明月夜睛春弄柳，睛春弄柳岸啼莺。

看一下，它们多么相像！

例 3　认真观察下列的七阶幻方，指出它有哪些显著的特点。

10	12	11	7	44	45	46
49	19	20	17	34	35	1
48	37	24	23	28	13	2
47	26	29	25	21	14	3
8	18	22	27	26	32	42
9	15	30	33	16	31	41
4	38	39	43	6	5	40

解：这个幻方纵、横、斜对角的七个数和是 175；如果圈出图内 5×5 格，也是个幻方，它的纵、横、斜五个数和也是 175；圈出中心的三阶幻方，纵、横、斜三数和是 75。这个幻方的奇妙之处是：将七阶幻方，剥掉一层，就成了五阶幻方；再剥掉一层，就成了三阶幻方。它从中心向外辐射，内部的三阶幻方是个核心。因此，这种幻方，叫做同心幻方，也叫嵌套幻方。

例 4　下图是由 1～64 组成的八阶幻方，如果把其中的数字逐个间隔地取出来，按原顺序重新组成两个四阶方阵，这个新的数字方阵，有什么特点？

1	35	24	54	43	9	62	32
6	40	19	49	48	14	57	27
47	13	58	28	5	39	20	50
44	10	61	31	2	36	23	53
22	56	3	33	64	30	41	11
17	75	8	38	59	25	46	16
60	26	45	15	18	52	7	37
62	29	42	12	21	55	4	34

解：我们先把上图中数字逐个间隔地取出来，排成如下面的四阶方阵，再分析它们的特点。

1	24	43	62
47	58	5	20
22	3	64	41
60	45	18	7

图1

35	54	9	32
13	28	39	50
56	33	30	11
26	15	52	37

图2

在这两个图中，任意一横行的数字和是 130，任意一纵行的和以及斜对角四数之和都是 130！更为奇妙的是：把所有的对角线连起来，凡是不足四个数的，便与它相对平行的间隔大的一个或两个数相加，其和仍是 130。

例如：

$\boxed{47+24}+\boxed{18+41}=130$

$\boxed{22+45}+\boxed{43+20}=130$

$\boxed{47+3+18}+\boxed{62}=130$

$\boxed{45+64+20}+\boxed{1}=130$

……

例 5　下图是个八阶幻方，算一算，它们的纵、横、对角线上的八个数和是多少？再算算八个数的积是多少？你发现了什么？

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
216	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	138	243	100	29	105	152

解：只要学会多位数四则运算了，八个数的加或乘，并不难，细心一些就行了。

任抽几行算算看：

216＋161＋17＋52＋171＋90＋58＋75＝840

39＋34＋138＋243＋100＋29＋105＋152＝840

117＋232＋17＋50＋45＋108＋133＋138＝840

200＋153＋58＋13＋92＋57＋162＋105＝840

46＋60＋17＋87＋91＋225＋162＋152＝840

203＋153＋90＋184＋38＋108＋25＋39＝840

……

纵、横、斜任意一行，八个数的和都是 840。

将上面的每八个数相乘，令人惊奇的是，它们的积也相等！都是 2058068231856000。

这个乘积的数字太大了！

有没有乘积小一些的幻方呢？

遗憾的是，至今为止，数学爱好者们对阶数低于 8 的“双料”幻方，还没发现过！尽管多于八阶、十六阶以及更高阶的幻方都有制作。但是这种等和、等积的幻方，八阶以下的根本没有，或虽然有却无人能创制，总之，现在还是个谜！

例 6　下面的图是由 1～81 连续自然数组成的九阶幻方。现把它分割成相等的九块。算算看，每一小块中的纵、横、斜对角的数字和有什么特点？

解：从左至右，从上而下，我们对每一个方块中的纵、横、斜三数进行加法运算，令人惊奇的是：这个九阶幻方中，所分成的九小块，每一小块也都自成幻方！

它们的常数分别是：

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	54
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

96，231，42；69，123，177；204，15，150。

这三组数的和都是 369，也是相等的，这个数又是整个大幻方的常数。

这种一个大幻方中，又蕴含着许多各自独立的小幻方，被称作“母子幻方”。最早的“母子幻方”创制者是我国宋代的数学家杨辉，当时他只画出了图形，没加任何文字说明，人们大都像猜谜一样看不懂。后人经过研究，终于明白了他的意图，还弄懂了制作的方法。

例 7　上海博物馆存有一块伊斯兰教徒佩带的玉挂，它是从浦东陆家嘴附近一个名叫陆深的墓中发现的。据考证，陆深是三国时东吴大将陆逊的后人。玉挂的正面刻有：“万物非主，唯其真宰，穆罕默德为其使者。”玉挂的反面却整齐地刻着 16 个阿拉伯数字，经过专家的破译，原来是个四阶完全幻方（如图）。请你认真地计算一下，这个幻方有哪些更奇特的特点？

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

解：这个幻方具有如下特点：

①纵、横、对角线四数之和（34）都相等。

②对角线“折断”平行线上四数之和也相等，如：

11＋13＋4＋6＝3＋5＋14＋12＝34

14＋2＋3＋15＝5＋9＋12＋8

＝13＋16＋4＋1

＝11＋7＋6＋10

③幻方中，任何一个 2×2 正方形中四数之和也相等。如

8＋11＋13＋2＝11＋14＋2＋7

＝14＋1＋7＋12

＝34……

④幻方中，任何一个 3×3 正方形，它的四个角数字之也是 34！如：

8＋9＋14＋3＝11＋6＋1＋16

＝34……

数阵

数阵是由幻方演化出来的另一种数字图。幻方一般均为正方形。图中纵、横、对角线数字和相等。数阵则不仅有正方形、长方形，还有三角形、圆、多边形、星形、花瓣形、十字形，甚至多种图形的组合。变幻多姿，奇趣迷人。一般按数字的组合形式，将其分为三类，即辐射型数阵、封闭型数阵、复合型数阵。

数阵的特点是：每一条直线段或由若干线段组成的封闭线上的数字和相等。

它的表达形式多为给出一定数量的数字，要求填入指定的图中，使其具备数阵的特点。

解数阵问题的一般思路是：

1.求出条件中若干已知数字的和。

2.根据“和相等”，列出关系式，找出关键数——重复使用的数。

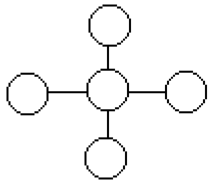
3.确定重复用数后，对照“和相等”的条件，用尝试的方法，求出其他各数。有时，因数字存在不同的组合方法，答案往往不是唯一的。

一、辐射型数阵

例 1　将 1～5 五个数字，分别填入下图的五个○中，使横、竖线上的三个数字和都是 10。

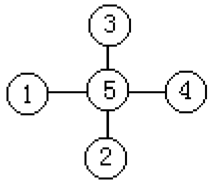
解：已给出的五个数字和是：

$$1+2+3+4+5=15$$



题中要求横、竖每条线上数字和都是 10，两条线合起来便是 20 了。20－15＝5，怎样才能增加 5 呢？因为中心的一个数是个重复使用数。只有 5 连加两次才能使五个数字的和增加 5，关键找到了，中心数必须填 5。确定了中心数后，按余下的 1、2、3、4，分别填在横、竖线的两端，使每条线上数的和是 10，便可以了。

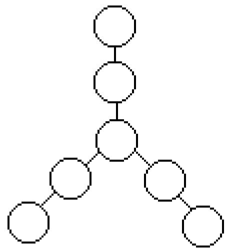
通过尝试，可以填为：



例 2　将 1～7 七个数字，分别填入图中的各个○内，使每条线上的三个数和相等。

解：图中共有 3 条线，若每条线数字和相等，三条线的数字总和必为 3 的倍数。

设中心数为 a，则 a 被重复使用了 2 次。即，



$$1+2+3+4+5+6+7+2a=28+2a$$

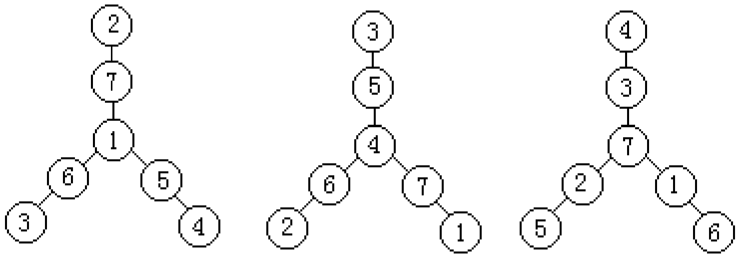
28＋2a 应能被 3 整除。

$$(28+2a)\div 3=28\div 3+2a\div 3$$

其中 28÷3＝9…余 1，所以 2a÷3 应余 2。由此，便可推得 a 只能是 1、4、7 三数。

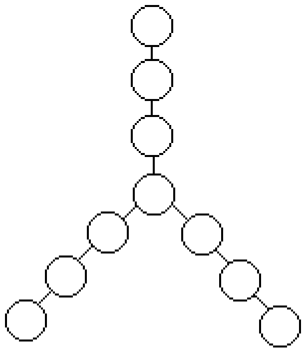
当 a＝1 时，28＋2a＝30　30÷3＝10，其他两数的和是 10－1＝9，只要把余下的 2、3、4、5、6、7，按和为 9 分成三组填入两端即可。

同理可求得 a＝4、a＝7 两端应填入的数。



例 3　将从 1 开始的连续自然数填入各○中，使每条线上的数字和相等。

解：图中共有三条线，若每条线数字和相等，三条线的数



字总和必为 3 的倍数。

设中心数为 a，a 被重复使用了两次，即：

$$1+2+3+\cdots\cdots+10+2a=55+2a$$

55＋2a 应能被 3 整除。

$$(55+2a)\div 3=55\div 3+2a\div 3$$

其中，55÷3＝18 余 1，所以 2a÷3 应余 2。由此，可推知 a 只能在 1、4、7 中挑选。

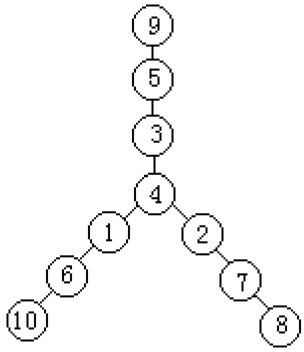
在 a＝1 时，55＋2a＝57，57÷3＝19，即中心数若填 1，各条线上的数字和应为 19。但是除掉中心数 1，在其余九个数字中，只有两组可满足这一条件，即：

$$9+7+2=18$$
$$8+6+4=18$$
$$7+5+3=15$$

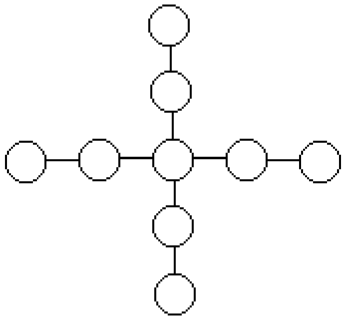
所以，a 不能填 1。

经试验，a＝7 时，余下的数组合为 12（19－7＝12），也不能满足条件。

因此，确定 a 只能填 4。即



例 4　将 1～9 九个数字，填入下图各○中，使纵、横两条线上的数字和相等。

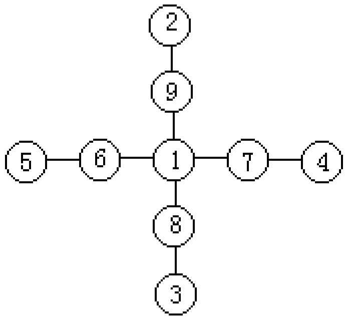


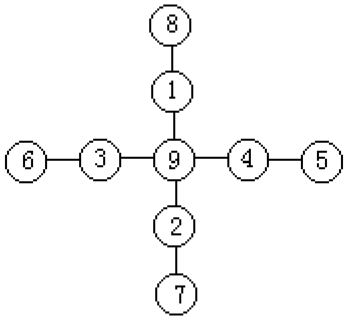
解：1～9 九个数字和是：

1＋2＋3＋……＋9＝5×9＝45

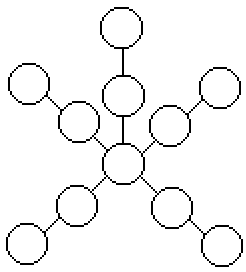
把 45 平分成两份：45÷2＝22 余 1。

这就是说，若使每行数字和为 23，则需把 1 重复加一次，即中心数填 1；若使数字和为 24，中心数应填 3……。总之，因 45÷2 余数是 1，只能使 1、3、5、7、9 各个奇数重复使用，才有可能使横、竖行的数字和相等。因而，此题可有多种解法。但中心数必须是 9 以内的奇数。如：



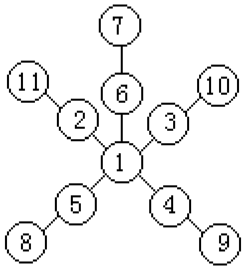


例 5　将 1～11 十一个数字，填入下图各○中，使每条线段上的数字和相等。



解：图中共有五条线段，全部数字的总和必须是 5 的倍数，每条线上的数字和才能相等。

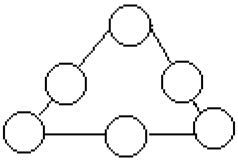
1～11 十一个数字和为 66，66÷5＝13 余 1，必须再增加 4，可使各线上数字和为 14。共五条线，中心数重复使用 4 次，填 1 恰符合条件。



此题的基本解法是：中心数重复使用次数与中心数的积，加上原余数 1，所得的和必须是 5 的倍数。据此，中心数填 6、11 均可得解。

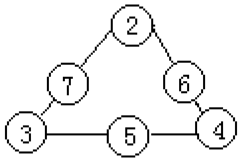
二、封闭型数阵

例 1　把 2、3、4、5、6、7 六个数字，分别填入○中，使三角形各边上的数字和都是 12。



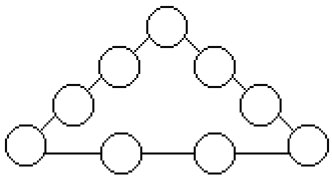
解：要使三角形每边上的数字和都是 12，则三条边的数字和便是 12×3＝36，而 2＋3＋4＋5＋6＋7＝27，36 与 27 相差 9。

三个角顶的数字都重复使用两次，只有这三个数字的和是 9，才能符合条件。确定了角顶的数字，其他各数通过尝试便容易求得了！

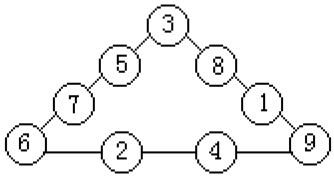


这题还可有许多解法，上图只是其中一种。

例 2　把 1～9 九个数字，分别填入下图○中，使每边上四个数的和都是 21。

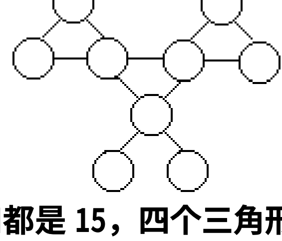


解：要使三角形每条边上的数字和是 21，则三条边的数字和便是：21×3＝63。而 1～9 九个数字的和只有 45。45 比 63 少 18，只有使三角形三个顶角的数字和为 18，重复使用两次，才能使总和增加 18。所以应确定顶点的三个数。下面是填法中的一种。

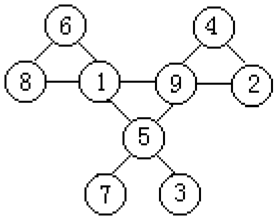


确定了顶角的数后，其他各数便容易了。

例 3　下图是四个互相联系的三角形。把 1～9 九个数字，填入○中，使每个三角形中数字的和都是 15。



解：每个三角形数字和都是 15，四个三角形的数字和便是：15×4＝60，而 1～9 九个数字和只有 45。45 比 60 少 15。怎样才能使它增加 15 呢？靠数字重复使用才能解决。



中间的一个三角形，每个顶角都联着其他三角形，每个数字都被重复使用两次。因此，只要使中间的一个三角形数字和为 15，便可以符合条件。因此，它的三个顶角数字，可以分别为：

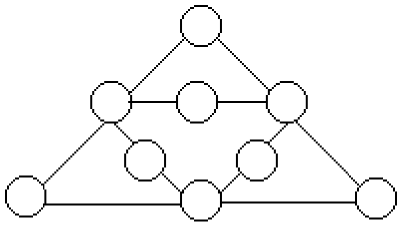
1、9、5　2、8、5　2、7、6　4、6、5

2、9、4　3、8、4　3、7、5　8、6、1

把中间的三角形各顶角数字先填出，其他各个三角形便容易解决了。

前页下图是其中的一种。

例 4 把 2～10 九个数字，分别填入下图○中，使每条直线上的三个数和为 15。



解：2～10 九个数字的和为：

$$2+3+4+\cdots\cdots+10=6\times9=54$$

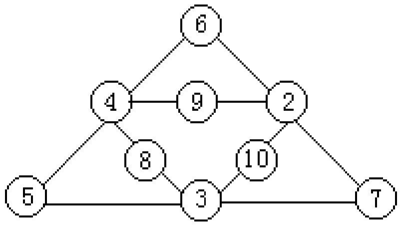
若排成每个三角形每边的数字和都是 15，图中含有每边都三个数字的三角形有两个，共六条边，数字总和应是 15×6＝90。54 比 90 少 36。在外围的六个数都被重复使用了两次，它们又分属于两个三角形。所以，每个三角形三个顶角的数和应为：36÷2＝18。

这样，便可以先填外三角形三个顶角的数。

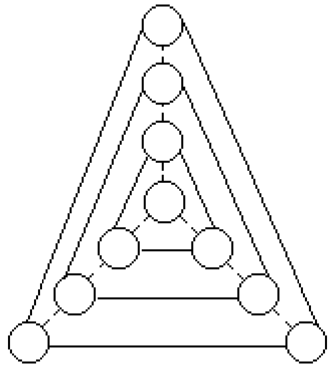
三个数和为 18 的有很多组，可以通过试验筛选出适宜的一组。

填好了外围三角形各个数后，里面的三角形，因为顶角的数已知，其他各数便容易填写了。

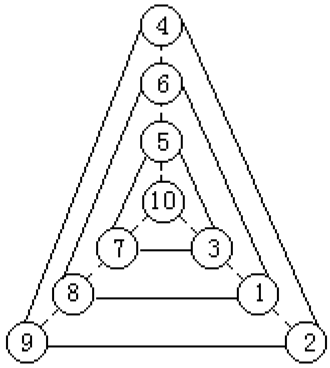
下面是填法中的一种：



例 5 把 1～10 十个数字，分别填入下图○中，使每个三角形三个顶角的三个数字和相等。

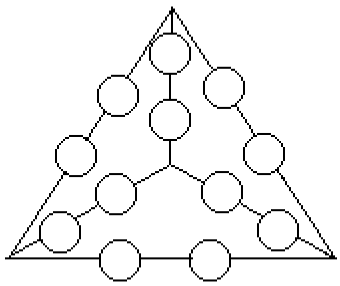


解：图中有三个三角形，顶角数字互不联系，中心的一个数独立于各个三角形之外。因此，要使各三角形顶角的数字和相等。去掉中心数后，数字总和应是 3 的倍数，而且三角形顶角的数字三组中不能出现重复。



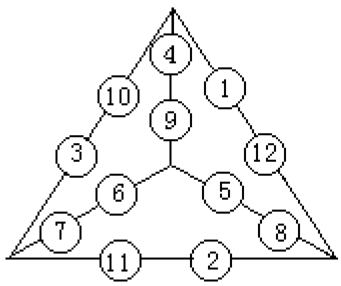
如：以 10 为中心数，可填为如前页下图样。

例 6 将 1～12 分别填入下图○中，使图中每个三角形周边上的六个数的和都相等。



解：图中共有四个三角形，共有六个边。1～12 的数字和是 78。每条边上的数字和应为：78÷6＝13。

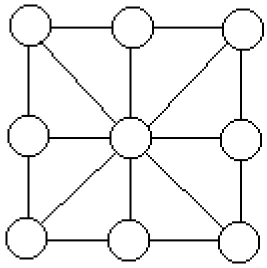
如：



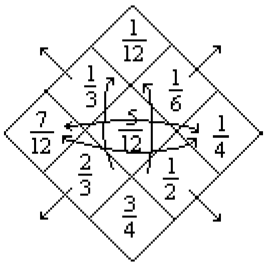
这样，我们可以推想：因为内部的三条边都被重复计算两次，只要每个数增加 1，十二个数的总和便增加 6，它们同样可以填出来，因而，本题的解

法是很多的。

7. 把$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{5}{12}$、$\frac{7}{12}$九个数分别填入下图○中，使每条直线上的三个数的和都相等。



解：九个分数排成方阵，使纵、横、对角线的三个数和相等，这已经符合幻方的要求了，因此，可以按幻方的制作方法求解。

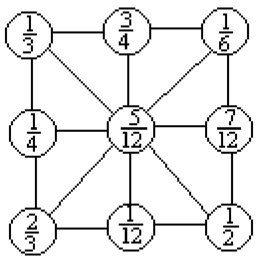


这十二个分数，按从小到大的顺序排列是：

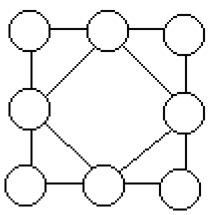
$$\frac{1}{12}、\frac{1}{6}、\frac{1}{4}、\frac{1}{3}、\frac{5}{12}、\frac{1}{2}、\frac{7}{12}、\frac{2}{3}、\frac{3}{4}$$

把它们按序排列为斜方形：

将上、下两数，左、右两数对调，再把中间四数向外拉出，这样重新组成的数阵，便是求得的解了。



例 8 将 1～8 八个数字，分别填入下图○中，使每个小三角形顶点上三数之和为 12。



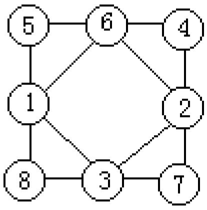
解：图中共有四个小三角形，每个三角形顶点数字的和若都是 12，数字总和便是 12×4＝48，可是 1～8 八个数字总和只有 36。36 比 48 少 12。只有靠共用顶角上数的重复使用，才能解决。因此，必须把四个公用顶角的数字和填成 12。把 1～8 八个数四个一组，和为 12 的有：

6＋3＋2＋1

5＋4＋2＋1

上述两组中，经验证，只有 6＋3＋2＋1 可以作公用顶点的数字。

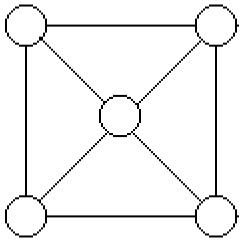
确定了公用顶点的数，其他各数也便容易了。可填为：



例 9 在下图五个○内，各填入一个自然数，使图中八个三角形中顶点的数字和各不相同。求能满足这个条件的自然数中最小的五个数。

解：能满足使八个三角形顶点数字和各不相同的任意自然数有很多组，但自然数中能满足这个条件的最小自然数却只有一组。

最小的一组自然数中的五个数，若有两个相同的，其中三个数的和可以多到有 7 个不同值，因此，五个数互不相同。如



果这五个数是 1，2，3，4，5，则其中三个数的和有如下组合方式：

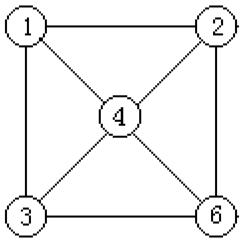
1＋2＋3＝6　2＋3＋4＝9　 3＋4＋5＝12

1＋2＋4＝7　1＋3＋4＝8　 2＋3＋5＝10

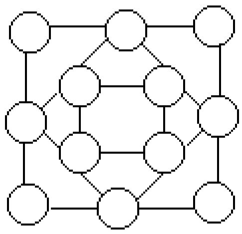
2＋4＋5＝11

这样，总共只有七种不同的和，而图中共有八个三角形，可知 1，2，3，4，5 五个自然数不能满足条件。

因而，可填为如下形式。



例 10 在下列图中三个正方形中，每个正方形的四个顶点上，只填入 1，2，3，4 四数，使图中八个三角形顶点数字和互不相同。

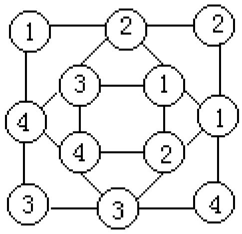


解：图中，顶角在大正方形边上的四个三角形，顶角都分别为两个三角形共用，只有正方形的四个角分别只属于一个三角形，所以，四个三角形顶

点数字的和应等于：

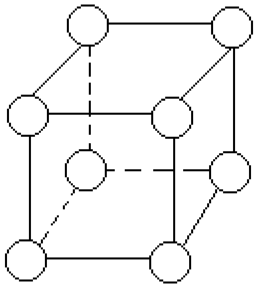
(1＋2＋3＋4）×3＝30

30 不是 4 的倍数，因而，外面的四个三角形顶点数字和不可能相等。同理，里面的四个三角形顶点数字和也不可能相等。



题中要求，每个三角形顶点数字和不相同，1～4 四个数之和最小值是 1＋1＋2＝4，最大值是 4＋4＋3＝11，这样共可组成八组数，将八组数分别填入各个三角形顶点，便可符合条件。

例 11　将 1～8 八个数字，分别填入下图○中，使每个面的四个数和相等。



解：数字图是个正立方体，共有六个面。每个面四个顶点上的数都是三个面重复使用的。

1～8 八个数的数字总和是：

1＋2＋3＋……＋8＝36

因为每个顶点的数都被重复使用三次，所以六个面的数字总和是：

36×3＝108

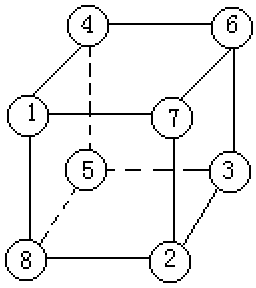
每个面的数字和便是：

108÷6＝18

这样，便可填为下图或其他形式。

由数学符号、文字符号或图形等组合成的数学问题，幽深、隐秘，妙趣横生。

符、形问题扑朔迷离，初看无从下手。但只要认真分析一下题目的特点，它与“虫蚀算”有些相似，仍然可以从中找出隐含的“蛛丝马迹”。



解这类问题，要根据组成题目的各种条件和其中的已知数目，上下或前

后对照，综合分析，发现其中的内部联系，找出一两个突破口，便可使问题破译。

符形数谜

由数学符号、文字符号或图形等组合成的数学问题，幽深、隐秘，妙趣横生。

符、形问题扑朔迷离，初看无从下手。但只要认真分析一下题目的特点，它与“虫蚀算”有些相似，仍然可以从中找出隐含的“蛛丝马迹”。

解这类问题，要根据组成题目的各种条件和其中的已知数目，上下或前后对照，综合分析，发现其中的内部联系，找出一两个突破口，便可使问题破译。

竖式谜

例 1　题中的“桃、李、杏、橘、梨”各代表什么数字，算式才能成立？

$$\begin{array}{r} \text{桃李杏橘} \\ +\ \text{桃李梨橘} \\ \hline \text{梨橘杏桃橘} \end{array}$$

解：这是由数种水果摆成的加法算式。在同一道题中，同一种水果，不论它在哪个数位上，代表的数字都是相同的。

本题中，“梨”是由“桃+桃”进位得出的，可知它代表 1，因为两个数字相加只能进“1”。

从个位“橘+橘”仍得“橘”，可知“橘=0”。再从“桃+桃=橘”，可知“桃=5”。

从“杏+梨=桃”，已知梨=1，桃=5，可知“杏=4”。

从“李+李=杏”，已知“杏=4”，所以“李=2”。

从而可知全式为：

$$\begin{array}{r} 5\ 2\ 4\ 0 \\ +\ 5\ 2\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 4\ 5\ 0 \end{array}$$

例 2

$$\begin{array}{r} \text{学习} \\ \text{学习} \\ +\ \text{学习} \\ \hline \text{再学习} \end{array}$$

解：从竖式看，三个加数是相同的两位数，而且和的末两位与加数相同。

个位的“习+习+习=习”，在 1～9 各数中，只有 0 和 5 可能。若习为 5，则十位的“学”三数相加再加进位的“1”，便没有符合条件的数。所以断定“习=0”。

十位的“学+学+学=学”，也只能是 5，才成立。由此，又可推断“再=1”。

所以原式是：

$$\begin{array}{r} 5\ 0 \\ 5\ 0 \\ +\ 5\ 0 \\ \hline 1\ 5\ 0 \end{array}$$

例 3

$$\begin{array}{r} \text{有趣} \\ \text{真有趣} \\ +\ \text{真是有趣} \\ \hline 1\,9\,9\,4 \end{array}$$

解：个位“趣+趣+趣=□4”，推断“趣=8”。和的十位数是 9，其中含个位进上来的 2，所以，“有+有+有=□7”，推断“有=9”，进位二。

从和的千位与百位数字特征，推断出“真=1”，“是=6”。

原式便是：

$$\begin{array}{r} 9\ 8 \\ 1\ 9\ 8 \\ +1\ 6\ 9\ 8 \\ \hline 1\ 9\ 9\ 4 \end{array}$$

例 4

```
    学 数 学
    用 数 学
  学 好 数 学
 +用 好 数 学
─────────────
数 学 学 为 用
```

解：根据竖式特点分析：可知“数=1”，“学=2”，“用=8”。再从“学+用+好+好”中，推定“好=6”，“为=4”。

故数字式为：

```
     2 1 2
     8 1 2
   2 6 1 2
 + 8 6 1 2
──────────
 1 2 2 4 8
```

例 5

```
   想 想 看
 + 算 算 看
──────────
 边 算 边 看
```

解：个位数“看+看=看”，推断“看=0”。

千位的“边”是从进位得来的，百位的加数是两个，进位只能是 1，所以“边=1”。

和的十位上是“边”，可知“想+算=11”，百位上的“想+ 算”再加上进位的 1，应是 12，推断：“想=9”。

所以算式是：

```
   9 9 0
 + 2 2 0
────────
 1 2 1 0
```

例 6

```
   巧 啊 巧
 + 真 是 巧
──────────
 真 是 巧 啊
```

解：和的千位“真”是由加数的百位数“巧+真”进位得来，断定“真=1”，因为两个数相加不可能进 2。

和的百位“巧+真=是”，已知“真=1”，可知“巧=9，是= 0”。

和的个位“巧+巧=啊”，已知“巧=9”，所以“啊= 8”。

算式应为：

```
   9 8 9
 + 1 0 9
────────
 1 0 9 8
```

例 7

```
   K K K
 +     N
────────
 1 0 0 0
```

解：从和的连续进位，可断定“K=9”。

由个位“K+N=0”中，已知 K=9，则 N=1。

算式应为：

```
   9 9 9
 +     1
────────
 1 0 0 0
```

例 8

$$\begin{array}{r} A \\ A \\ A \\ A\ A \\ +A\ A\ A \\ \hline 5\ 0\ 0 \end{array}$$

解：由个位五个 A 相加，和的个位是 0，且十位有二个 A，加上进位为 0，可知 A 不是 0，便是 4。

从和的百位是“5”，断定“A≠0”，且 A<5。

算式便是：

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4\ 4 \\ +4\ 4\ 4 \\ \hline 5\ 0\ 0 \end{array}$$

例 9

$$\begin{array}{r} M\ C \\ M\ C\ M \\ +M\ C\ C\ C \\ \hline M\ M\ M\ 6 \end{array}$$

解：从个位“C+M+C=6”，可知十位“M+C+C=6”。而和的十位数是 M，断定“M=6”，由“M=6”，可知“C=0”。

算式应为：

$$\begin{array}{r} 6\ 0 \\ 6\ 0\ 6 \\ +6\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 6\ 6\ 6\ 6 \end{array}$$

例 10 ABC 是个三位数。

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ +A\ B\ C \\ \hline 3\ 4\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=(\quad) \\ B=(\quad) \\ C=(\quad) \end{array}$$

解：从个位“C+C=8”，可知“C=8÷2=4”。

从百位“A+A=3”，3 为单数，可断定其中含有十位上进过来的 1，实际 A+A=2，“A=1”。

十位 B+B=14，可知“B=7”。

算式应是：

$$\begin{array}{r} 1\ 7\ 4 \\ +1\ 7\ 4 \\ \hline 3\ 4\ 8 \end{array}$$

例 11

$$\begin{array}{r} S\ E\ N\ D \\ +M\ Q\ R\ E \\ \hline M\ Q\ N\ E\ Y \end{array}$$

解：这题全由英文字母组成。

由千位的进位情况，可断定“M=1”、“S=9”、“Q=0”，由百位和十位的进位情况，可求出“R=8”、“ N=6”、“D=7”、“E=5”“Y=2”。

算式应为：

$$\begin{array}{r} 9\ 5\ 6\ 7 \\ +1\ 0\ 8\ 5 \\ \hline 1\ 0\ 6\ 5\ 2 \end{array}$$

例 12

$$\begin{array}{r} ABCD \\ +CBAB \\ \hline BBCBB \end{array}$$

解：由千位数“A+C”进位，断定“B=1”。

由个位数“D+B=B”，断定“D=0”。

由十位数“C+A=B=1”可知 C＋A 满十进 1。

由百位数“B+B=C”可知“C=2+1=3”，已知“C=3”，由十位和千位加式，断定“A=8”。

可知原式为：

$$\begin{array}{r} 8130 \\ +3181 \\ \hline 11311 \end{array}$$

例 13

$$\begin{array}{r} 帅兵兵兵 \\ -\ \ 将兵兵 \\ \hline 将兵兵 \end{array}$$

解：从和的个位“兵-兵=兵”，可知“兵=0”。

从全式四位数减去三位数，差变成了三位数，可知因借位造成的，帅必为 1。

从百位上“兵-将=将”，已知“兵=0”，则将必为 5。

原式应是：

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -\ \ 500 \\ \hline 500 \end{array}$$

例 14

$$\begin{array}{r} 前进进前 \\ -\ \ 进速进 \\ \hline 速进速 \end{array}$$

解：从算式可知，被减数是四位数，相减后，差变成了三位数，必因借位造成的。从而断定“前=1”。从“进-进=速”，同数相减需借位，其差为 9，可知“速=9”。由个位“前-进=速”，已知前为 1，速为 9，可断定“进=2”。

全式便是：

$$\begin{array}{r} 1221 \\ -\ \ 292 \\ \hline 929 \end{array}$$

例 15

$$\begin{array}{r} ABC \\ -BCA \\ \hline AB \end{array}$$

解：可以这么分析：

从百位 A-B=0，可知 B+1=A，10+B-C=A，C-A

=B。把 10+B-C=A 中的“B”换成 C-A 则可求得 10+（C-A）-C=A 10=2A “A=5”。

再由 B+1=A，可知“B=4”。

由 C-A=B，也即 C=A+B=5+4=9。

算式应为：

$$\begin{array}{r} 549 \\ -495 \\ \hline 54 \end{array}$$

例 16 下式中 A、B、C、D 各应是什么数？

$$\begin{array}{r} A0BC7 \\ -\ \ BCBC \\ \hline D0D \end{array}$$

解：全式是五位数减去四位数，差变成了三位数。从而断定：“A=1”，“D=9”，这样便找到了解题的突破口。

从个位 7-C=9，可知“C=8”。

从十位 C-B=0，已知 C=8，则“B=7”。

全式便破译了：

$$\begin{array}{r} 10787 \\ -\ \ 9878 \\ \hline 909 \end{array}$$

例 17 下式中文字各代表什么数？

$$\begin{array}{r} \text{飞呀飞} \\ \times\ \ \ 6 \\ \hline \text{快飞快飞} \end{array}$$

解：被乘数是三位数，乘以 6 后变成了四位数，断定飞＞1，这样才有可能进位。

假定“飞=2”，2×6=12，进 1。这样，对照百位数的“飞×6”，则“快=1”了！再对照十位的“呀×6=快”，便矛盾了，因为不论“呀”是几与 6 相乘都不可能得 1（快）。所以，“飞≠2”。

飞不可能是 3，因为 3×6=18，尾数不是同一个字。其它 5、6、7、8、9 与 6 相乘，积的个位都不能与被乘数个位相同。

所以，“飞”只能是 4。

由此，可断定“呀=0”，“快=2”。

算式是：

$$\begin{array}{r} 404 \\ \times\ \ \ 6 \\ \hline 2424 \end{array}$$

例 18 下列算式中，每个不相同的字都代表一个不同的数字。已知“赛”代表 9，其他各代表什么数字？

$$\begin{array}{r} \text{来参加数学邀请赛} \\ \times\qquad\qquad\qquad \text{赛} \\ \hline \text{来来来来来来来来} \end{array}$$

解：已知“赛=9”，则个位“赛×赛=81”“来=1”进 8。“请”只有是 7，才能使积的十位数字是 1。“请×赛+8=71”，进 7。“邀=6”，才能使百位的积也是 1。

同样道理，可以推知：

“学=5”，“数=4”，“加=3”，“参=2”，所以，算式是：

$$\begin{array}{r} 123456789 \\ \times\qquad\qquad 9 \\ \hline 111111111 \end{array}$$

例 19

$$\begin{array}{r}A\ B\ C\ D\\ \times\qquad 9\\ \hline D\ C\ B\ A\end{array}$$

其中：A=1 B=（ ） C=（ ） D=（ ）

解：由“A=1”推断“D=9”。千位A×9=9结合十位的进位8，推断“B=0”，“C＝8”。

算式是：

$$\begin{array}{r}1\ 0\ 8\ 9\\ \times\qquad 9\\ \hline 9\ 8\ 0\ 1\end{array}$$

例20 把下式的文字变为数字，使算式成立。

$$\begin{array}{r}\text{我 们 喜 欢 数 学}\\ \times\qquad\qquad\quad \text{学}\\ \hline \text{好 好 好 好 好 好}\end{array}$$

解：这个算式的特点是：被乘数的六个数字各不相同，积却是同一个数字。

首先分析个位数“学×学”同数相乘寻找突破口：“学”不可能是1，因为1×1=1，与“学×学=好”相矛盾。

假定“学=2”，则“好=4”，这样，必须“数=7”，才能使“好=4”。2×7=14，进1，只有“欢×学=3”，才能保证“好=4”，但乘数“学”若是2，与任何整数相乘，都不能得3。所以“学≠2”。

假定“学=3”，则“好=9”。而被乘数中其他各数都不是3，积也不能再得9。所以，“学≠3”。

假定“学=4”，4×4=16，则“好=6”，进位1，此后4乘任何数再加进来的1，都不能得6。所以，“学≠4”。

假定“学=5”，5×5=25，则“好=5”，不合题意。同理，“学≠6”。

再试“学=7”，“好=9”符合题意。

已知个位数，学=7，积为999999，其他各数便不难求得了。

所以这道算式是：

$$\begin{array}{r}1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7\\ \times\qquad\quad 7\\ \hline 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\end{array}$$

例21

$$\begin{array}{r}\text{客 上 天 然 居}\\ \times\qquad\qquad \text{请}\\ \hline \text{居 然 天 上 客}\end{array}$$

解：“天然居”是连云港市中心的一座高级宾馆。它的顶层可自动旋转，登临楼顶，宛如腾云驾雾，远望青山绿水，俯视车水马龙，港城风光尽收眼底。

上述问题，也如谜似幻，难在乘式的积都是各不相同的文字。

但是，只要作深入的分析考查，仍可找到解题线索。就从个位“居×请=□客”和万位“客×请=居”入手吧。

被乘数是五位数，积仍是五位数，说明“客×请”的积小于10，因数中若没有1，则必为2和4。因为“客”、“请”是两个不相同的文字，不可能都是3。

假定“客=4”，“请=2”，则居可能是8。若是8，对照个位“居×请=客”不符。

假定“客=2”，“请=4”，则“居×请=□2”符合题意，再推断出“居=8”……。

这样，经过反复尝试，最后便可揭开谜底。即：“客=2”，“上=1”，“天=9”，“然=7”，“居=8”，“请=4”。

全式为：

```
   2 1 9 7 8
 ×         4
 -----------
   8 7 9 1 2
```

例 22 下式中，“奇”字为奇数，即指 1、3、5、7、9 中的某一个，“偶”字为偶数，即指 0、2、4、6、8 中的某一个。为使竖式成立，求它的所代表的数字。

```
     奇 偶
   ×偶 奇
 ---------
  偶 偶 偶
  偶 偶
 ---------
  偶 偶 偶
```

解：在乘法中，奇数×奇数=奇数，奇数×偶数=偶数，偶数×偶数=偶数。

在加法中，奇数+奇数=偶数，奇数+偶数=奇数，偶数+偶数=偶数。

据此，对照部分积进行分析，被乘数中的“奇≥3”，因为若＜3，即使与 9 相乘，进位也不可能是偶数。从第二部分积看，它只能是 3，否则与乘数中的“偶”相乘，便不会是两位数了。

由被乘数中的“奇=3”，可推定乘数中的“偶=2”，否则，便不可能使第二部分积为两位数。

被乘数中的“偶”≤4，否则，第二部分积的百位数将是奇数了！验证后，断定：“偶=2”。

最后分析乘数中的“奇”代表的数字。经尝试 3、5、9 都不符合条件，所以，乘数的个位数的“奇=7”。

从而列出算式：

```
     3 2
   × 2 7
  -------
   2 2 4
   6 4
  -------
   8 6 4
```

数字所在的数位，完全符合原式中奇、偶数的规定。

例 23 下式中，不同位置的“奇”、“偶”可以是相同的数，也可以是不同的数。但是数位是“奇”必须是奇数，数位是“偶”必须是偶数。

```
                   奇 奇 偶
 奇 奇 6 ) 偶 偶 奇 奇 偶
           偶 奇 偶
           ---------
           奇 奇 奇
           奇 偶 偶
           ---------
                 偶 奇 偶
                 偶 奇 偶
           -----------------
                        0
```

解：为了便于分析和叙述，我们将式中的“奇”、“偶”换成不同的代号。根据“奇数×奇数=奇数”，“偶数×偶数=偶数”，“偶数×奇数=偶数”

的规律，可作如下分析：

fgh 和 mnp 是不同的三位数，说明：c、d 不可能是 1、9，只能是 3、5、7 中的两个数。从而可断定“a=1”。b 位是奇数。若 b 是奇数，“ab6×5”的十位数必是偶数，所以“c≠5”。如果“d＝5”，则“p=0”。从式中可见“k-p”是借前一位的，所以“p≠0”，因而，“d≠5”，可能是：“c=3，d=7”或“c=7，d=3”。试算 ab6×7 和 ab6×3 的积十位分别是奇数和偶数，便可断定：“c=7，d=3”。

```
                 c   d   e
a   b   6 ) 偶  偶  奇  奇  偶
            f   g   h
            --------------------
                奇  j   k
                m   n   p
            --------------------
                    偶  奇  偶
                    r   s   偶
            --------------------
                            0
```

已知 c 为 7，b 只能为 1 或 3，试算可判定“b=1”。

因为 s 是奇数，则 6×e 进位的数是奇数，可推知 e 可能是 2 或 6，若“e=6”，n 已确定为 4，则“j－n”需借位，便不符合算式 3，从而断定：“e=2”。知道了除数和商，整个算式便可推出。

```
            7 3 2
1 1 6 ) 8 4 9 1 2
        8 1 2
        ----------
          3 7 1
          3 4 8
        ----------
            2 3 2
            2 3 2
        ----------
                0
```

横式谜

例 1 想想×算算=嘻嘻哈哈

解：这个算式的特点是：相乘的两个两位数，每个数的数字分别相同，积的前两位和后两位数字也分别相同。两个两位数相乘所得的积又是四位数。根据这个特点，“想”和“算”必须＞3，否则，积只能是三位数，也即“想×算”积应进位。由此，可作如下尝试：

44×33=1452　　55×33=1815

66×33=2178　　77×33=2541

88×33=2904　　99×33=3267

上述乘数是 33 的，积都不合要求。

55×44=2420　　66×44=2904

77×44=3388　　88×44=3872

99×44=4356

其中：77×44=3388 符合题目条件。

例 2　abcd×9=dcba

解：abcd 是四位数，与 9 相乘仍得四位数，表明被乘数首数 a×9 没有进位，a 只能是 1，由积的尾数 a 进 1，推知“d=9”，再结合进位情况和积的数序，推知“b=8”，“c=0”，从而得解：

1089×9=9801

例 3 下式中，不同的字母代表 1～9 中的不同数字，要使两道式同时成立，各字母应是什么数字？

A×B=CD，E+F=DC

解：观察算式，可见积与和是逆序数，因此，可先从结果寻求突破口。

由于各个字母代表的数字不同，试取的积应该是它的逆序数同时是另外两个不同数字的乘积，如：12=3×4，21=3×7，而若选 48 则肯定不行，因为 48=6×8，式子本身便重复了“8”。

经验证，可作如下填法：

$$\begin{cases}3\times 7=21\\ 8+4=12\end{cases}$$

例 4“好、好、学、习”各代表一个什么数字，才能使下面三个等式同时成立？

$$\begin{cases}①好+好+学+习=18\\ ②好+好-学+习=4\\ ③好+好+学-习=8\end{cases}$$

解：这种相互联系的题目，同一个文字在不同的题目中，代表的数字却是相同的。因此，不能孤立地只解一个，不顾其他。

由于题目中含有相同的文字，可以把式与式相加减，使问题简化。

把①式与②式相加，得：

“4 好+2 习=22”

化简

“2 好+习=11”

把②式与③式相加，得：

“4 好=12”，“好=3”

从“2 好+习=11，好=3”可知：“习=5”。

从“好+好+学+习=18”，已知“好=3，习=5”，可知：“学=7”。

例 5“如、花、岁、月”各代表一个什么数字，能使下面三个等式成立？

①如+花×岁+月=18

②如×花-岁+月=18

③如×岁+花-月=18

解：这种文字谜可以用“消量法”解。

将①式与③式相加，可消去“月”字：

（如+花×岁+月）+（如×岁+花-月）=18+18

如+花+花×岁+如×岁=36

如+花+岁×（花+如）=36

（如+花）×（岁+1）=36

即：（如+花）×（岁+1）的积是 36

36 可分解为：

36＝1×36＝2×18＝3×12＝4×9＝6×6

可知：（如+花）和（岁+1）必为上述五个乘式中的一个。

（岁+1）的值不可能少于 2，也不可能大于 10。（如+花）的值不可能小于 3，也不可能大于 17。所以，（如+花）与（岁+ 1）的值只有四种可能：

①“岁+1=3 如+花=12”

②“岁+1=4 如+花=9”

③“岁+1=9 如+花=4”

④“岁+1=6 如+花=6”

经验证，只有②成立。可知：

“岁=3，月=1，如=5，花=4”

符号谜

例 1 在□内填入“＋”、“－”号，使等式成立

1□23□4□56□7□8□9=100

解：解这类题目仍要先观察等号右端的数，根据这个结果的大小，确定算式中数间的符号。本题的结果是 100，比式中任何一个数都大得多，便可肯定在式中的 23、56 之前必须用“＋”号，而后再用“＋”或“－”，试算其他各数，直到符合最后结果是 100 为止。

这题的正确填法是：

1+23-4+56+7+8+9=100

例 2 下式左端是一位数的四则运算，请填入+、-、×、÷、（）等符号，使等式成立。

① 9 8 7 6 5 4 3 2 1=100

解：算式的结果是 100，如果全用“＋”，9～1 九个数的和是 45（简算用中间项 5 乘以项数 9）。显然，需用乘号。倘在较小的数间填“×”，与 100 仍相差很多，因此需在较大的数间填“×”。经试算，8×9=72，余下七个数的和是 4×7=28，相加恰是 100。即：

9×8+7+6+5+4+3+2+1=100

② 9 9 9 9 9=17

解：结果是 17，等号左端的数是五个 9。9+8=17。因此，必须把其中的四个 9，通过添加运算符号，使其得数为 8，才能保证最后结果为 17。通过试算：

（9×9-9）÷9＝8

这样，整个算式可组合为：

（9×9－9）÷59＋9＝17

例 3 改动下式中的一个运算符号，使下式成立。

1＋2＋3＋4＋5＋……＋19＋20＝200

解：这是个连续数相加的算式，确定改动哪一个符号，必须先知道已知的和 200 与实际和的差数。

1～20 各数的实际和是：

总和＝（首项＋尾项）×（项数÷2）

（1＋20）×（20÷2）＝210

210 比已知的和多 10，即 210—200＝10

因此，只要在算式中，将“＋10”改为“－10”即可以了。

例 4 在下式合适的位置添上（）、〔〕和（），使等式成立。

1＋2×3＋4×5＋6×7＋8×9＝9081

解：本题的最后结果是 9081，数目较大，求解有一定难度，但仍可用“层层剥笋”的方法，缩小推导范围。

将 9081 分解得：

9081＝1009×9

因此，{} 位置可定，即：

{ } ×9＝9081

1009－8＝1001。而 1001＝7×ll×13＝77×13。据此，可将 8 前的算式用添括号的方法，使它成为结果为 77 和 13 相乘的两个算式。经试算，

（1＋2）×3＋4＝13（5＋6）×7＝77

从而，可以确定各种括号的位置。即：

｛〔（1＋2）×3＋4〕×（5＋6）×7＋8｝×9＝9081

例 5 用六个 9 组成等于 100 的算式。

解：本题没有规定六个 9 的组合形式，因此，每一个数可以是 9，也可以是 99，或 999……。各数间的运算符号也没有特殊要求，＋、－、×、÷、（）、〔〕、｛｝完全可根据自己需要选用，只要把六个 9 组合成算式使结果为 100，便符合题目的要求了！因此，有时可以有许多种解法。

如，本题可组合为：

解 1：99＋99÷99＝100

解 2：（999－99）÷9＝100

解 3：9×9＋9＋9＋9÷9＝100

解 4：99÷9×9＋9÷9＝100

例 6 在下列算式中加上运算符号，使每一道算式都不相同，但结果却都等于 5。

① 5○5○5○5○5＝5

② 5○5○5○5○5＝5

③ 5○5○5○5○5＝5

④ 5○5○5○5○5＝5

⑤ 5○5○5○5○5＝5

解：解这类问题没有固定规律，只有不断地反复尝试，才能找到答案。下面是参考答案。

① 5＋5＋5－5－5＝5

② 5÷5－5÷5＋5＝5

③ 5÷5×5＋5－5＝5

④ 5×5÷5×5÷5＝5

⑤ 5×5－5×5＋5＝5

例 7 用五个 3 组成十一道算式，在数字间加上不同的运算符号，使它们的结果依次等于 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10。

① 3○3○3○3○3＝0

② 3○3○3○3○3＝1

③ 3○3○3○3○3＝2

④ 3○3○3○3○3＝3

⑤ 3○3○3○3○3＝4

⑥ 3○3○3○3○3＝5

⑦ 3○3○3○3○3＝6

⑧ 3○3○3○3○3＝7

⑨ 3○3○3○3○3＝8

⑩ 3○3○3○3○3＝9

(11) 3○3○3○3○3＝10

解：填符号的方法不是唯一的。下面是参考答案。

① 3×3－3－3－3＝0

② 3－3÷3－3÷3＝1

③ 3×3÷3－3÷3＝2

④ 3×3÷3＋3－3＝3

⑤ 3×3÷3＋3÷3＝4
⑥ 3＋3＋3÷3＋3＝5
⑦ 3×3－3＋3－3＝6
⑧ 3×3－3＋3÷3＝7
⑨ 3＋3＋3－3＋3＝8
⑩ 3×3÷3＋3＋3＝9
(11) 3＋3＋3＋3÷3＝10

例 8 下面各式，等号两端的数字是一样的，请在等号右端的○中，填上与等号左端不同的运算符号，使等式成立。

① 1×2×3＝1○2○3
② 4×2－1＝4○2○1
③ 8÷4＋1＝8○4○1
④ 3×2＋2×1＝3○2○2○1
⑤ 4×2＋3×1＝4○2○3○1

解：答案是：

① 1×2×3＝1＋2＋3
② 4×2－1＝4＋2＋1
③ 8÷4＋1＝8－4－1
④ 3×2＋2×1＝3＋2×2＋1
⑤ 4×2＋3×1＝4＋2×3＋1

例 9 下面的七道算式结果都等于 1，数字间应加上哪些符号，算式才能成立？

① 1○2○3＝1
② 1○2○3○4＝1
③ 1○2○3○4○5＝1
④ 1○2○3○4○5○6＝1
⑤ 1○2○3○4○5○6○7＝1
⑥ 1○2○3○4○5○6○7○8＝1
⑦ 1○2○3○4○5○6○7○8○9＝1

解：下面是参考答案：

① （1＋2）÷3＝1
② 1×2＋3－4＝1
③ 〔（1＋2）÷3＋4〕÷5＝1
④ 1×2×3－4＋5－6＝1
⑤ 1×2＋3＋4＋5－6－7＝1
⑥ （1×2×3－4＋5－6＋7）÷8＝1
⑦ 〔（1＋2）÷3＋4〕÷5＋6－（7＋8－9）＝1

例 10 下面的三道算式，运算结果都错了，能否不改动数字，只加入适当的括号使等式仍成立？

① 78＋84÷3＋21＝75
② 573－273＋149＝151
③ 500÷250×8－1500＝1

解：解这类问题，首先应算出式子的结果，再对两个不同的结果作比较如（1）78＋84÷3＋21＝78＋28＋21＝127，大于 75，则考虑使算式得数变

小，从而确定括号所加的位置。这三题可以是：

①（78＋84）÷3＋21＝75

② 573－（273＋149）＝151

③ 500÷（250×8－1500）＝1

例 11　在下列各式左端添上＋、－、 ×、÷、（）等，数字也可以根据需要任意组合成两位数或三位数等，使等式能够成立。

① 9 9 9 9 9＝17

② 9 9 9 9 9＝18

③ 9 9 9 9 9＝19

④ 9 9 9 9 9＝20

⑤ 9 9 9 9 9＝21

⑥ 9 9 9 9 9＝22

解：下述答案可供参考：

① （9×9－9）÷9＋9＝17

② （9－9）×9＋9＋9＝18

③ 9＋（99－9）÷9＝19

④ （9＋9）÷9＋9＋9＝20

⑤ （99＋9）÷9＋9＝21

⑥ （99＋99）÷9＝22

例 12 下列各式是一位数四则运算，请填入运算符号及顺序符号，使等式成立。

① 9○8○7○6○5○4○3○2○1＝1

② 9○8○7○6○5○4○3○2○1＝10

③ 9○8○7○6○5○4○3○2○1＝100

④ 9○8○7○6○5○4○3○2○1＝1000

⑤ 9○8○7○6○5○4○3○2○1＝1993

⑥ 9○8○7○6○5○4○3○2○1＝1994

解：参考答案：

① 9－8＋7－6＋5－4－3＋2－1＝1

② 9×8－7×6－5×4＋3－2－1＝10

③ 9×8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1＝100

④ （9×8×7－6－5＋4＋3）×2×1＝1000

⑤ （9＋8）×（7＋6）×（5＋4）＋3＋2－1＝1993

⑥ 9＋8×（7＋6×5×4－3）×2＋1＝1994

例 13 在下列各式的适宜位置添加（）、〔〕和 {} ，使等式成立。

① 1＋2×3＋4×5＋6×7＋8×9＝1005

② 1＋2×3＋4×5＋6×7＋8×9＝9081

③ 1＋2×3＋4×5＋6×7＋8×9＝1717

解：可如下添加括号：

①（1＋2）×〔3＋4×（5＋6）×7〕＋8×9＝1005

② {〔（1＋2）×3＋4〕×（5＋6）×7＋8} ×9＝9081

③ 1＋2×3＋〔（4×5＋6）×7＋8〕×9＝1717

例 14 A、B、C 各代表一个整数，根据下面三个相联系的式子，它们各是什么数？

A＋A＝A

B－B＝A

B×A＝A

A÷B＝A

解：从前两道关系式，可断定“A＝0”，因为只有 0＋0＝0，同数相减得 0。

从后两道关系式，可断定 B 为任意数都可以，因为任何数乘 0 等于 0，0 除以任何数得 0。由于 0 不能作除数，而 A÷B＝A，必须具备“B≠0”，等式才成立。

例 15 下面的四道算式所得结果的和恰是 100，A 是什么数，算式才能成立？

A＋A＝□

A－A＝□

A×A＝□

A÷A＝□

□＋□＋□＋□＝100

解：四道算式中，有两道可以直接得出结果。即：A－A＝0，A÷A＝1，因为同数相减差是 0，同数相除商是 1。这样，另两式的结果之和必为 99。

经尝试运算，在 1～9 九个数字中，只有 A＝9 算式才能成立。即：

9＋9＝18

9－9＝0

9×9＝81

9÷9＝1

例 16 下题中“□、○、△”各代表一个数，根据已知的条件，你能知道它们是什么数吗？

① □＋□＋□＝120

② ○×△＝45

③ □÷○＝8

④ △＝？

解：从①式，可知：

“□＝120÷3＝40”

将③式换成：40÷○＝8，可知：

“○＝40÷8＝5”

将②式换成：5×△＝45，可知：

“△＝45÷5＝9”

例 17 下列三式是互相有联系的，每个图形代表一个整数，其中□、△、○各代表什么数？

① □＋△＋○＋○＝13

② □＋△＋△＋○＝14

③ □＋△＋△＋○＝17

解：经观察，每道式中都有两个相同的图形。若能求出三个各不相同图形的和，而后与四个图形的和作比较，便可求得一个图形所代表的数了。

将三式相加可得：

4□＋4○＋4△＝13＋14＋17＝44

将等式两端各除以 4，得：

④□＋○＋△＝11

将④式与①对照，用①－④得：

○＝2

将②－④，得：

△＝3

将③－④，得：

□＝6

把数字代入算式，验证无误。

例 18 下式中“○”和“△”各代表一个什么数字，两个相关联的等式才能成立？

① ○＋○＋○＋△＋△＝41

② △＋△＋△＋○＋○＝39

解：认真观察后发现：①式是三个“○”加二个“△”和为 41，②式是三个△加二个“○”和为 39，①式的和比②式多 2。为什么会多 2 呢？因为①式与②式的区别只将“○”换成了“△”，可知“○－△＝2”。①式中含二个“△”若都换成“○”，必须增加“2＋2＝4”，这样和就是 41＋4＝45。

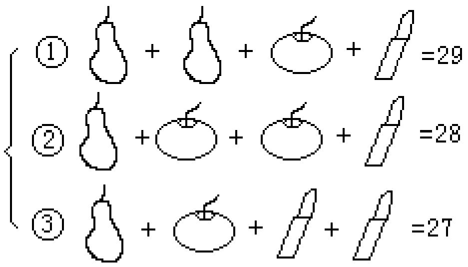
由此可知：

“○＝（41＋4）÷5＝9”

“△＝9－2＝7”

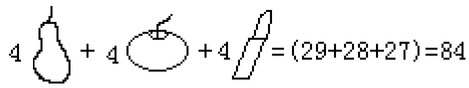
想一想，还可以怎么解？

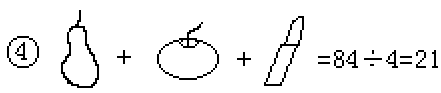
例 19 下式中梨、苹果、小刀各代表什么数，等式才能同时成立？

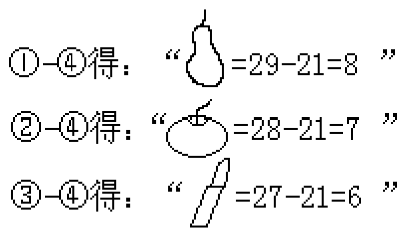


解：这是个物品符号谜。实际与文字符号是相似的。

将三个算式相加得：







例 20 下面三式中“□、☆、△”各代表什么数字，等式能同时成立？

①□＋△＝15

②△－□＝1

③☆－□＝2

解：这是个图形符号谜。

①＋②得：2△＝15＋1＝16

“△＝8”

由“△＝8”，代入②式得：“□＝7”

由“□＝7”，代入③式得：“☆＝9”

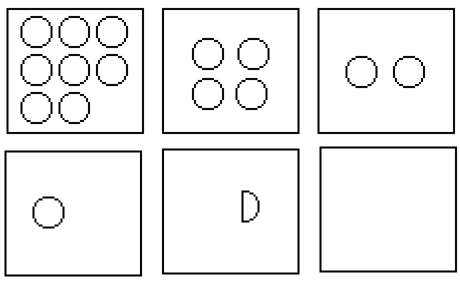
例 21 下面的式题中，“□”各代表一个数字，它们各应是什么数，纵横等式才能成立？

$$\begin{array}{ccccccc}
\square & + & \square & + & \square & = & 9 \\
+ & & + & & + & & \\
\square & + & \square & + & \square & = & 8 \\
+ & & + & & + & & \\
\square & + & \square & + & \square & = & 5 \\
\| & & \| & & \| & & \\
8 & & 8 & & 6 & &
\end{array}$$

解：这样的问题难度较大，因为填数时不仅要考虑横式成立，还要考虑所填的数使纵式也能成立。可以先从和中较小的数进行尝试，如 5 只能是 1、1、3 或 2、2、1 两种组合的可能，参照纵式的和，把不合适的舍去，逐步调整，便可找到答案。

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{5} & + & \boxed{2} & + & \boxed{2} & = & \boxed{9} \\
+ & & + & & + & & \\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & + & \boxed{2} & = & \boxed{8} \\
+ & & + & & + & & \\
\boxed{2} & + & \boxed{1} & + & \boxed{2} & = & \boxed{5} \\
\| & & \| & & \| & & \\
\boxed{8} & & \boxed{8} & & \boxed{6} & &
\end{array}$$

例 22 观察图形变化规律，把最后的图补上：



解：题中画的虽是图形，实则却是数学问题。认真观察后发现，相邻的两个图的图形个数，后边的总是前边的$\frac{1}{2}$。它的排列顺序是：8、4、2、1、$\frac{1}{2}$、？

我们知道：$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{2}$是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

因此，最后应填一个圆形的$\frac{1}{4}$，即

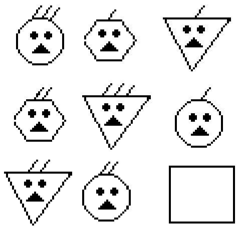
例 23 观察图形变化规律，把最后的图补上。

解：题中共有三种图形：圆、六边形、三角形。

①从每一横行都应有三种图形，可以推出方框内应填正六边形。

②圆上的斜线是三条→一条→两条，三角形上的斜线是二条→三条→一条，由此推知，六边形上的斜线是一条→二条→三条。

从而，方框中图形可知应填“”。



妙题巧解

在学习生活中，每天都少不了计算。计算就是与阿拉伯字码打交道。1、2、3……，+、−、×、÷……有人感到厌烦，有人觉得有趣。

觉得有趣的是因为“十个数字颠来倒，千变万化藏奥妙。”有些计算看起来繁难，无从下手，然而一旦发现隐藏的技巧，却又是十分简单便捷。正如“山穷水复疑无路”时，突然“柳暗花明又一村”，眼前的景况，令人一阵惊喜。

嫌数学枯燥的人，总仿佛走在不见阳光的胡同里，一个个数字都是灰蒙蒙，死气沉沉的。觉得数学有意思的却如同漫步在春光烂漫的百花园，竟然发现了新奇的花草。

这就是“机遇”。这种机遇，只会拜访那些肯钻研，爱动脑子的人，思想懒惰的人是永远也碰不到的。

其实，1、2、3、4……十个数字，表面上看是枯燥乏味，无生命的，但当你喜欢它了，一个个都变得活蹦乱跳，有生命了。它们组合起来，更是奇妙无穷。

德国历史上有位数学家叫做商克斯，他花了 20 年的光阴，把π的值推算到 707 位，创造了“手算”π的最高记录。要是数字真的枯燥乏味，他能忍受那么长时间的煎熬吗？

数字有趣，计算更有趣。单纯的数字计算有趣，由数字组合的各类绚丽多彩的应用问题，就更加趣味无穷。

这里只从茫茫数海中舀取一勺，你将在实际运算中，深刻地体会到：计算确是很有意思的。

1．“1”字聚会

37＋37＋37＝111

瞧，37 连加三次，和便是 111。全是 1。

你知道，连加后所得的和形成“1”字大聚会，还有哪些数？

将 8547、15873、12345679 分别连加，看看它们的和各是多少？

解：8547＋8547＋……＋8547＝111111，需要连加 13 个，便出现六个“1”聚会。

15873＋15873＋……＋15873＝111111，连加 7 个，便有六个“1”聚会。

12345679＋12345679＋……＋12345679＝111111111，连加九个，便有九次“1”出现在面前。

2．“8”字不来

自然数的序列是1、2、3、4、5、6、7、8、9……它们像列队报到一样，整齐排列。站在后面的数都比它前面的数多1。

会算下面的算式吗？

111111111÷9＝？

千万别粗心，如果商里出现了“8”，那一定错了！因为“8”字藏起来了。

再算算下面的式子：

① $222222222\div\left(4\frac{1}{2}\times2\right)\times\frac{1}{2}=$？

② $333333333\times\frac{1}{3}\div(4.5\times2)=$？

③ $444444444\div(4.5\times2)\times\frac{1}{4}=$？

④ $555555555\div9\div5=$？

⑤ $666666666\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\div9=$？

⑥ $777777777\div\left(4\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{7}=$？

⑦ $888888888\div(10\div1.25)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=$？

⑧ $999999999\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\div9=$？

解：111111111÷9＝12345679

下面各式，都是这个算式变化的。因此，它们的结果都是12345679。只是“8”字不见了。

你觉得有趣么？

3.想要就来

1、2、3、4、5、6、7、8、9……每一个数字都能引起人的丰富想象。有人说：“1 字像粉笔，2 字像小鸭，3 字像耳朵，4 字像小旗，5 字像秤钩，6 字像豆芽，7 字像镰刀，8 字像花生，9 字像老爷爷的大烟袋。”

真有意思！

12345679，这几个数字中，只不见了“8”。而“8”字多么像香喷喷的花生，你想见到它吗？

可以！只要用 8 的 9 倍数去乘 12345679，便可出现一长串 8：

$$\begin{array}{r}
12345679 \\
\times \qquad\quad 72 \\
\hline
24691358 \\
86419753 \\
\hline
888888888
\end{array}$$

哇，全是 8！

其实，只要你用一个合适的数去乘 12345679，任何一个你喜欢的数字‘想要就来”。

你知道这些乘数吗？

解：因为 12345679×9＝111111111

所以，想要几，就用 9 的几倍作乘便可以了。如，想要 5，便用 45（＝9×5）作乘数即可。

4.成群结队

看看下面的算式，又一种奇妙的现象出现了！

12345679×12＝148148148

12345679×15＝185185185

12345679×21＝259259259

12345679×24＝296296296

12345679×27＝333333333

12345679×30＝370370370

12345679×33＝407407407

12345679×36＝444444444

12345679×39＝481481481

……

瞧，结果总是三个数字重复出现，真像结伴而行的几个好朋友。它们总是互相联手，不肯分离。

你知道，要想得到这样的结果，有什么规律？

解：被乘数 12345679 没有变化，乘数分别是 12、15、18、21、24……。后一个乘数依次比前一个乘数都多 3，得出的结果才能是三个数字循环出现，纷至沓来。

首到 12345679×78=962962962 仍然符合“成群结队”规律，可是，令人奇怪的是：当乘数超过“78”时，这种奇妙的现象便销声匿迹，不再出现了。

5.只问 8 数

观察下列各式：

1×9=9

11×99=1089

111×999=110889

1111×9999=11108889

……

请问：这样的被乘数和乘数各是十位数，积中应含有多少个 8？

解：观察已知的算式：一位数相乘时，积没有 8。两位数相乘时，积含有一个 8。三位数相乘时，积含有两个 8。四位数相乘时，积含有三个 8……这表明积含有 8 的个数总比因数的位数少 1。所以，因数若是十位数，积含有 8 的个数是 10-1=9 个。

6.高峰数字

我们知道 2×5=10。

现在把 2 和 5 的位数同时增多，看它们的积将出现怎样的现象：

22×55=1210

222×555=123210

2222×5555=12343210

22222×55555=1234543210

……

现在问你：如果九个 2 与九个 5 相乘，它们的积中“高峰”数字（即最大的数字）是多少？

解：从已知的算式中，可以看到由 2 和 5 组成的两个因数，它们的积是有规律地出现的，积的数字由小而大，到达一定的高峰时，又由大而小，逐渐地降落下来。恰似一个坡度对称的小山一般。也像登山，从一侧上去，又从另一侧下来。

再看积中的高峰数字：因数是两位数时，高峰数是 2，因数是三位数时，高峰数是 3，因数是四位数时，高峰数便是 4……。

明白了，因数是几位数，积中的最大数字便是几。因此，我们不仅可以知道九个 2 与九个 5 相乘时积中的最大数字,还可以直接写出积的全部数字。即：

$$\underbrace{222\cdots\cdots2}_{\text{九个}2}\times\underbrace{555\cdots\cdots5}_{\text{九个}5}=123456789876543210$$

九个 2 九个 5

奇怪的是，当 2 和 5 的位数超过九位时，这种现象便不存在了！

7.数字塔群

看看下面这些有趣的计算吧！

1×9+2=11
12×9+3=111
123×9+4=1111
1234×9+5=11111
12345×9+6=111111
123456×9+7=1111111
1234567×9+8=11111111
12345678×9+9=111111111
81+9=90
882+9=891
8883+9=8892
88884+9=88893
888885+9=888894
……
81-9=72
882-9=873
8883-9=8874
88884-9=88875
……
81÷9=9
882÷9=98
8883÷9=987
88884÷9=9876
888885÷9=98765

你能找到这些数字的变化规律吗？

请你再算算下面各个数字塔的结果，说说它们有什么规律？

A.

6×9=
616×9=
61716×9=
6172716×9=

B.

7×9=
707×9=
70707×9=
7070707×9=

C.

$11^2=121$
$1l1^2=12321$
$1111^2=$____
$11111^2=$____

……

D.

$1^2=1$

$(1+1)^2=1+2+1$

$(1+1+1)^2=1+2+3+2+1$

$(1+1+1+1)^2=$____

$(1+1+1+1+1)^2=$____

$(1+1+1+1+1+1)^2=$____

解：这些数字塔，它们的数字都呈现一定的规律性，只要解出前面的几道，后面的就可以依据规律，直接地写出结果了。

A 题的数字出现规律是：54、5544、555444。

B 题的数字出现规律是：63、6363、636363、63636363。

C 题的数字出现规律是：121、12321、1234321、123454321。

D 题的数字出现规律是：1+2+1、1+2+3+2+1、

1+2+3+4+3+2+1、1+2+3+4+5+4+3+2+1。

8.难中见易

有这样一道题：

221221221221÷136136136136=？

唉！除数多到十二位数。多位数除法中从没见到过。太难了！

其实，数学中有好多题目，看起来令人望而却步。对类似的问题，先要冷静分析，看看有没有独特的规律。这样做之后，说不定就可以难中见易了。

解：这道题的被除数和除数，数字都是三个数字重复出现组成的。因此，可以把它们变化后再解。

221221221221÷136136136136

=（221000000000+221000000+221000+221）

÷（136000000000+136000000+136000+136）

=221×（1000000000+1000000+1000+1）÷136

×（1000000000+1000000+1000+1）

=（221×1001001001）÷（136×1001001001）

=221÷136

=（13×17）÷（8×17）

=13÷8

=1.625

想不到竟是这么容易！

9.异中求同

计算： 5436×5438-5435×5439=？

解：式中几个数的特点是：四位数的前三位数字相同，只有个位数字不同，就从个位数上想想办法，使它转化为方便运算的数字。

减号前可变为：

5436×5438=（5435+1）×5438

减号后可变为：

5435×5439=5435×（5438+1）

这样将算式展开便找到了捷径。

5436×5438-5435×5439

=（5435+1）×5438-5435×（5438+1）

=5435×5438+5438-5435×5438-5435

=5438-5435

=3

复杂的计算竟变得如此简单！

10.许多个 9

计算：999×999+1999=？

解：999 可以变化为 1000-1，

1999 可变化为：1000+999，这样：

999×999+1999

=999×（1000-1）+（1000+999）

=999000-999+1000+999

=1000000

11.加 1 凑整

计算：19999+1999+199+19=？

解：把每一加数都先增加 1，使它们变成整千、整百……，再根据“多加要减去”的原则处理，就得：

19999+1999+199+19

=（19999+1）+（1999+1）+（199+1）

+（19+1）-4

=20000+2000+200+20-4

=22220-4

=22216

12.分子是连续数（一）

计算： $\frac{1}{1997}+\frac{2}{1997}+\frac{3}{1997}+\cdots\cdots+\frac{1997}{1997}=$ **？**

解：分子是连续的自然数，可用求连续数和公式：

$$\frac{1}{1997}+\frac{2}{1997}+\frac{3}{1997}+\Lambda+\frac{1997}{1997}$$

$$=\frac{(1+1997)\times1997\div2}{1997}$$

$$=(1+1997)\div2$$

$$=999$$

13.分子是连续数（二）

计算：$\frac{1}{31}+\frac{2}{31}+\frac{3}{31}+\cdots\cdots+\frac{30}{31}=$ ？

解：这类题目要是把分子逐个相加，就太麻烦了。简算的方法有两种：

①分子 30 是偶数，用求偶数个连续数和的方法解：

$$\frac{1}{31}+\frac{2}{31}+\frac{3}{31}+\cdots\cdots+\frac{30}{31}=\frac{(1+30)\times(30\div2)}{31}=\frac{31\times15}{31}=15$$

②题中的最高分数若两两结对，也即首尾一对、第二个数与倒数第二个数一对……它们的和都是 1，因为分子是 30，共可结成 30÷2=15 对。也即：

$$\frac{1}{31}+\frac{2}{31}+\frac{3}{31}+\Lambda+\frac{30}{31}=1\times(30\div2)=15$$

14.分母是 10、100……

计算： $1-\frac{9}{10}-\frac{9}{100}-\frac{9}{1000}-\frac{9}{10000}=?$

解：把分数先化成小数，再求出所有减数的和，比先通分再计算简便得多。

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{9}{10}-\frac{9}{100}-\frac{9}{1000}-\frac{9}{10000}\\
&=1-(0.9+0.09+0.009+0.0009)\\
&=1-0.9999\\
&=0.0001
\end{aligned}
$$

15.何年出生

董尧问张华是哪年出生的，张华拿起笔在纸上写了一道算式：

1988+1989-1990+1991-1992+……-2000=？

“算式的得数就是我出生的年份。”张华笑着说。

董尧很快就算出来了。

你知道董尧是怎么计算的吗？

解：这类题是连续数加减混合，如果逐个加减便太麻烦了。

董尧运用简便方法很快就算了出来。他把式中凡是加数写一行，凡是减数另写一行，而后凑整，加减抵销。只运算余下不能抵消的数。即：

加数：

1988 1989 1991 1993 1995 1997 1999

减数：

1990 1992 1994 1996 1998 2000

张华的出生年份是：

（1988+1989+1995）-（1990+2000）

=（6000-12-11-5）-3990

=5972-3990

=1982

(1988+1989+1995)-(1990+2000)

=1988-1-5

=1982

16.异中见同

计算：

$$\frac{1\times 3\times 24+2\times 6\times 48+3\times 9\times 72}{1\times 2\times 4+2\times 4\times 8+3\times 6\times 12}=?$$

这道题分子、分母的数字多得使人眼花缭乱，但是不要被它吓住。在复杂的题目中，往往隐藏着简单的因素，看似不同的式子里也常常有相同的内容，一旦找到了，问题便容易解决了！

解：仔细观察算式后，便可发现：分子的每一个加数都可以分解出“1×3×24”，分母的每一个加数都可以分解出“1×2×4”，将它们分别作为分子、分母的公因数提出来以后，余下的项是相等的，把它当作一个数进行约分，题目就变得非常简单了！

$$\frac{1\times 3\times 24+2\times 6\times 48+3\times 9\times 72}{1\times 2\times 4+2\times 4\times 8+3\times 6\times 12}$$

$$=\frac{1\times 3\times 24\times (1+8+27)}{1\times 2\times 4\times (1+8+27)}$$

$$=9$$

17.数字巧合

计算：$41\times\frac{3939}{4141}=$ **？**

解：变化分子、分母，使之成为：

$$41\times\frac{3939}{4141}$$
$$=41\times\frac{39\times(100+1)}{41\times(100+1)}$$
$$=39$$

18.不必通分

我们知道：

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times 3}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times 4}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}=\frac{1}{4\times 5}$$

……

即：分子是 1、分母是相邻的自然数的两个分数相减，它们的差仍是 1，而分母是两个分母的积。

根据这个道理，计算：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}=?$$

你能不必通分，用简便的方法求出它们的和吗？

解：这道题看起来，也很复杂，因为假如用通分后再计算，公分母很大，太麻烦了！何不将它变化一个形式呢？

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}$$

$$=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{7\times 8}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)$$

$$=1-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{7}{8}$$

看似复杂难解的问题，一旦掌握了它的特征，竟然是这么简单易解，一目了然！

19.日取其半

公元前 300 年左右，中国有位杰出的学者庄子，在他的文章《天下篇》中写道：

一尺之棰，日取其半，万世不竭。

意思是，一尺长的木棍，每天截掉一半，千年万载也截不完！

根据这句话，列成算式，可以求出截了若干天后，还剩余多少？

$$1-\frac{1}{2}=?$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=?$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=?$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdots\cdots-\frac{1}{64}=?$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdots\cdots-\frac{1}{256}=?$$

通过计算，你从中发现什么规律？

解：从计算中得知：

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$

嘿，差总是和最后一个减数相等！

这些式子的特点，都是被减数是 1，没有变化。减数都是分子是 1，分母后一个都是前一个的 2 倍。

下面各式的差，便可想而知了：

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdots\cdots-\frac{1}{64}=\frac{1}{64}$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\cdots\cdots-\frac{1}{256}=\frac{1}{256}$$

假如倒回头来，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$你能否预计到最后的和一定是几？

20.比较大小

把下面四个分数，按由小到大的顺序排列起来，你能做到吗？

$$\frac{1997}{1998}\quad\frac{1994}{1995}\quad\frac{1995}{1996}\quad\frac{1996}{1997}$$

四个数都是分数，而且分母各不相同。按照常规，异分母比较大小应该先通分，可是分母都是四位数，它们的最小公倍数更会大得惊人！这样通分是比较麻烦的。

有没有简便的方法呢？

解：这四个分数的共同特点都是分子比分母小 1，而且：

$$\frac{1997}{1998}\text{比}1\text{小}\frac{1}{1998}，\frac{1994}{1995}\text{比}1\text{小}\frac{1}{1995}$$

$$\frac{1995}{1996}\text{比}1\text{小}\frac{1}{1996}，\frac{1996}{1997}\text{比}1\text{小}\frac{1}{1997}$$

这样，我们先来比较：$\frac{1}{1998}$ · $\frac{1}{1995}$ · $\frac{1}{1996}$ · $\frac{1}{1997}$，因为它们的分子都是 1，分子相同的分数，分母小的大。

可知：$\frac{1}{1995}>\frac{1}{1996}>\frac{1}{1997}>\frac{1}{1998}$

差大则原数小。

所以四个分数可以排列为：

$$\frac{1994}{1995}<\frac{1995}{1996}<\frac{1996}{1997}<\frac{1997}{1998}$$

瞧，竟是这么容易！

21.先算后比

按下列各式值的大小，将 A、B、C、D、E 填入括号内

$$A=1-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}$$

$$B=1\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{1000}\times\frac{1}{10000}$$

$$C=1+\frac{1}{10}-\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}-\frac{1}{10000}$$

$$D=1\div\frac{1}{10}\div\frac{1}{100}\div\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}$$

$$E=1\times10\times100\times1000\times10000\times0$$

（　）＞（　）＞（　）＞（　）＞（　）

解：应求出各式的值，再比较大小。但计算时应十分细心，否则容易出错。

其中，分数加减法化成小数计算比较简便。E 的因数中有一个 0，一眼看出其值仍是 0。

其他各题分别是：

A=1-0.1+0.01-0.001+0.0001

=0.9091

B=1×0.1×0.01×0.001×0.0001

=0.0000000001

C=1+0.1-0.01+0.001-0.0001

=1.0909

D=1×10×100×1000+0.0001

=1000000.0001

E=0

∴ D＞C＞A＞B＞E

22.巧妙转化

计算：

1×2÷3×4÷5×……×1996÷1997×1998×1997÷1996×……×5÷4×3÷2×1=？

解：这种问题，初看纷繁复杂，求解很难。

整个算式是连续自然数乘除相间，从 1 开始至 1998 之后，再由高而低降至 1，项目多到近四千个。按常规运算显然不妥。

如果将“除以一个数”转化为“乘以这个数的倒数”，便一眼看出通过约分，原来十分简单！

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 1\times 2\times\frac{1}{3}\times 4\times\frac{1}{5}\times\Lambda\times 1996\times\frac{1}{1997}\times 1998\times 1997\times\frac{1}{1996}\\
&\quad\times\Lambda\times 5\times\frac{1}{4}\times 3\times\frac{1}{2}\times 1\\
&= 1998
\end{aligned}
$$

23.预知乘积

先观察下列各式：

$$7\times9=63$$
$$77\times99=7623$$
$$777\times999=776223$$
$$7777\times9999=77762223$$

现在问你：$\underbrace{777\cdots\cdots7}_{8个7}\times\underbrace{999\cdots\cdots9}_{8个9}=$ ？

你能否不经计算，直接写出积来？

解：分析上述被乘数、乘数和积，它们的共同特点是：

①积的末位数总是 3，而且只有一个 3。积的组成数字只有 7、6、2、3。不论积是多大，6 也只有一个，而且紧挨在 7 的后面。

②积中含 7 的个数与含 2 的个数同样多。

③积中含 7 的个数总比被乘数少 1。

由此可知：八个 7 与八个 9 相乘，积中应含有七个 7，一个 6，七个 2，一个 3，写出来便是：

$\underbrace{777\cdots\cdots7}_{8个7}\times\underbrace{999\cdots\cdots9}_{8个9}=777777762222222 3$

将这个规律推广开来：

$\underbrace{777\cdots\cdots7}_{m个7}\times\underbrace{999\cdots\cdots9}_{m个9}$应为

$\underbrace{777\cdots\cdots7}_{(m-1)个7}6\underbrace{222\cdots\cdots2}_{(m-1)个2}3$

24.预知平方数

先观察下列各式：

$$3^2=9$$

$$33^2=1089$$

$$333^2=110889$$

$$3333^2=11108889$$

现在问你：能不能直接写出下式的平方数？

$$(\underbrace{333\cdots\cdots3}_{\text{共九个}3})^2= ?$$

解：3 的平方数中，组成的数字只有 1、0、8、9。0 和 9 都只有一个，1 和 8 的个数随着平方数的增加而增加，增加的个数总比 3 组成的数位数少 1，而且 0 总是处于 1 和 8 的中间，9 总是在平方数的末尾。

因而，由九个 3 组成的数的平方数，应含有（9-1）个 1 和（9-1）个 8。0 在 1 与 8 中间，9 在末尾。即：

$$(\underbrace{333\cdots\cdots3}_{\text{九个}3})^2=11111111088888889$$

若由 n 个 3 组成的数，它的平方数就是：

$$(\underbrace{333\cdots\cdots3}_{n\text{个}3})^2=\underbrace{111\cdots\cdots1}_{(n-1)\text{个}1}0\underbrace{888\cdots\cdots8}_{(n-1)\text{个}8}9$$

n 个 3　(n-1）个 1　(n-1）个 8

25.判断末位

有两道乘法算式，它们是：

78925×63825　　74576×82376

你能说出它们积的末两位数是多少吗？

也许你会说：“将它们的积求出来就知道了。”可是这不算本事，能否不计算就知道呢？

解：不必计算，因为任何两个数的积的末两位数，仅与这两个数的末两位有关，而他们的末两位数积是：

25×25=625，所以 38925×63825 积的末两位数也是“25”。

76×76=5776，所以 74576×82376 积的末两位数是 76。

正巧都是它们本身。

26.积中奇数

仔细观察下列算式：

1×9=9……积中有一个奇数

11×99=1089……积中有二个奇数

111×999=110889……积中有三个奇数

1111×9999=11108889……积中有四个奇数

你能不用计算就判断：111111111×999999999 的积中有多少个奇数吗？

解：分析上述的算式特点是：

①被乘数和乘数位数相同。分别是 1 与 9 位数逐渐增多。

②积的数字总是 1、0、8、9 几个数字组成。其中奇数个数与被乘数位数相等。

由此可断定：111111111×999999999 被乘数共有九位数，它们的积也应该有 9 个奇数。

计算也很容易：

111111111×999999999

=111111111×（1000000000-1）

=111111111000000000-111111111

=111111110888888889

27.选择代表

计算：19995+19996+19997+19998+20014=？

解：因为五个加数都接近 20000，就以 20000“作代表”，先把它们都当作 20000 计算，而后根据“多加要减去”、“少加要补上”的原则，求得结果。

19995+19996+19997+19998+20014

=20000×5-（5+4+3+2-14）

=100000

28.积中含 0

你能知道下式的积中，一共含有多少个 0 吗？

$$\underbrace{999\cdots\cdots9}_{88个}\times\underbrace{999\cdots\cdots9}_{88个}$$

这么巨大的数相乘，求出积来再数 0，难啦！

但是不必求积，能不能推测出来呢？

解：这类问题，必须先寻找规律。我们可以试算一部分，看看从中能不能有所发现。

$$9\times9=81$$

$$99\times99=9801$$

$$999\times999=998001$$

$$9999\times9999=99980001$$

先观察一下吧：

一位数相乘，积中无 0。

两位数相乘，积中含一个 0。

三位数相乘，积中含二个 0。

四位数相乘，积中含三个 0。

当然，还可以试试五位数、六位数相乘积中含 0 的个数。

结果发现：积中含 0 的个数总比因数的位数少 1，也即：

$\underbrace{999\cdots\cdots9}_{m个}\times\underbrace{999\cdots\cdots9}_{m个}\Rightarrow$ **积含有（m—1）个0**

由此可知，前式积中含 0 的个数是（88—1）=87 个

29.积的个位

8×8×8×8……×8，总共四十个 8 相乘，你能判断积的个位数字是几吗？

解：解答这类问题可不能死拼硬算，必须寻找乘积个位数字的变化规律。

可以先计算一部分再观察：

8

8×8=6 4

8×8×8=51 2

8×8×8×8=409 6

8×8×8×8×8=3276 8

8×8×8×8×8×8=26214 4

8×8×8×8×8×8×8=209715 2

8×8×8×8×8×8×8×8=167721 6

到这里发现积的个位数重复出现了，它的周期是每四个数便循环出现 8－4－2－6。

四十个 8 相乘，共有 40÷4=10 个周期，个位必是 6。若不是整周期，便依余数向后数。

30．0 的个数

不进行实际计算，你能说出

$$1\times2\times3\times4\cdots\cdots\times98\times99\times100$$

算式的积中，末尾有多少个连续的 0？

解：认真的分析一下算式的特点，便可知道：

①式中含有整十相乘的是：10、20、30、40、50、60、70、80、90、100，这些数相乘积的末尾都带 0，合计 11 个 0。

②5 和 5 的倍数与偶数相乘，末尾也都带 0，这些数是：5、15、35、45、55、65、85、95，共有 8 个 0。

③25 和 75 乘以 4 的倍数末尾都至少有两个 0，这样便有 4 个 0。

所以上式积的末尾有（11+8+4）共 23 个 0。

31.哪个积大

下面的两道算式，能不能不必计算就断定它们的积谁大？谁小？

①1234×4321=？

②1233×4322=？

解：两道乘式都含有 1233×4321。如果把这个乘式从两道题中去掉，那么第 1 题还剩下 1 个 4321，第二题里还剩下 1 个 1233，4321＞1233，所以第 1 题的积比较大。

用乘法分配律也能比较出来：

1234×4321=（1233+1）×4321

=1233×4321+4321（1）

1233×4322=1233×（4321+1）

=1233×4321+1233（2）

将最后算式相减：（1）式-（2）式=3088。

可知（1）式的积比（2）式的积多 3088。

32.速算诀窍

一次，爱因斯坦卧病在床，寂寞难耐。恰有一位朋友前来探望，便要求朋友出道算术题让他想想。朋友随口说：2976×2924=？

岂料爱因斯坦迅即回答：8701824。

朋友十分惊讶。爱因斯坦有速算诀窍吗？

解：爱因斯坦确有速算诀窍。

朋友说的两个数正符合“首同尾补”的特点。在两位数相乘时，遇到这种特殊情况，可按如下速算口诀处理：

首加 1 与首乘，再乘 100 要记心。

再加两个数尾积，所求之数便分明。

如：

43×47

=（4+1）×4×100+3×7

=2021

朋友出的题目是四位数相乘，也可以类此办理，即，把前两位当作“数首”，后两位当作“数尾”：

2976×2924

=（29+1）×29×10000+76×24

=8700000+76×24

其中：

76×24

=（50+26）×（50-26）

=50^2-26^2

=1824

所以：

8700000+1824=8701824

33.有错没错

四个小朋友做同一道题，但结果各不相同：

①4500÷（15×125）=4500÷1875

=2……750

②4500÷（15×125）=4500÷15÷125

=300÷125=2……50

③4500÷（15×125）=4500÷125÷15

=36÷15=2……6

④4500÷（15×125）=4500÷15÷（25×5）

=300÷25÷5=2……2

后三位同学运用了乘除混合运算的性质：a÷（b×c）=a÷b÷c，检查运算过程没有失误，然而尽管商相同，余数却各有千秋，这是为什么？究竟有错没错？

解：应该说，计算的结果都是正确的。

各题的余数不同，并不表明运算结果不同，因为余数与除数有关。

根据“商不变性质”：“在除法里，被除数和除数都扩大或者都缩小相同的倍数（0 除外），商不变”，若在有余数的除法里，当被除数和除数都扩大或缩小相同倍数时，尽管不完全商不变，余数却也相应地扩大或缩小了相同的倍数。

其实，余数是针对除数而言的，各题的除数不一样，因而余数各异。若以分数来表示它们的结果，则四道题的商都是相等的：

①除数是1875，商是$\frac{2750}{1875}=\frac{22}{5}$

②除数是125，商是$\frac{250}{125}=\frac{22}{5}$

③除数是15，商是$\frac{26}{15}=\frac{22}{5}$

④除数是5，商是$\frac{22}{5}$

因而，各题的结果仍是一致的，只是形式不同罢了。

34.欲加先减

人们习惯于看到“＋”号，就用加法算，看到“－”号，就用减法算。但是遇到适宜的题目用反向思维，即欲加先减，欲减先加，却更简便快捷。

下列各题你能直接写出结果吗？

A.45+79　546+274　874+697　5222+3778

B.63-37　416-287　769-307　8564-5476

解：如果加数或减数中有一个接近整百、整千……，可以用先减去或先加上这个数，再加上整百、整千……。

A.45+79=45-21+100=124

546+274=546-26+300=820

874+697=874-3+700=1571

5222+3778=5222-222+4000=9000

B.63-37=63-40+3=26

416-287=416-300+13=129

769-307=769-300-7=462

8564-5476=8564-5500+24=3088

35.连续数的和

下列各式中，加数有什么特点？你能很快地算出结果吗？

①1+2+3+4+……+199=？

②1+3+5+7+……+37=？

③2+4+6+8+……+28=？

④211+212+213+……+248=？

解：这些算式中，加数的特点是：

第一，各式中的加数都是连续数。

第二，有的算式只是奇数连续数，如②；有的算式只是偶数连续数，如③；有的是从头开始的连续数，如①；有的不是从头开始的连续数，如④。

我们知道：

连续数的和=（首项+尾项）×（项数÷2）

奇数项连续数和=中间项×项数。

其中①是求奇数项连续数的和，共有 199 项，怎样求它的中间项呢？

中间项=（尾项+1）÷2

因此，这题的和是：

　1+2+3+4+……+199

=（1+199）÷2×199

=19900

其中②只有奇数连续数相加，总项数减少了一半。所以它的总和也减少一半。尾项是奇数，算式的实有项数是：（尾项+1）÷2。

②1+3+5+……+37

=[（1+37）×（37+1）÷2]÷2

=[38×38÷2]÷2

=722÷2

=361

③2+4+6+8+……+28

=[（2+28）×28÷2]÷2

=[30×28÷2]÷2

=420÷2

=210

其中④，可当作从 1 开始的连续数相加，得出结果后，再去掉首项前的连续数的和。

④211+212+213+……+248

=（1+248）×（248÷2）-（1+210）×（210÷2）

=249×124-211×105

=30876-22155

=8721

这样的题，也可以先求项数。

项数=[尾项-（首项-1）]÷2

211+212+213+……+248

=（211+248）×[248-（211-1）]÷2

=459×38÷2

=8721

36.逆序数和

一个数的各位数字的倒序所组成的数，叫做这个数的逆序数。

先观察下式：

①13+31=（1+3）×11=44

②26+62=88=（2+6）×11

③57+75=132=（5+7）×11

④82+28=110=（8+2）×11

再看加数是三位数：

⑤234+432=666=（2+4）×111

⑥357+753=1110=（3+7）×111

⑦741+147=888=（7+1）×111

⑧369+963=1332=（3+9）×111

想想看，逆序数求和有什么规律？

解：从①～④可知：任何一个个位数不为 0 的两位数与它的逆序数的和，是这个数数字和的 11 倍。

从⑤～⑧组成算式的各数看，它们都不是任意数字，而是相邻数字间差是相等的。具备这种特点的数，与它的逆序数的和，等于它百位数字与个位数字和的 111 倍。

自己编几道题做做看，说不定你还能有新的发现呢！

37.同分子

观察下列各式，它们怎样算才简便？

$$\frac{5}{9}+\frac{5}{11} \qquad \frac{7}{8}+\frac{7}{15}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{8} \qquad \frac{3}{4}+\frac{3}{8}$$

解：这些算式都是两个加数，每道算式都是同分子异分母。按常规算法要先通分再相加，往往很繁。简便的方法是：用两个分母的积作分母，用两个分母的和与分子的积作分子即可。

$$\frac{5}{9}+\frac{5}{11}=\frac{(9+11)\times 5}{9\times 11}=\frac{100}{99}=1\frac{1}{99}$$

$$\frac{7}{8}+\frac{7}{15}=\frac{(8+15)\times 7}{8\times 15}=\frac{161}{120}=1\frac{41}{120}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{5+8}{5\times 8}=\frac{13}{40}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{(4+8)\times 3}{4\times 8}=\frac{36}{32}=1\frac{1}{8}$$

38.真分数和

下面各式是求以某数作分母的全部真分数的和，有没有比较简便的方法？

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\Lambda+\frac{6}{7}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\Lambda+\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{3}{20}+\Lambda+\frac{19}{20}$$

解：这种求全部真分数的和，从分母上看，有的是奇数，有的是偶数。以任意一个奇数作分母的所有真分数的和都等于“（分母-1）÷2”。如：

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=(3-1)\div 2=1$$

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\Lambda+\frac{4}{5}=(5-1)\div 2=2$$

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\Lambda+\frac{6}{7}=(7-1)\div 2=3$$

以任意一个偶数作分母的全部真分数的和，都是“分母÷$2-\frac{1}{2}$”。

如：

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\Lambda+\frac{7}{8}$$

$$=8\div 2-\frac{1}{2}$$

$$=4-\frac{1}{2}$$

$$=3\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{3}{20}+\Lambda+\frac{19}{20}$$

$$=20\div 2-\frac{1}{2}$$

$$=10-\frac{1}{2}$$

$$=9\frac{1}{2}$$

39.分子是 1

下列各式，分子都是 1，分母是相邻的自然数。请先算算：

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{5}\quad \frac{1}{5}-\frac{1}{6}\quad \frac{1}{9}-\frac{1}{10}$$

再计算：

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$

你发现了什么？

解：分子是 1，分母是相邻的两个自然数，它们的差，分子仍是 1，分母是两自然数的积。

即：

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5\times6}=\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=\frac{1}{9\times10}=\frac{1}{90}$$

通过上述各题的计算，我们发现用这种方法可以使某些运算简化。

如：

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$

$$=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}$$

$$=\frac{7-2}{2\times7}$$

$$=\frac{5}{14}$$

40.100 多几

两个因数，如果都比 100 多几，通过运算，可以推导出简便运算方法。如：

115×102

=（100+15）×（100+2）

=（100+15）×100+（100+15）×2

=100×100+15×100+100×2+15×2

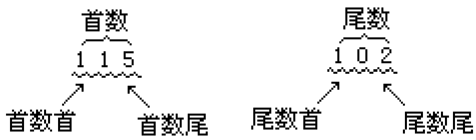
=（100+15+2）×100+15×2

=（115+2）×100+15×2

=11730

根据推导你能找到简便运算的方法吗？

为了便于总结法则，可以给两个因数规定名称：



而后，请计算：112×104 107×103 114×105 106×107

解：根据 115×102=（115+2）×100+15×2，可知：积的百位以前数是“首数加上尾数尾”，积的十位、个位上的数是两个因数的尾数积。即：

首数加上尾数尾，紧挨再写两尾积。

所以：

112×104=（112+4）×100+12×4=11648

107×103=（107+3）×100+7×3=11021

114×105=（114+5）×100+14×5=11970

106×107=（106+7）×100+6×7=11342

41.100 少几

求比 100 少几的两个数相乘的简便方法是：
首数减去尾数补，紧挨再写补数积。
便如：

$$97 \times 92$$
$$= (\underbrace{97}_{\text{(首数)}} - \underbrace{8}_{\text{(92的补数)}}) \times 100 + \underbrace{3}_{\text{(97的补数)}} \times \underbrace{8}_{\text{(92的补数)}}$$
$$= 8900 + 24$$
$$= 8924$$

请你运用这个简便方法计算下列各题：
98×94 89×98 96×92 996×998 990×996
解：98×94=（98-6）×100+2×6=9212
89×98=（89-2）×100+11×2=8722
96×92=（96-8）×100+4×8=8832
996×998=（996-2）×1000+4×2=994008
990×996=（990-4）×1000+10×4=986040

42.一多一少

两数相乘，其中一个因数大于 100，另一个因数小于 100，但与 100 都比较接近。这样的两个数相乘，有没有简便方法呢？

举个例子，通过运算，推导一下再看吧：

104×98

=（100+4）×（100-2）

=（100+4）×100-（100＋4）×2

=100×100+4×100-100×2-4×2

=（100+4-2）×100-4×2

=（104-2）×100-4×2

=10200-8

=10192

观察：

$$104\times98=(\underbrace{104}_{\text{(首数)}}-\underbrace{2}_{\text{(尾数的补数)}})\times100-\underbrace{4}_{\text{(首数尾)}}\times\underbrace{2}_{\text{(尾数补数)}}$$

即：首数减去尾数补，紧挨再写首数的尾数与尾数的补数积。

据此，请快速求出下式各题的结果：

112×89 116×94 107×93

994×1008 1002×998

解：112×89=（112-11）×100-12×11

=10100-132

=9968

116×94=（116-6）×100-16×6

=11000-96

=10904

107×93=（107-7）×100-7×7

=10000-49

=9951

994×1008=1008×994

=（1008-6）×1000-8×6

=1002000-48

=1001952

1002×998=（1002-2）×1000-2×2

=1000000-4

=999996

43.50 多几

两个因数都比 50 多几，有三种情况。计算它们的积，也有简便方法。

两个因数都是奇数或都是偶数：

用这两个数与 50 的差的乘积，作积的右段数。积若是一位数，要在数前补个 0；用较大的一个因数加上较小的一个因数与 50 的差的一半，作积的左段数，而后两段相接，即得。

如：54×52=28 08

积的右段数：（54-50）×（52-50）

=4×2

=8　补 0 为：08

积的左段数：（54+2）÷2

=56÷2

=28

两段相接，得积：2808

两个因数一奇一偶，算法稍有不同：

如：57×52=2964

积的右段：（57-50）×（52-50）

=7×2

=14

14+50=64

积的左段：（57+2）÷2

=59÷2

$=29.5 \Rightarrow 29$（只取整数）

两段相接，得积：2964

按照上面介绍的方法，下列各题，你能迅速写出结果吗？

56×52　54×55　58×54　56×53　59×59

解：56×52=（56+2）÷2×100+（56-50）×（52-50）

=2912

54×55=2970　58×54=3132

56×53=2968　59×59=3481

44.500 多几

两个因数都比 500 多几，它们的类型和算法与因数是 50 多几的很相似。

如：521×511=266231

积的右段：（521-500）×（511-500）

=21×11

=231

积的左段：（521+11）÷2

=532÷2

=266

两段相接：266231

如果因数是一奇一偶两个数，如：

512×507=259584

积的右段：（512-500）×（507-500）

=12×7

=84 用 0 补足为三位=084，

再加 500：500+084=584

积的左段：（512+7）÷2

=519÷2

$=259.5\Rightarrow 259$（只取整数）

两段相接：259584

按照上述方法，直接写出下式结果：

515×517　512×510　514×513

518×516　514×511　503×504

解：515×517=（515+17）÷2×1000

+（515-500）×（517-500）

=266255

512×510=261120　514×513=263682

518×516=267288　514×511=262654

503×504=253512

45.500 少几

两个因数都比 500 稍小，快算方法略有变化。

例如：496×492=244032

积的右段：（500-496）×（500-492）

=4×8

=32

不足三位在数前补 0，即：032。式中的 500 作被减数了！

积的左段：$(\underbrace{496}_{\text{较大的因数}}-\underbrace{8}_{\text{较大的补数}})\div 2$

$=488\div 2=244$

或 $(\underbrace{492}_{\text{较小的因数}}-\underbrace{4}_{\text{较小的补数}})\div 2$

$=488\div 2=244$

两段相接得积：244032

如果是一奇一偶两个因数，例如：

493×496=244528

积的右段：（500-493）×（500-496）

=4×7

=28……需再加 500，即：

28+500=528

积的左段：（493-4）÷2

=489÷2

$=244.5\Rightarrow 244$**（只取整数）**

或（496-7）÷2

$=244.5\Rightarrow 244$

两段相接得积：244528

按照上面的方法，你能直接写出下式结果吗？

496×498　　497×495　　493×498　　497×499

解：　496×498=（496-2）÷2×1000+（500-496）×（500-498）

=247008

497×495=246015　　493×498=245514

497×499=248003

46.与 667 乘

先观察下列各式：

667×3=2001

667×6=4002=2001×2

667×9= 6003=2001× 3

667 × 12= 8004= 2001× 4

……

你能不用计算，直接写出下式结果吗？

667× 24　667 × 36　 667 × 4

667×7　667×81　667×132

解：根据 667×3= 2001 这个乘式，只要因数　667 不变，则乘数 3 扩大几倍，它们的积也扩大相同的倍数。因此，只要看乘数是 3 的多少倍，直接将 2001 也扩大相同的倍数，便是乘积了。

乘数不是 3 的倍数，可以把它转化为 3 的倍数加上零头数。

667× 24=2001× 8=16008

667 × 36=2001× 12=24012

667 × 4= 667×（3+1）= 2001＋ 667=2668

667 × 7＝667×（6＋1）＝4002＋667＝4669

667 × 81= 2001× 27= 54027

667×132=2001×44=88044

47.欲乘先除（一）

遇到因数是 5、25、125、375、625……根据积的变化规律，先除再乘较为简便。

如：乘数是 5：

38× 5＝38 ×（10÷2）＝38÷2×10＝190

48 ×5＝48÷2×10＝240

乘数是 25：

77×25=77÷4×100=1925

乘数是 125：

56×125=56÷8×1000=7000

乘数是 625：

4.8×625＝4.8÷16×10000＝3000

按照这种方法，请你直接写出下式结果：

76× 5　84×5　442×5　37.6× 5

36×25　8.4×25　16×26　72×125

40.88×125

解：76×5=380（76÷2×100）

84×5=420（84÷2×10）

442×5=2210（442÷2×10）

37.6×5=188（37.6÷2×10）

36×25=900（36÷4×100）

8.4×25=210（8.4÷4×100）

16×26=416[16×（25+1）=16×25＋16]

72×125＝9000（72÷8×1000）

40.88×125=5110（40.88÷8×1000）

48.欲乘先除（二）

例：56× 75=56÷4 × 3× 100

$$= 56 \times \frac{3}{4} \times 100$$

=4200

$$152 \times 375 = 152 \times \frac{3}{8} \times 1000 = 57000$$

$$48 \times 875 = 48 \times \frac{7}{8} \times 1000 = 42000$$

想一想，算式的根据是什么？

下面各题，你能一眼看出结果吗？

24×75　36×75　6.4×75　4.8×7.5

64×375　40×375　0.88×3750　2.48×375

16×875　4.8×875

解：24× 75=1800（24÷4×3×100）

36×75＝2700（36÷4×3×100）

6.4×75＝480（6.4÷4×3×100）

4.8×7.5＝36（4.8×7.5＝48×75÷100）

64 ×375＝24000（64÷8×3×1000）

40 × 375＝15000（40÷8×3×1000）

0.88×3750=3300（0.88×3750=8.8×375）

2.48×375＝930（2.48×375＝248×375÷100）

16×875=14000（16÷8×7×1000）

4.8×875=4200（4.8×875=48×875÷10）

49.欲除先乘（一）

遇到有些除法，根据商不变性质，先乘后除倒显得简便、快捷。

如：除数为 5：

230÷5＝230$\underline{×2}$÷10＝46

除数为 25：

23400÷25＝23400$\underline{×4}$ ÷100＝936

除数为 125：

1270÷125＝1270$\underline{×8}$÷1000＝10.16

除数为 625：

50÷625＝50$\underline{×16}$÷10000＝0.08

按照这样的方法，快速计算：

130÷5　2.6÷5　42÷0.05　2100÷25

12÷25　8÷0.25　30000÷625　500÷625

1100÷625

解：130÷5=130×2÷10=26

2.6÷5＝0.26×2＝0.52

42÷0.05＝420÷0.5＝420×2＝840

2100÷25＝2100×4÷100=84

12÷25＝12×4÷100＝0.48

8÷0.25＝8×4＝32

30000÷625＝30000×16÷10000＝48

500÷625=500×16÷10000=0.8

1100÷625=1100×16÷10000=1.76

50.欲除先乘（二）

例： 18÷75=18×4÷3÷100=0.24

120÷375=120×8÷3÷1000=0.32

想一想，这样算的根据是什么？

按照这样方法计算：

21÷75　30÷75　345÷75　1200÷75

240÷375　360÷375　48÷0.375　5400÷3750

解：21÷75=21×4÷3÷100=0.28

30÷75＝30÷3×4÷100=0.4

345÷75=345÷3×4÷100=4.6

1200÷75=1200÷3×4÷100=16

240÷375=240÷3×8÷1000=0.64

360÷375=360÷3×8÷1000=0.96

48÷0.375=48÷3×8＝128

5400÷3750=540÷375=540÷3×8÷1000=1.44

51.除数是 9

1÷9＝0.111……＝$0.\dot{1}$

2÷9＝0.222……＝$0.\dot{2}$＝$0.\dot{1}$×2

3÷9＝0.333……＝$0.\dot{3}$＝$0.\dot{1}$×3

4÷9 = 0. 444…… = 0. $\dot{4}$ = $0.\dot{1}$×4

……

8÷9 = 0. 888…… = 0. $\dot{8}$ = $0.\dot{1}$×8

根据上面的规律，你能很快地求得下列各题的商来吗？

13÷9 35÷9 16÷36

88÷72 640÷720 17÷0.9

解：13÷9 = （9 +4）÷9 = $1.\dot{4}$

35÷9＝（27＋8）÷9＝$3.\dot{8}$

16÷36 = （16÷4）÷（36÷4） = 4÷9 = $0.\dot{4}$

88÷72 = （88÷8）÷（72÷8） = 11÷9 = $1.\dot{2}$

640÷720＝64÷72＝8÷9＝$0.\dot{8}$

17÷0.9 = 170÷9 = （17÷9）×10 = 1.88……×10 = $18.\dot{8}$

52.除数是 99

$1\div99=0.010101\cdots\cdots=0.\dot{0}\dot{1}$

$2\div99=0.020202\cdots\cdots=0.\dot{0}\dot{2}=0.\dot{0}\dot{1}\times2$

$3\div99=0.030303\cdots\cdots=0.\dot{0}\dot{3}=0.\dot{0}\dot{1}\times3$

$4\div99=0.040404\cdots\cdots=0.\dot{0}\dot{4}=0.\dot{0}\dot{1}\times4$

……

$9\div99=0.090909\cdots\cdots=0.\dot{0}\dot{9}=0.\dot{0}\dot{1}\times9$

根据上面的规律，你能很快求出下列各题的商吗？

17÷99 92÷99 123÷99 80÷99

500÷99 6÷9.9 6.3÷99 5.24÷0.99

解： $17\div99=0.\dot{0}\dot{1}\times17=0.\dot{1}\dot{7}$

$92\div99=0.\dot{0}\dot{1}\times92=0.\dot{9}\dot{2}$

$123\div99=(99+24)\div99=1.\dot{2}\dot{4}$

$80\div99=0.\dot{0}\dot{1}\times80=0.\dot{8}\dot{0}$

$500\div99=(5\div99)\times100=0.\dot{0}\dot{5}\times100=5.\dot{0}\dot{5}$

$6\div9.9=60\div99=(6\div99)\times10=0.\dot{0}\dot{6}\times10=0.\dot{6}\dot{0}$

$6.3\div99=(63\div99)\div10=0.0\dot{6}\dot{3}$

$5.24\div0.99=524\div99=(495+29)\div99=5+0.\dot{2}\dot{9}=5.\dot{2}\dot{9}$

53.除数是 11

$1÷11＝0.090909……＝0.\dot{0}\dot{9}$

$2÷11＝0.181818……＝0.\dot{1}\dot{8}＝0.\dot{0}\dot{9}×2$

$3÷11＝0.272727……＝0.\dot{2}\dot{7}=0.\dot{0}\dot{9}×3$

$4÷11＝0.363636……＝0.\dot{3}\dot{6}＝0.\dot{0}\dot{9}×4$

……

$9÷11＝0.818181……＝0.\dot{8}\dot{1}＝0.\dot{0}\dot{9}×9$

$10÷11＝0.909090……＝0.\dot{9}＝0.\dot{0}\dot{9}×10$

根据上面的规律，你能很快求出下列各题的商来吗？

30÷11　18÷11　57÷11

67÷22　81÷55　2.4÷11

91÷77　2001÷11　100÷88

解： $30÷11=(3÷11)×10=2.\dot{7}\dot{2}$

$18÷11=(11+7)÷11=1.\dot{6}\dot{3}$

$57÷11＝(55+2)÷11＝5.\dot{1}\dot{8}$

$67÷22＝67÷11÷2＝6.\dot{0}\dot{9}÷2＝3.0\dot{4}\dot{5}$

$81÷55＝81÷(11×5)＝(81÷11)÷5=7.\dot{3}\dot{6}÷5=1.4\dot{7}\dot{2}$

$2.4÷11=(24÷11)÷10=2.\dot{1}\dot{8}÷10=0.2\dot{1}\dot{8}$

$91÷77＝13÷11＝1.\dot{1}\dot{8}$

$2001÷11＝(2000+1)÷11＝181.\dot{8}\dot{1}+0.\dot{0}\dot{9}=181.\dot{9}\dot{0}$

$100÷88=100÷11÷8=9.\dot{0}\dot{9}÷8=1.1\dot{3}\dot{6}$

54.除数是 111

$1 \div 111 = 0.009009009\cdots\cdots = 0.\dot{0}0\dot{9}$

$2 \div 111 = 0.018018018\cdots\cdots = 0.\dot{0}1\dot{8} = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 2$

$3 \div 111 = 0.027027027\cdots\cdots = 0.\dot{0}2\dot{7} = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 3$

$4 \div 111 = 0.036036036\cdots\cdots = 0.\dot{0}3\dot{6} = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 4$

$9 \div 111 = 0.081081081\cdots\cdots = 0.\dot{0}8\dot{1} = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 9$

$10 \div 111 = 0.090090090\cdots\cdots = 0.\dot{0}9\dot{0} = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 10$

$11 \div 111 = 0.099099099\cdots\cdots = 0.\dot{0}9\dot{9} = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 11$

根据上面的规律，你能很快算出下列各题的商吗？

17÷111　25÷111　37÷111

72÷111　138÷111

解： $17 \div 111 = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 17 = 0.\dot{1}5\dot{3}$

$25 \div 111 = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 25 = 0.\dot{2}2\dot{5}$

$37 \div 111 = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 37 = 0.\dot{3}$

$72 \div 111 = 0.\dot{0}0\dot{9} \times 72 = 0.\dot{6}4\dot{8}$

$138 \div 111 = (111 + 27) \div 111 = 1.\dot{2}4\dot{3}$

55.求平方数（一）

在面积计算中，经常需要求平方数。有些数的平方数，可用简便方法直接求出。

40～50 间各数的平方数，可以用 25 减去这个数的补数，作积的左段，用这个补数的平方（不足两位的要在数前补 0），作积的右段数，两段相接，就是这个数的平方数。

如： 482=2304

积的左段：25-2=23

↑

（48 中 8 的补数）

积的右段：2^2=4→04 数前加 0 补足两位

两段相接得：2304

50～60 间各数的平方数，求法略有不同。

如：57^2=3249

积的左段数：25＋7=32

↑

（57 的个位）

积的右段数：7^2=49

↑

（57 的个位）

两段相接得：3249

比较 40～50 间和 50～60 间各数平方数求法有哪些不同，并计算下列各题：

44^2　45^2　47^2　49^2

52^2　53^2　56^2　58^2

解：44^2=1936　　45^2=2025　　47^2=2209

↑　↑

(25-6) 6^2

49^2=2401　52^2 = 2704　53^2 = 2809

↑　↑

(25+2) 2^2

56^2=3136　58^2=3364

56.求平方数（二）

求 90～100 间各数的平方数，有个最简便的方法，可以脱口报出结果。

如：　$97^2 = 9409$

　　积的左段：　$97-3 = 94$

　　（97 的补数）

　　积的右段：　$3^2=9 \rightarrow 09$

　　（位数不足两位，用 0 在数前补足）

两段连接得出结果：9409

你能用这个方法，直接写出下式结果吗？

91^2　93^2　95^2　96^2　98^2　99^2

解：　$91^2=8281$　　$93^2=8649$　$95^2=9025$

**　　　$96^2=9216$　$98^2=9604$　$99^2=9801$**

57.找规律（一）

先观察下列各式：

11×99=1089　22×99= 2178

33×99= 3267　44× 99= 4356

55×99=5445　66×99= 6534

你能从各式中得到启示，直接写出 77×99、88×99、99×99 三式的积来吗？

解：观察六道算式，可发现它们的共同规律是：

①积都是四位数

②积的千位数字与被乘数的数字相同

③积的百位数比千位数字小 1

④积的末两位数恰是被乘数与 100 间的补数。根据这个规律，我们便写出三式的积了：

77×99=7623

88×99＝8712

99× 99=9801

58.找规律（二）

先观察下列算式：

①75× 99=7425

75× 999=74925

75×9999=749925

②47×99=4653

47× 999=46953

47× 9999=469953

③28×99=2772

28×999=27972

28×9999=279972

你能否从上列各式得到启示，直接写出下列各式的积：

38×99　29×999　68×9999　81×99999

解：从上式发现，它们的共同规律是：

①一个两位数与 99 相乘，积的前两位数比被乘数少 1，积的后两位数是被乘数的补数。

②乘数比 99 位数增加几个 9，则在原积中间增写几个 9。

所以上列各式的积可直接写出：

38×99=3762

29×99 9＝28971

68 × 9999＝679932

81× 99999＝8099919

59.用眼算

下面的两道题，数字相同，只是排列的顺序相反。请你先用眼估算一下，哪一道得数大？然后再动笔核对，检验一下你的眼力是否正确？

```
  1 2 3 4 5 6 7 8 9                    1
  1 2 3 4 5 6 7 8                    2 1
  1 2 3 4 5 6 7                    3 2 1
  1 2 3 4 5 6                    4 3 2 1
  1 2 3 4 5                    5 4 3 2 1
  1 2 3 4                    6 5 4 3 2 1
  1 2 3                    7 6 5 4 3 2 1
  1 2                    8 7 6 5 4 3 2 1
 +1                    +9 8 7 6 5 4 3 2 1
----------------      --------------------
```

解：两道题的和是相同的，它们的和都是：1083676269

60.绝妙算式（一）

数字 1、2、3……9，可以排列出变化无穷的各种算式，有的算式既稀奇古怪，又十分有趣。在这些算式中，枯燥的数字变得鲜活亮丽、富有灵性，一个个如同魔棒，那么可爱，那么迷人，下面的一组算式，便可谓奇绝！妙绝！

1	1
23	32
456	654
7891	1987
23456	65432
789123	321987
4567891	1987654
23456789	98765432
123456789	987654321
987654321	123456789
87654321	12345678
6543219	9123456
321987	789123
87654	45678
3219	9123
654	456
87	78
+ 9	+ 9
1234567890	(　　　　　)

瞧，这些数字把它按一定的顺序排列成一道加法算式（见左式），出人意外的是：它们的和竟然仍是这些数字，仍按照原来的顺序井然有序地排列起来了！

要是将数字变换一下排列方式，和又会怎样呢？如右式。

61.绝妙算式（二）

假如在 1、2、3……9 中舍弃一部分数字，再排列算式，那将又会出现什么现象呢？

我们舍弃所有偶数，只用 1、3、5、7、9 来排（见左式）：

1	1
3 5	5 3
7 9 1	1 9 7
3 5 7 9	9 7 5 3
1 3 5 7 9	9 7 5 3 1
1 3 5 7 9 1	1 9 7 5 3 1
3 5 7 9 1 3 5	5 3 1 9 7 5 3
7 9 1 3 5 7 9 1	1 9 7 5 3 1 9 7
3 5 7 9 1 3 5 7 9	9 7 5 3 1 9 7 5 3
7 5 3 1 9 7 5 3 1	1 3 5 7 9 1 3 5 7
3 1 9 7 5 3 1 9	9 1 3 5 7 9 1 3
7 5 3 1 9 7 5	5 7 9 1 3 5 7
9 7 5 3 1 9	9 1 3 5 7 9
9 7 5 3 1	1 3 5 7 9
7 5 3 1	1 3 5 7
3 1 9	9 1 3
7 5	5 7
+ 9	+ 9
(　　　)	(　　　)

要是将数字再变换一下排列方式，和又会怎样呢？（见右式）

62.绝妙算式（三）

现在，我们将所有的奇数都舍弃，只用偶数即 2、4、6、8 来排算式：

```
                  2
                4 6
              8 2 4
            6 8 2 4
          6 8 2 4 6
        8 2 4 6 8 2
      4 6 8 2 4 6 8
    2 4 6 8 2 4 6 8
  2 4 6 8 2 4 6 8 2
  8 6 4 2 8 6 4 2 8
    8 6 4 2 8 6 4 2
      6 4 2 8 6 4 2
        2 8 6 4 2 8
          4 2 8 6 4
            4 2 8 6
              2 8 6
                6 4
+                 8
-------------------
 (                )
```

你再模仿前面的例题，将 2、4、6、8 变个顺序重新再排一个算式，再算算它们的和是多少？你再参照上面的例题，自己选定几个数排出算式，看看会不会出现一种奇妙的现象？

解：上述各道算式，它们的和都是 1234567890！

如果你想排出更为壮观的算式，可以把数字排得更长些，比如用 1～9 九个数字依序排到最高位是十七位数时，它们的和竟是：

11223344556677889O

你甚至可以只选三个数，如 1、4、7 或 2、4、6（舍弃了 2、3、5、6 或 1、3、5、7、9），再在式中稍作些变化，和的数字又从高位向低位顺序排列了，真是其妙无穷！

63.怪题之谜

美国的贝克顿市，有个古怪的石匠，叫托马斯。他生活的时代约在 200 年前。后来，人们发现他在一所房子的墙壁上刻了一道古怪的数学题：世上竟有这样的题，从数字和为 45 的一个数里，减去另一个数字和也是 45 的数，只有当差的数字和也是 45 时，这道题才算解对了。

这道题使当地的居民伤透了脑筋，许多数学爱好者也苦思不解。后来，有人发现 1～9 九个自然数的和恰是 45，便恍然大悟，终于解开了这个谜团。

你能知道这是一个什么样的减法式子么？

解：人们经过多次反复地研究尝试，发现九个依次排列由大到小的阿拉伯数字，减去它的逆序数，恰好符合题目要求。

即：

$$\begin{array}{r} 9\;8\;7\;6\;5\;4\;3\;2\;1 \\ +1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8\;9 \\ \hline 8\;6\;4\;1\;9\;7\;5\;3\;2 \end{array}$$

人们又发现，若再加上 0，下式也符合要求，即：

$$\begin{array}{r} 9\;8\;7\;6\;5\;4\;3\;2\;1\;0 \\ -1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8\;9\;0 \\ \hline 8\;6\;4\;1\;9\;7\;5\;3\;2\;0 \end{array}$$

后来又发现，减数中的 0 放在不同的数位所构成的算式也都符合要求。

如：9876543210-1023456789=8853086421

9876543210-1203456789=8673086421

……

移动被减数中的 0，构成的算式，仍然符合要求。

如：9087654321-1023456789=8064197532

9876504321-1203456789=8673047532

……

不仅如此，把 0～9 十个数字顺序打乱，分别组成被减数、减数，一些式子也符合要求。

如：4579036218-2814675039=1764361179

1954328760-1796435208=157893552

……

当然，其中有一些仅被减数、减数的数字和是 45，而得出的差数字和却不是 45，这样的题，就不符合要求了。

不论怎样，一个看似古怪难解的问题，经过人们的刻苦钻研，竟然一下子找到了那么多的解答方法，真是“山穷水尽疑无路，柳暗花明又一村”了！

64. 二进制

二进制的长处是适用于机器。将十进制的数，输入机器后，被转化为二进制，最后再“翻译”成十进制显示出来。

那么十进制和二进制是怎样互相转换的？比如十进制的 85，要转换为二进制是多少？

解：把十进制的整数转化成二进制就显然不同了，如，整数 1，在二进制中仍是 1，2 在二进制中便是 10，3 便是 11。4 便是 200。因此，将十进制整数转换为二进制，只要将这个整数逐次用 2 去除，一直除到商等于 0 为止，然后把每次除得的余数倒排起来，便可以了。

例如把十进制的 85，转化为二进制，方法是：

2|85……余数=1
2|42……余数=0
2|21……余数=1
2|10……余数=0
2|5 ……余数=1
2|2 ……余数=0
2|1 ……余数=1
0

于是，（85）$_{10}$=（1010101）2

其中，足码“10”表示十进制，足码“2”表示二进制。上式表示十进制中的 85 等于二进制中的 1010101。

那么，怎样将二进制再转换成十进制记数呢？

我们知道，若将十进制转换为二进制，如 23047 可表示为：

$23047_{10}=2\times10^4+3\times10^3+0\times10^2+4\times10+7=23047_{10}$

同样，二进制的 1010101 也可表达为：

$1010101_2=1\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1$

$=64+0+16+0+4+0+1$

$=85_{10}$

85 只是十进制中的两位数，由二进制转换时便这么繁琐，倘是数千、数万甚至更大的数，其复杂程度便可想而知了。

怎么办？要是有一种机器来代替人工该多好！

是的，电子计算机就是干这种工作的，而且它的工作效率快得惊人，即便是位数繁多的数，它也能霎时之间得出结果。

65.八卦图

计算机的发明在当时震动了世界整个科学界。计算机的原理是二进制。

据说，在研制计算机过程中，研制者曾碰上一个百思不解的难题，正在此时，一个中国朋友给他寄去了八卦图。

所谓八卦就是中国一部古代经典《易经》中的八种符号：☷ ☳ ☵ ☱ ☶ ☲ ☴ ☰,八卦两两结合又可组 64 个不同卦象。

研制者接到这个八卦图如获至宝，头脑豁然开朗，于是很快攻克难关，将具有划时代意义的计算机创造了出来。

你知道，这是受了什么启示？

解：八卦的基本符号只有两种，古人称为阴“- -”阳“——”。可是它却能组成八卦，变化出 64 卦。

二进制也只有两个字码：0 和 1。

八卦与二进制竟是那么相像，它们分别可表示为：

☷ 000	☳ 001	☵ 010	☱ 011
☶ 100	☲ 101	☴ 110	☰ 111

将这两种符号用在电器上，只要通“—”和断“——”两种状态就可以了，这样就大大简化了设备。

由于受到这样的启示，计算机便很快发明出来了。

计算机使用的是二进制，进行数的运算也很便捷。如加法和乘法口诀都只有三条：

加法：0＋0=0

1+0=0+1=1

乘法：0×0＝0

1×0=0×1=0

1×1=1

这与十进制中加、乘各有 55 个口诀相比，实在是太简捷了！

66.出门旅行

某人出门旅行了22天。坐火车、汽车和骑自行车，各走了全部路程的$\frac{1}{3}$。骑自行车的速度是火车速度的$\frac{1}{8}$，是汽车速度的$\frac{1}{4}$。你知道他坐火车、乘汽车、骑自行车各是多少时间吗？

解：这是一道行程问题。路程、速度、时间是行程问题的三个要素。

从题中“各走了全部路程的$\frac{1}{3}$”，可知坐火车、汽车和骑自行车所行的路程是一样的。

根据“路程一定、速度和时间成反比例关系”，若把骑自行车的时间当作“1”，坐火车的时间只是骑自行车时间的$\frac{1}{8}$，同样，乘汽车的时间只是骑自行车时间的$\frac{1}{4}$。

旅行共用了22天，骑自行车的时间便是：

22**天**$\div(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$

$=22$**天**$\div\frac{13}{8}$

$=22$**天**$\times\frac{8}{11}$

$=16$**天**

坐火车的时间是：

16**天**$\times\frac{1}{8}=2$**天**

乘汽车的时间是：

16**天**$\times\frac{1}{4}=4$**天**

67.退瓶换水

暑假中，宁宁、尧尧等五个同学结伴到花果山旅游。他们走得又累又渴，便到商店买了一扎（10 瓶）汽水。喝完后，营业员说，空瓶她们收回，要钱也行，换汽水 3 瓶换 1 瓶也可以。宁宁说：“ 全部换汽水！ ”结果，把换来的汽水喝了，空瓶又换了汽水。最后一只空瓶也没留下，你知道他们一共喝了多少瓶汽水吗？

解：这道题如果用普通的换来换去的办法也能求得结果，但是太麻烦，如果数量大，换的次数多了，很容易出错。

巧妙的思维方法是将它“ 分割压缩 ”，大题化小，寻找规律。

可以这么想：要先向营业员借 1 瓶，再买 2 瓶，喝完后，正好是 3 只空瓶，把空瓶都交给营业员，就正好互不欠帐了。

这么一想，买 2 瓶汽水就可以喝到 3 瓶了。

因此，买一扎 10 瓶汽水，再加上退瓶后换来的汽水，共可以喝到：

解法 1：10＋10÷2

=10＋5

=15（瓶）

解法 2：3×（10÷2）

=3×5

=15（瓶）

68.年龄乘积

芳芳、丽丽、倩倩三个同学年龄都依次相差 1 岁，一个比一个大。三个人年龄相乘得出的积是 504。

她们三人年龄各是多大？

解：从题中“年龄依次相差 1，一个比一个大”。可断定：三人的年龄是三个连续的整数。

“三个连续数的积是 504，求这三个数”。把题目变换成这样叙述，就便于思考了。

既然 504 是三个连续数的积，那么 504 的质因数必然包含这三个数的全部质因数。

思路只要进入这个阶段，这道看似很难的问题，便容易解决了。

只要将 504 分解成质因数相乘的形式，再设法把质因素的积分成三个连续数，便可以了。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 504 \\ \hline 2 & 252 \\ \hline 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad 504=2\times2\times2\times3\times3\times7$$

经过分析，将质因数作下面的分组，便符合要求：

504=（2×2×2）×（3×3）×7

=8×9×7

=7×8×9

即：芳芳 7 岁、丽丽 8 岁、倩倩 9 岁。

69.鲨鱼长度

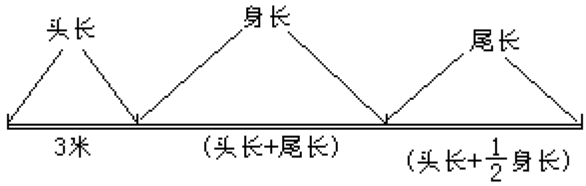
有一条大鲨鱼，它的身长等于头长加上尾长，它的尾长又等于身长的一半加上头长。已经知道这条鲨鱼头长 3 米。你能算出这条鲨鱼的全长是多少吗？

解：题中鲨鱼的头长已知是 3 米，身长=头长+尾长，尾长=头长+身长一半。

咱们据此可画个示意图：

由图可见，只要求出尾长，则身长可求，因此，求鲨鱼的尾长是解题的关键！

这道题趣在只告知鲨鱼的头长，身长尾长都不知，却要我们求出鲨鱼的全长来。初看似乎无从下手，但是画出示意图后，便暴露出了解题的关键。



尾长的求法，可作如下推导：

尾长=头长+身长÷2

=头长+（头长+尾长）÷2

2 尾长=2 头长+头长+尾长（等式两端都×2）

尾长=3 头长

=3×3

=9（米）

全长=头长+身长+尾长

=3＋（3＋9）＋9

=3+12＋9

=24（米）

如果学习了方程，用方程解就简化了：

设鲨鱼尾长为 x 米，可得，

$$x = 3 + \frac{x+3}{2}$$

$$2x = 6 + x + 3$$

$$x = 9$$

身长=3＋9=12

全长=3＋12＋9=24（米）

70.油桶重量

哥哥是个汽车驾驶员，小明经常看到他拿着油桶直接向车内加油，便问：“哥哥，每次加多少机油，有数吗？”哥哥说：“咋能没数呢！瞧，我这桶连油一共重七千克，现在油已用去一半了，连桶还有四千克。”

“桶里净油是多少，还是不知呀！”小明又问。

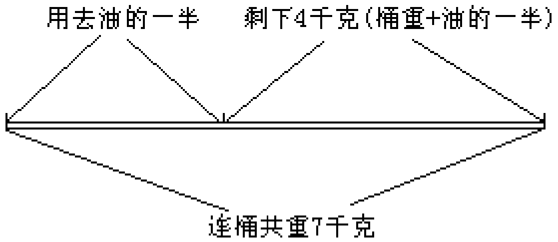
哥哥笑了笑说：“真是个书呆子！一算不就知道了！”

小明不再问了，他用心地思考着。一会儿，真的算出来了，连油桶的重量都知道了。

哥哥听了他的答案后，高兴得连连叫好：“不是书呆子，是洋学生。”

你知道小明是怎么算的吗？

解：可以先画个线段图：



连桶共重 7 千克，现在只剩下 4 千克了，那么用去多少油呢？

7-4=3（千克）

这 3 千克就是油的一半，全部油便是：

（7－4）×2

=3×2

=6（千克）

桶重便是：7－6=1（千克）

还可先求桶的重量：

4×2－7=1（千克）

再求油的重量：

7－1=6（千克）

71.阶梯级数

科学家爱因斯坦做过这样的问题：

一条长长的阶梯，如果你每步跨 2 阶，那么最后余 1 阶；如果每步跨 3 阶，那么最后剩下 2 阶；如果每步跨 5 阶，最后剩 4 阶；如果每步跨 6 阶，最后剩 5 阶；只有当你每步跨 7 阶时，才正好走完，一阶也不剩。问这条阶梯最少有多少阶？

解：这个题目换一种说法，就是：

一条长阶梯，它的阶数被 2 除余 1，被 3 除余 2，被 5 除余 4，被 6 除余 5，被 7 能整除，求至少有多少阶？

这样，把题目压缩简化了，可以方便思考。题中共有 5 个条件，可以分两步解决。

第一步，根据“阶数被 2 除余 1，被 3 除余 2，被 5 除余 4，被 6 除余 5”这四个条件，可知只要在阶数上加 1，就是 2、3、5、6 四个数的倍数了。

2、3、5、6 的最小公倍是：30

所以 29（30－1）便是满足这四个条件的最小自然数。

第二步，第五个条件是“能够被 7 整除”，29 显然不能满足这个条件。怎样才能满足这个条件呢？用 29 作基数，连续加上 2、3、5、6 的最小公倍 30，便可得到：29＋30=59 59＋30=89 89＋30=119……得出的和，经过计算，如果能被 7 整除了，那么答案便找到了。这里 119÷7=17 已经符合目标了，便不必再加下去。119 便是台阶的最小数目。

72.蜻蜓、蜘蛛、蝉

生物小组一次到野外采集生物标本，他们共捉到蜻蜓、蜘蛛、蝉三种小动物共 18 只。他们算了一下，共有 118 条腿和 20 对翅膀。大家知道蜘蛛是 8 条腿，蜻蜓有 6 条腿和 2 对翅膀，蝉有 6 条腿和 1 对翅膀。你能算出这三种小虫各是多少只吗？

解：初看这个题目很复杂，似乎无从着手。

可先把条件疏理清楚：

	腿	翅
蜘蛛	8×？	
蜻蜓	6×？	2×？
＋蝉	6×？	1×？
18只	118	20

假定 18 只都是蜘蛛，那么应共有腿：

8×18=144（条）

实际只有 118 条腿，多了 144-118=26（条）腿。为什么会多呢？因为每只蜘蛛比每只蜻蜓或蝉都多 2 条腿。把蜻蜓和蝉也当作蜘蛛计算了。这样，就有 26÷2=13（只）都当作蜘蛛了。从而蜘蛛的只数可求：

18-13=5（只）

下一步再来算蜻蜓和蝉各是几只。

假如 13 只都是蜻蜓，每只蜻蜓 2 对翅膀，共有 13×2=26（对）翅膀。

实际只有 20 对翅膀，多了 26-20=6（对）翅膀，为什么会多呢？因为蜻蜓是 2 对翅膀，蝉只有 1 对翅膀，把蝉当蜻蜓有 1 只就多 2-1=1（对）翅膀。说明有 6 只蝉也当作蜻蜓了！实际蜻蜓只有 13-6=7（只）。

列成综合式是：

（18×8-118）÷（8-6）
=（144-118）÷2
＝26÷2
=13（只）……………………蜻蜓和蝉的只数
18-13=5（只）…………………蜘蛛的只数
（13×2-20）÷（2-1）
＝（26-20）÷1
＝6÷1
=6………………………………蝉的只数
13-6=7（只）…………………蜻蜓的只数

73.剩余问题

有一篮鸡蛋，5 个 5 个数余 1，6 个 6 个数余 3，7 个 7 个数余 5。这篮鸡蛋至少有多少个？

解：这道题实质就是“求被 5 除余 1，被 6 除余 3，被 7 除余 5 的最小自然数是多少？”

我们可以用“层层剥笋”的方法来解决它。

第一步先满足“被 5 除余 1”的条件：用 1 连续加上 5 的得数都符合，6、11、16、21、26……在计算过程中，要使得数满足第二个条件“被 6 除余 3”，即停止。21÷6=3……3 便不再加下去了。

第二步，用 21 这个数再连续加上 5 和 6 的最小公倍数 30，直到和能满足第三个条件：被 7 除余 5。

21＋30=51　51＋30=81　81＋30=111

111＋30=141　141＋30=171　171+30=201

好了，201÷7=28……5 符合第三个条件了，便停止再加。所以，至少有 201 个鸡蛋。

验算一下：

201÷5=40……1

201÷6＝33……3

201÷7＝28……5

74.点燃蜡烛

为了预防停电，尧尧准备了一些蜡烛放在书橱里。他发现粗蜡烛和细蜡烛长短虽一样，但是一支粗蜡烛能连续点燃 5 小时，细蜡烛只能点燃 4 小时。

有一天，兄弟俩同时点亮蜡烛做功课。过了一段时间后，粗蜡烛的长度是细蜡烛的 4 倍。他头脑一转，向弟弟提了个问题：

你能从蜡烛燃烧的长度算出我们学习了多长时间么？

解：蜡烛点燃的时间，就是兄弟俩学习的时间。

粗蜡烛可点燃5小时，每小时烧去长度的$\frac{1}{5}$，细蜡烛可点燃4小时，每小时烧去长度的$\frac{1}{4}$。

可用方程求解：

设：蜡烛点燃了 x 小时

粗蜡烛x小时烧掉了长度的$\frac{1}{5}x=\frac{x}{5}$

细蜡烛x小时烧掉了长度的$\frac{1}{4}x=\frac{x}{4}$

把整支蜡烛看作“单位 1”，则：

$1-\frac{x}{5}=\left(1-\frac{x}{4}\right)\times 4$

$1-\frac{x}{5}=4-x$

$x-\frac{x}{5}=4-1$

$\frac{4}{5}x=3$

$x=33/4$

两支蜡烛已经点燃了$3\frac{3}{4}$小时，也即兄弟俩的学习时间。

75.行程问题

休息日弟弟和妈妈一同去姥姥家。他们走了 1 小时后，哥哥发现带给姥姥的礼品忘在家里。便立刻带上礼品去追。可爱的小花狗，也跟着飞奔而去。它追上弟弟后，又立即返回到哥哥这里，再返回追弟弟，就这样，不停地在哥哥和弟弟之间跑来跑去，直到兄弟俩相遇了。如果弟弟每小时行 2 千米，哥哥每小时行 6 千米,小花狗的时速是 16 千米,你能算出在哥哥追上弟弟时，小花狗一共跑了多少千米？

解：表面看，这题很难：小花狗在兄弟俩之间往返不停地跑动，兄弟俩之间的距离又是逐渐地缩短，又没有告诉小花狗一共跑了多少趟，小花狗跑的路程怎么求呀？

如果思路误入这个歧途，问题便难解了。

我们应该这么想：

已经告知了小花狗的速度是 16 千米/小时，只要知道时间，便可求出小花狗共跑了多少路程。

哥哥追上弟弟所用的时间，就是小花狗跑的时间。因为从哥哥出发时，它就一直没停往返于哥哥和弟弟之间。

思考到这一步，便容易解决了。

哥哥与弟弟的速度差是：

6-2=4（千米）

即每经过 1 小时，哥哥便可追上弟弟 4 千米。

弟弟先出发 1 小时，哥哥追上他需用：

2÷4=0.5（小时）

即哥哥用半小时，便可追上弟弟。

小花狗在这半个小时中，一直不停地往返奔跑，它每小时速度是 16 千米，那么 0.5 小时它跑了多少路程呢？

16×0.5=8（千米）

列成综合算式是：

16×［2÷（6-2）］

＝16×［2÷4］

=16×0.5

=8（公里）

一个看似难解的问题，竟是这么简单！

76.参赛人数

向阳小学举行《小学生数学报》知识竞赛，四年级参加比赛的人数占参加比赛的总人数的$\frac{1}{3}$，五年级与六年级参加比赛的人数比是$11:13$，五年级参加比赛的比六年级少 8 人，三个年级各有多少人参加比赛？

解：因为五六年级参赛比为 11∶13，那么这两个年级人数的总份数为$11+13=24$份，所以五年级参赛人数占总参赛人数的$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{11}{24}=\frac{11}{36}$，六年级参赛人数占参赛总人数的$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{13}{24}=\frac{13}{36}$，有了五六年级参加比赛的占参加比赛总人数的几分之几，再利用五六年级人数差与分率差的对应关系，便能求出总人数，然后分别求出各年级参赛人数。

也可以这么求：因为五六年级参加比赛的人数比是 11∶13，所以五年级参赛人数是 11 份，六年级是 13 份，即五年级比六年级少 2 份，五年级又比六年级少参加 8 人，这样就可以分别求出五六年级参赛各有多少人，再求出四年级参加比赛的人数。

解法 1：

①求出参赛总人数：

$$8\div\left(\frac{13}{36}-\frac{11}{36}\right)$$
$$=8\div\frac{1}{18}$$
$$=144\text{（人）}$$

②各个年级的参赛人数：

$$144\times\frac{1}{3}=48\text{（人）……四年级}$$
$$144\times\frac{11}{36}=44\text{（人）……五年级}$$
$$144\times\frac{13}{36}=52\text{（人）……六年级}$$

解法 2：

①五年级参赛人数：

8÷（13-11）×11
＝8÷2×11
=4×11
=44（人）

②六年级参赛人数：

8÷（13-11）×13
＝8÷2×13
=4×13
=52（人）

③四年级参赛人数：

$$(44+52)\div(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{3}$$
$$=96\div\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$$
$$=96\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}$$
$$=48$$（人）

答：四年级参加比赛 48 人，五年级参加比赛 44 人，六年级参加比赛 52 人。

77.测洞深

勘察队员在一个山坡上发现一个石洞，黑洞洞的望不见底。他想测量一下石洞的深度，可是身边只有一根长绳，绳的长度也不知道。

后来他想了一个办法：将绳折成 3 折放下井底，上端比井口低 1 尺；他又把绳子折成 2 折放入井底，上端高出井口与他身高相等。他知自己穿靴戴帽的高度恰好 6 尺。于是便很快算出了洞深，连绳长也知道了。

你知道他是怎样计算的吗？

解：将绳折3折，长度便是原长的$\frac{1}{3}$，折2折长度便是绳长的$\frac{1}{2}$。

根据问题的数据，可知绳长的$\frac{1}{2}$比它的$\frac{1}{3}$长7尺（1尺＋6尺）。

这7尺恰是绳长的$\frac{1}{6}$。

解法 1：

（1＋6）×6=42（尺）……………………绳长

42÷2-6=15（尺）………………………洞深

或：42÷3＋1=15（尺）

解法 2：

$$(1+6) \div \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$= 7 \div \frac{1}{6}$$
$= 42$（尺）……………………………………绳长

$42 \times \frac{1}{2} - 6 = 15$（尺）………………………洞深

或：$42 \times \frac{1}{3} + 1 = 15$（尺）

随机应变

急智类题目，大多情节单纯，内容直白，数字简单，凭借生活经验，可以直接口算答案，解题的技能反映出“急中生智”、“随机应变”的本领。

由于这类题目初看简单，一些人解答时不假思索脱口而出。但是常见的情况是，答得越快，错得越多！当别人点破迷津时，才恍然大悟，虽然解法同样简单，但思路却必须拐个弯儿。

简单的问题本应极易求解，但是错误的比例甚至比解复杂的问题还高。果真是“看花容易绣花难”！因此，这类问题，也可称作“简单的难题”。

简单的难题中，寓含着复杂的道理。如果能顺利地解决这类简单的问题，再遇到同类的复杂问题，也便得心应手了。如锯木段与植树问题，渡河方法与计算机程序等等，都有着密切的联系。

解这类题，对培养、训练思维的深刻性和敏捷性，对提高解题和应变能力，都有极大的帮助。

1.几天剪完

一块 10 米长的布，每天剪去 2 米，几天可以剪完？

解：一些人会不加思考地回答：5 天剪完。他们的算法是：10 米÷2 米=5（天）

其实最后一次剪开的是 4 米，因此只用 4 天便可剪完。即，10÷2-1=4（天）

2. 用时多少

一根长 12 米的木料，截成都是 2 米长的木段，每截一段都需 5 分钟，全部截完需多长时间？

解：12 米长木料，截成 2 米一段，只需截割 5 次。共需时间为：

5×（12÷2-1）=5×5=25（分）

3.几次渡完

河里只有一条能坐 5 人的空船，现有 10 人需要过河，需往返几次才能全部过河？

解：要是算成：10÷5=2（次），便大错特错了！

因为小船每次只能坐 5 人，船到对岸，还需 1 人将船撑回来，实际每次仅过河 4 人，两次船过 8 人，最后，对岸只剩 1 人，仍需船开回再渡。所以，必须 3 次才能全部过河。

4.多少只鸡

如果 3 只母鸡 3 天能下 3 个蛋，那么，要在 100 天内，得到 100 只鸡蛋，需多少只鸡？

解：3 只鸡 3 天下 3 只蛋，3 只鸡 1 天只生 1 只蛋，所以 3 只鸡 100 天内就可以得到 100 只鸡蛋。

5.分装水果

有 12 千克水果，分装在 4 个袋里，每袋都装了 4 千克，而且没有空袋，这是怎么回事？

解：把最后一袋水果，连同袋子都装入剩余的一个袋内了。

6.棋子距离

桌上摆放着 5 枚棋子，相邻的两个棋子间距离都是 4 厘米，两端两个棋子间距离是多少？

解：5 枚棋子只有 4 个间隔，因此，首尾两棋子间的距离是：

4×（5－1）＝16（厘米）

7.哪排更长

有两列队形：一列 10 人，每两人间距 1 米；另一列 15 人，每两人间距半米。哪一列队形更长？

解：10 人队列，共有 9 个间距，每个间距是 1 米，所以全长 9 米。

15 人队列，共有 14 个间距，每个间距是 0.5 米，全长只有 0.5×（15－1）＝7 米。

当然是 10 人队列更长些。

8.几种信号

一只船上有红、黄、蓝三种颜色的信号旗，一共可以表示多少种不同的信号？

解：挂一面旗，只有红、黄、蓝 3 种信号。

挂两面旗，有：红黄、红蓝，黄红、黄蓝，蓝红、蓝黄，共 6 种信号。

挂三面旗，有：红黄蓝、红蓝黄，黄红蓝、黄蓝红，蓝黄红、蓝红黄，也是 6 种信号。

所以，三种颜色的旗共可表示 15 种不同的信号。

9.放大镜看角

一个角只有 30°，用 3 倍的放大镜看应是多少度？
解：仍是 30°。

10.抓住两根

在一个建筑工地的支架上吊下两根绳子，因为两根绳间距较大，一个人能抓住这一根，就够不到另一根，但是必须两根同时都抓住，才能继续下面的工程。

后来，他终于想出了办法，并没用任何辅助器具，把两根绳子抓到手里了。

他用了什么办法？

解：他先摆一根绳子，让它大幅度地摇摆起来，然后撒手去抓另一根绳子，当前一根绳摆过来的时候，便迅速地抓住它。

11.通过桥洞

一批装载集装箱的机帆船，必须通过一座桥洞。可桥洞离水面比集装箱顶距水面还矮 1 厘米。

可是后来船长想了个巧妙的办法，竟然使所有船只顺利通过了。你知道，船长用了什么办法吗？

解：船长用增加船的装载量，使船吃水更深一些，船在水面上的高度便降低了。这样，直到增加的重量足以使船身下沉到大于 1 厘米时，船只便可从桥洞中通过了。

12.智过独木桥

李大叔挑着两个空箩筐进城买菜。当他通过独木桥时，后面紧跟着一个小孩，紧接着对面也来了一个小孩。两个小孩把李大伯夹在了独木桥中间，他们谁也不肯往回走，独木桥又不能并行两人。李大伯急中生智，使两个小孩各奔前程，谁都没有往回走。

李大伯用的是什么办法呢？

解：李大伯让两个小孩坐在箩筐里，让扁担在肩上转了一下，两个小孩便互换位置了。

这些问题在实际生活中似乎不可能存在，可是在工厂中生产零件的流水线上，却可能出现两种流程相交，必须想出类似于此的解决办法，因此，它的实际意义是不容忽视的。

13.狗、羊、菜

有位老人带着一只小狗、一只小羊和白菜来到河岸。但是渡河时只允许主人带三件物品中的一件，可是不论在河的哪一边，狗和羊、羊和白菜都不能无人照管而同时放在一起，因为狗会咬羊，羊会吃菜。

老人该怎样过河才能不受损失？

解：老人先带羊过河，留下小狗和白菜，空船渡回。第二次带狗过河，若把狗、羊都留下，则狗会咬羊，老人将羊带回，只留下狗在对岸。第三次带菜过河，留下羊，到对岸后留下菜，空船回。最后再把羊带过河。这样，便毫无损失了。

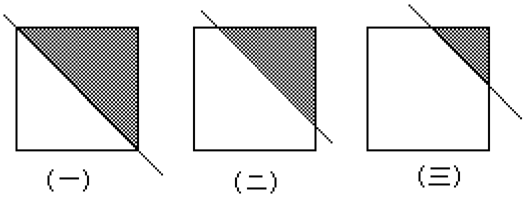
想想看，还可以怎么办？

14.还有几个角

把一块正方形的硬纸板，剪去一个角后，还会有几个角？

解：这类问题是不应该简单的用“4－1”的方法来解决，要具体问题具体对待。

由于剪法不同，可能出现下述三种情况：



（一）　（二）　（三）

图（一）的剪法还剩三个角。

图（二）的剪法还剩四个角。角没有减少。

图（三）的剪法还剩五个角，增加了一个角。

15.暗中取球

木箱里有黑、白两种球各 10 个，如果在暗中取球，一次只取一只，最少取几次才会有一对颜色相同的球？

解：题中问的是最少取几次才能有一对颜色相同的球。所以，取一次可能是黑或白，取第二次则非黑即白。只要与第一次颜色相同就会得到一对同颜色的球。因此至少用二次。

若问最多几次可得不同色的球，情况就不同了。每种颜色的球都是 10 只，有可能前 10 次取的是同一种颜色的球，但到第十一次则肯定可得一对不同颜色的球了。

16.煎饼时间

用平底锅每次能煎两个饼，每煎熟一个饼正反面各需 1 分钟，因此一只饼从入锅到煎熟共需要 2 分钟。照这样，煎三个饼最少要用多少分钟？

解：煎三只饼至少需要三分钟。方法是：第一次放入两个饼，一分钟后，取出一只放进第三只，同时将第二只翻转。再煎 1 分钟，取出煎熟的第二只，将第一只放入煎反面，同时将第三只翻转，再过 1 分钟，便都煎熟了。

17.楼梯台阶

董尧尧从一楼走到三楼共跨 36 个台阶，如果每层楼的台阶相同，他走到六楼共跨多少个台阶？

解：如果你的解法是：

$$36\div3\times6=72（个）$$

便错误了！因为从地面到三楼实际只经过两层楼的台阶。同样，从一楼到六楼也只跨五层楼梯。

正确的解法是：

$$\begin{aligned}&36\div（3-1）\times（6-1）\\=&36\div2\times5\\=&90（个）\end{aligned}$$

即从一楼到六楼共跨 90 个台阶。

18. 试开门锁

每个锁都有一把钥匙，小亮家有三把钥匙三把锁，但是他分不清哪个钥匙开哪把锁，只好试开。要保证每把锁都配上自己的钥匙，最多需试几次？最少需试几次？

解：最多需试 3 次。

如用 A 钥匙试开，若不是 1 锁和 2 锁，则定是 3 锁，不必再试。用 B 钥匙试开 1 锁，若不是，定是 2 锁。余下的一把钥匙必然是 1 锁的。

最少只需试开 2 次。

每试一把钥匙都恰巧能开，则余下最后一把便不必再试了。

19.池塘水草

一种水草繁殖力极强，放在水面上它的覆盖面积每天都扩大一倍。一个池塘将水草放进后仅 20 天，池塘的水面就被全部覆盖。

现在问你：当水草把池塘的一半覆盖时，用了多少天？

解：人们思考问题大多“从头想起”，用这种思路本题便无法解决。因此，有时便需要“倒过来想”。

这种水草，每天的面积扩大一倍，20 天将水塘全部覆盖，这就是说，在第 19 天时，它只覆盖了池塘的一半面积。

瞧，“倒过来想”之后，问题这么容易就解决了。

20.睡了几小时

学校组织登山，回家后董尧觉得很累，他把闹钟对准 9 点，心想明天睡到 9 点再起，反正是星期日不用到校。于是他 8 点钟便入睡了。请问到闹铃响时，他一共睡了多少小时？

解：很多同学的解法是：

$$12-8+9=13\text{（小时）}$$

其实他忽略了一个重要因素：在 12 点前，闹钟到 9 点时便起闹了。从他入睡到响铃，实际只有 1 个小时。

21.时钟敲响

一只报时钟，敲响 5 下要用 20 秒，敲响 10 下，要用多少秒？
解：一般人会脱口而出：40 秒！
他们的算法是：20÷5×10＝40（秒）
但实际敲 5 响只有 4 个间隔，敲 10 响只有 9 个间隔。
因此，每一间隔需用时间是：

$$20 \div (5-1) = 20 \div 4 = 5\text{（秒）}$$

敲 10 响需用的时间是：

$$5 \times (10-1) = 5 \times 9 = 45\text{（秒）}$$

这类题与锯木段算法是相似的。

22.猴王分桃

猴王有 10 只小猴子，一天它摘来一些桃子。小猴子一个个急着要吃。猴王眼睛一眨说：“别急，别急，我把桃子分一半给每只小猴，你们再退回一只，好吗？”

小猴子听说每人可以分得总数的一半，只退回一只，连声说：“好，好，好！”

于是，猴王将桃子给每个小猴分发下去。10 只小猴都分完了，猴王的手里还剩 2 只桃子。

你知道猴王一共有多少只桃子？

解：猴王只有 2 只桃子。

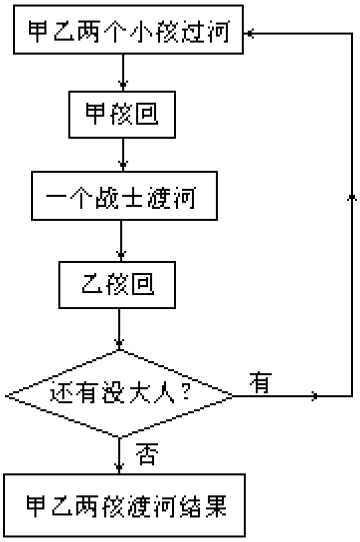
小猴子最后才明白受骗了，它们谁都两手空空，一只桃子也没捞着。

23.如何渡河

十队公安干警，为执行任务，必须渡过河去。可是桥已被破坏，河水又深。幸好有两个小朋友驾舟玩耍，可是船太小，每次只能乘坐一个大人或两个小孩。

最后，他们竟用这条小船全部过了河。你知道他们是怎样渡过去的吗？

解：他们渡河的办法是：



①两个小孩先过河，留 1 人在对岸，另一个小孩将船划回。

②一个战士上船，小孩留下。

③到对岸后，战士留下，对岸的小孩将船划回。

这样，重复①～③的办法，直至全部过河。

这个过程画成流程方框图，就更一目了然了。

24.分苹果

妈妈买来 10 只苹果，她把盛苹果的篮子交给姐姐，说：“你们 5 个小朋友，每人 2 只。但我要求篮子里要留下 2 个，否则谁也不准吃”。

姐姐想了一会，真的按妈妈的要求将苹果分开了：5 个小朋友，每人 2 只，篮子里仍有 2 只。

你知道，姐姐是怎么分的吗？

解：姐姐让每个小朋友拿走 2 只，最后她连篮子和苹果一起拿走了。

25.乘车人数

一天，同学和老师共同乘汽车到海滨浴场去，董尧尧发现车上的老师、男同学、女同学加起来数目的和恰巧与三个数相乘的积相等。他编了一道数学题，问乘车的一共是多少人？一些同学却解不出来。你会解吗？

解：

老师、男同学、女同学一共是 6 人。

即：1＋2＋3＝1×2×3＝6

26.奶奶记错了

媛媛问奶奶：“ 电影票放在哪？ ”
奶奶说：“ 放在那本《快算技巧 100 例》的 53～54 页之间 ”。
“ 奶奶，你一定记错了！ ” 媛媛十分肯定。
你知道，媛媛根据是什么？
解：因为 53～54 页是同一页书的两面，中间怎么能夹电影票呢？

27.看电影

两个妈妈和两个女儿一同去看电影。可是她们只买了 3 张票，便顺利的进了电影院。这是怎么回事？

解：因为看电影的就是 3 个人：奶奶、妈妈、孙女。

28.剪绳

有人将一根绳子从中间用剪刀剪断，剪完后仍是一根绳子。这是怎么回事？

解：有两种可能：①这是一根首尾相接的环形绳子。②若不是环形绳，必是中间有绳结，剪去的只是多余的结头。

29.散步

尧尧和爸爸用均匀的速度在马路上散步。他们从第 1 根电杆到第 12 根电杆，整整用了 6 分钟。

爸爸问：“仍用这样的速度，再过 6 分钟，我们会走到第几根电杆？”

尧尧说：“那当然是第 24 根罗！”

“不对！”爸爸笑了。“你再想想！”

解：从第 1 根到第 12 根电杆，用了 6 分钟。继续走下去，是从第 12 根开始的，而不是从第 13 根开始的。因此，再走 6 分钟，只能到达第 23 根，而不是第 24 根。

30.赶车

火车站离出发地点 2 里，某人必须在两分钟内赶到才能乘上车。他先以每小时 30 里的速度赶完 1 里,那么剩下的 1 里要用怎样的速度才能乘上车？

解：出发地点离火车站 2 里，要在 2 分钟内赶到，每分钟必须走 1 里。

他先用每小时（60 分钟）30 里的速度走完 1 里，这样的速度实际每分钟走了：

$$30\text{ 里}\div 60=0.5\text{ 里}$$

走完 1 里已经用了 2 分钟。

所以，他赶不上车了！

31.一只小船

一只小船只能载重 100 千克。一个体重 100 千克的爸爸，带着他的两个体重共 50 千克的孩子能用这只小船过河吗？

解：能。方法是：

先让两个孩子乘船渡河，至对岸时留下一人，另一人将船渡回，留下孩子，让父亲乘船过河，到对岸后，再由原先留下的孩子将船渡回，而后两人一起上船渡过对岸。

32.至少几只

河里有一群鸭，一只的前面有两只，两只的后面有一只，还有一只在中间，这群鸭至少是多少只？

解：至少 3 只，排成一列纵队。

33.剩下几支

办公室里点燃着 10 支蜡烛，风吹灭了 2 支，过了不久，又吹灭了 1 支。把门窗关好后，便 1 支也没有熄灭。请问最后还剩下几支？

解：总数 10 支蜡烛，被风吹灭了 3 支，此后便一直燃烧下去了。说明最后剩下的只有灭掉的 3 支，其余的都燃烧尽了。

34.烟商的损失

一位顾客要买 2 元的香烟。他给了 5 元钱，烟商没有零钱可找，便向其他商人兑换成 5 张 1 元的票子。顾客拿着香烟和找回的 3 元钱走了。一会儿兑换钱的商人说那 5 元的钱是假的，烟商只得给他一张真的 5 元钞票。在这个过程中烟商损失了多少钱和烟？

解：烟商损失了 5 元现金和价值 2 元的香烟。

35.留下几人

20 名运动员报数后，10～20 号退出，其余留下，留下的运动员是几人？

解：你若脱口而出，认为留下 10 人，那就错了。因为 10～20 号退出，说明在 10 号前的运动员都留下了，而 10 号前是 9 号，所以留下 9 人。

36.共有几只鸭

河里有一行鸭，2 只前面有 3 只，3 只后面有 2 只，2 只中间还有 3 只，这行鸭一共有几只？

一共有 5 只鸭子。

37.开出汽车

汽车站每隔 10 分钟开出一辆汽车，请问一小时开出多少辆汽车？

解：一小时是 60 分钟，每 10 分钟开出一辆，加上开始开出的一辆，一共开出：

1＋60÷10

＝1＋6

＝7（辆）

38.正数、倒数

同学们排队去看电影，小明排在正数第 9 人，倒数第 10 人，这队一共有多少个同学？

解：小明排在正数第 9 人，说明他前面有 8 人，倒数第 10 人，说明他后面有 9 人，再加上小明，这队的人数是：

（9－1）＋（10－1）＋1

＝8＋9＋1

＝18（人）

39.牧羊

一个牧羊人，第一天发现少了 2 只羊羔，第二天发现又少了 2 只羊羔，第三天他认真地寻找了一下，发现羊群中有一只披着羊皮的狼，原来羊羔被这只披着伪装的狼吃掉了。请问，这狼一共吃了几只羊羔？

解：第一天少 2 只，是把伪装的狼也当作羊数了，实际被狼吃了 3 只羊，第二天实际就是少了 2 只，所以一共被狼吃了 5 只羊羔。

40.做工

两个父亲和两个儿子做工挣了 3600 元，但当他们平均分款时，每人却得了 1200 元。

你认为这样的事情可能吗？

解：可能。两个父亲和两个儿子是祖孙三人。

41.试卷相同

在一次数学测验中，尽管老师监视很严，考试时间又很短，学生根本不可能作弊。可是改卷时却发现两张完全相同的试卷。

你认为这种情况可能发生吗？

解：人们受思维定势的影响，总以为凡是试卷都被学生做过了，却忽略了会有一题没做交白卷的人。

有两个同学交了白卷，所以他们的试卷完全相同。

42.男孩女孩

排队时要求在每一个男孩后面站一个女孩，同时每一个女孩后面要站一个男孩。至少要几个人才能站成这样的队形？

解：两人。一个男孩和一个女孩背靠背地站着即成。

43.登楼

某人从地上登上四层楼需要 3 分钟。他以同样的速度，从地上登上八层楼需要多少分钟？

解：有人说 8 层是 4 层的 2 倍，用的时间也必然是 2 倍，即：3×2＝6（分钟）。这样答便错了！

实际从地上到四层只爬 3 段楼梯，而从四层到八层却必须爬 4 段楼梯，所以总共用 7 分钟。

44.哪车更近

554 号列车以每小时 80 公里的速度从连云港开往徐州，513 号列车以每小时 100 公里的速度从徐州开往连云港，当他们在途中相遇时，哪列车离徐州更近些？

解：距离相等。

45.车过山洞

一列长 1000 米的列车，以每分钟 1000 米的速度前进。

请问，它穿过 1000 米长的山洞需要多长时间？

解：车速每分钟 1000 米，通过 1000 米长的山洞，有人会脱口而出，1 分钟通过呗！

其实他忽略车身长 1000 米这个因素。车头进入山洞到车身离开山洞，列车运行的距离实际是“车身＋洞长”，因而必须 2 分钟才能通过山洞。

46.烟向何方

如果列车以每小时 120 公里的速度向北行驶，此时南风的风速是每小时 30 公里。想想看，列车烟囱里冒出的烟应飘向何方？

解：因为车速快于风速，烟囱里冒出的烟仍是向南的。

47.药瓶装水

用 100 毫升的药水瓶装水，因为瓶子的刻度没有到达瓶口，你有什么办法只用这只瓶，知道它装满了水，水的体积是多少？

解：关键是求出瓶口没有刻度那部分的体积。

先不将水注满，量出刻度。再将瓶子塞上瓶盖倒立，看刻度减少了多少，减少的数字便是没有刻度那部分的体积。加上 100 毫升后的得数便是满瓶水的体积（1 毫升为 1 立方厘米）。

48.多少钱？

爸爸买来了一些橘子。

儿子问：“橘子多少钱 1 斤？”

爸爸说：“我身上的钱，若买 3 斤余 2 角，若买 4 斤便缺 3 角钱。自己算吧！”

儿子算不出。

你能帮他算算：橘子是多少钱 1 斤？爸爸身上是多少钱吗？

解：从买 3 斤可以余 2 角，买 4 斤则少 3 角，可知若再给爸爸 3 角钱，便可多买 1 斤橘子。说明橘子每斤的价是：2 角＋3 角＝5 角。从而爸爸身上的钱也便可知。

（2＋3）÷（4－3）＝5÷1＝5（角）…………橘每斤价

5×3＋2＝17（角）＝1.7（元）……………爸爸的钱

49.侦察过桥

敌人在一条大桥的中间设一个了望哨，每隔 5 分钟巡视一次。桥上不准任何人进出。

侦察员小王想通过大桥，深入敌后。可是桥很长，约走 7 分钟。怎么办？最后小王终于想出了办法，大摇大摆地通过了大桥。

你知道小王想了什么办法吗？

解：敌人每 5 分钟巡视一次，可是通过大桥却需 7 分钟。这就是说，凡是想进出的人，都不能逃出敌人的眼睛。过桥似乎是不可能的。

但是侦察员小王却利用敌人每隔 5 分钟巡视一次的规律，悟出了过桥的办法：他趁敌人第一次巡视刚刚进屋，便迅速过桥，等敌人第二次巡视时，他已到达了望哨的另一侧，便迅速转过身来往回走，敌人自然要阻止他，令他返回。这正是小王所希望的，便装着无可奈何的样子，再次转过身来往回走。这样，便大摇大摆地通过大桥，深入到敌人的后方了！

50　挑出假币

某人将一枚假银元混进了一堆真银元中，从外表上无法区分，只知道假银元是灌铅的，比真银元重。

现在给你一架天平，要求在 50 枚银币中将假币挑出，至少需要称几次？

解：若每次称 2 枚，有可能需称 25 次。这种办法最笨拙。

较好的办法是：将 50 枚银币一分为二，各放在天平一端，假币必在重的一端。然后，再将重的这段分成 12 和 13 两份，从 13 枚中取出 1 枚，若恰巧取出的这枚就是假币，则天平两端必然平衡。这样只需两次便挑出了假币。

如果天平不平衡，则假币在重的一端，再将 12 平分两份再称……这样下去，最多用六次便可以挑出假币。

所以，最少也需两次。

51 几只苹果

妈妈从街上买回一篮苹果。她分一半给王大娘。路过姥姥家，又将余下的苹果留下一半给姥姥。回到家时，将一半分给小华，余下的一半分给丽丽。这时妈妈的篮子里只剩一只苹果了。你知道妈妈一共买多少只苹果吗？

解：这类问题用倒过来想很容易解决。

篮子里只剩一只苹果是分一半给丽丽后余下的，没分给丽丽时，应是 2 只苹果。这 2 只苹果又是分给小华一半后余下的，可知未分前有 4 只苹果……这样，一直追溯下去，便找到了答案。

解法 1：

1×2×2×2×2=16（只）

解法 2：用分数解：

$$1\div\left(1-\frac{1}{2}\right)\div\left(1-\frac{1}{2}\right)\div\left(1-\frac{1}{2}\right)\div\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1\div\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$$

$=16$（只）

即：妈妈共买 16 只苹果。

52.半数加半个

小明问：“ 王叔叔，你的西瓜是多少个？ ”

王叔叔笑着说：“ 第一个人买去半数加半个，第二人买去剩下的半数加半个，第三个人买去第二个人买后的半数加半个，最后余下的被我送给了军属张爷爷，仍是半数加半个。 ”

小明疑惑的问：“ 这么说，你的西瓜是切开来卖的了？ ”

“ 切开？拿走的都是完整的呀！ ”王叔叔说。

小明皱起了眉：这是怎么回事呢？

解：王叔叔送给军属张爷爷 1 个西瓜：

0.5+0.5=1（个）

第三个人买走了 2 个西瓜，之前王叔叔有西瓜：

（1+0.5）×2=1.5×2=3（个）

第二个人买前，王叔叔有西瓜：

（3＋0.5）×2=7（个）

第一个人买前，王叔叔有西瓜：

（7=+0.5）×2=15（个）

这样，第一个人买 15 的一半又半个是 8 个。第二个人买余下 7 个的半数加半个是 4 个。第三个人买再次余下 3 个的一半加半个是 2 个。送给军属张爷爷的恰是 1 个。

53.难分的桃

一群猴子摘了一堆桃，便将它等分成几堆，可是总是分不均：分成 2 份，余 1 个；分成 3 份，余 2 个；分成 4 份，余 3 个；分成 5 份，余 4 个；分成 6 份，余 5 个。

猴子摘的桃至少有多少个呢？

解：从几次分桃的余数看，总是缺 1 个。假如在这堆桃上增加 1 个，分成 2、3、4、5、6 份都恰好整分，也就是这堆桃子加 1 后，便是 2、3、4、5、6 的公倍数了！

题中问这堆桃至少有多少个？只要求出 2、3、4、5、6 的最小公倍数，再将加进的 1 个减去便是这堆桃子数。

2、3、4、5、6 的最小公倍数是 60。

所以这堆桃子是：60-l=59（个）。

54.六把空椅

某人请客，来了许多客人。接着又来了三对夫妇，其中一对年轻夫妇没带孩子，其余两对夫妇各自都带一个孩子。

此时客厅里只有 6 把空椅子，主人刚要去借椅子，客人说：“不必了，刚好够坐。”说着便都坐下了。

大家一看，果然 6 把椅刚好坐满，而且每把椅子上只坐一个人，并没有站着的。

你能说出这是怎么回事吗？

解：按照常规思维，三对夫妇已经是 6 个人，再加上他们中带来的孩子，应是 8 个人。

可是事实是：6 把椅子刚好坐满，而且一椅一人，没有站着的，更没有 2 人坐一椅的。

真是怪事儿！

如果跳出常规思维框框，想到这三对夫妇间会不会存在某种亲缘关系，也即父母与孩子的关系，便会豁然开朗：没带孩子的年轻夫妇，原来是另外两对夫妇的孩子！这样，便恰好是 6 个人，正好坐满了 6 把椅子。

答案竟是这么简单！

55.至少几只猫

小华抱了只猫从屋里出来，大声喊道：“妈妈咱们家来了一些猫！屋里四个墙角，每个墙角蹲一只，每一只前面都有 3 只猫。”

“这么多猫呀！”妈妈也很惊奇，“一共是多少只呀？”

“多少只你自己算嘛！”小华说。

妈妈思考了一会，说：“加上你这只，一共是 17 只吧！”

小华听了直摇头。

妈妈算的不对吗？为什么？

解：问题的关键是怎样理解“每只猫前面都有 3 只猫”这句话。

因为所谓“前面”，并没有距离的限制，紧挨着面前称“前面”，稍远一些也称“前面”。所以，每一个墙角前面的猫都有 3 只猫在它的前面。这样，屋内四个墙角四只猫，加上小华抱着的猫，总共只有 5 只猫。

56.装满水缸

学雷锋小组每天给军属王奶奶送 4 桶水，王奶奶早、中、晚三餐用去 3 桶。

王奶奶的水缸能容 10 桶水，照这样，需要几天，水缸的水才能装满？

解：你也许这样想：每天送 4 桶用去 3 桶，水缸里只剩下 1 桶。水缸总共可装 10 桶水，10 天就满了！

这样便大错特错了！

其实到第六天，水缸里已积存了 6 桶水，第七天再送去 4 桶，水缸便装满了！

57.虫蛀的厚度

一部书共两册，并排地摆在书架上：一只可恶的蛀虫，从第一册的第一页咬起，一直咬到第二册的最后一页。两册书每册的内页厚 3 厘米，封面和封底各厚$\frac{1}{4}$厘米。请你细心地算一下，这只蛀虫一共咬了多少厘米厚度？

小明的计算方法是：

1.两册书的内页共厚：

3×2=6（厘米）

2.两册书的封面和封底共厚：

$\frac{1}{4}\times 4=1$（厘米）

3.蛀虫咬的厚度是：

6+1=7（厘米）

小明算得正确吗？

解：虫蛀的厚度，一些人的思路和小明一样，认为这样做是正确的，其实却错了！

题中已经告知，两册书并排在书架上，蛀虫是从第一册的第一页，一直咬到第二册的最后一页。实际第一册的封面和第二册的封底都没有咬透，咬透的是两册书的内页和第一册的封底及第二册的封面。

因此，虫蛀的厚度应是：

$$3\times 2+\frac{1}{4}\times 2$$
$$=6+\frac{1}{2}$$
$$=6\frac{1}{2}\text{（厘米）}$$

58.共用时间

尧尧家离学校 300 米，他每分钟走 50 米。一天上学时走了 100 米时想起忘了带劳动工具。便仍按原来的速度回家拿工具。

请问这次上学尧尧共用几分钟？

解：因为尧尧走到中途又返回，一些人往往在这个关键处出错，有的算成 10 分钟，有的却算成 8 分钟。

其实，尧尧从 100 米处返回，再返回到离家 100 米处，共走了三个 100 米，离学校还有 200 米。

因此共用的时间是：

解法 1：

[（300-100）+100×3〕÷50=10（分）

解法 2：

（100÷50）×3+（300-100）÷50=6+4=10（分）

解法 3：

300÷50+100×2÷50=6+4=10（分）

59.六棒四形

尧尧手里摇晃着 6 根小棒棒，高声地招呼着：“ 喂，喂，喂！比智力，看本领，6 根棒能围四个三角形。 ”开始时，同学们以为他故意闹着玩的，谁都知道，一个三角形有三条边，6 根棒围成四个三角形，简直是天方夜谭！

后来，尧尧竟认真起来了：“ 不信？咱们打赌。 ”同学们便围上来，叫尧尧摆给大家看看。只见尧尧不慌不忙，胸有成竹。摆好后，大家一数，果然是围成了四个三角形。

你能知道，尧尧的小棒是怎么摆放的吗？

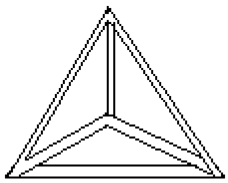
解：这个问题，按照常规思维是不可能的！在同一个平面上，6 根小棒不论怎么摆，也无法围成四个三角形。

遇到“ 死胡同 ”，思路必须及时调整方向！

假如不在同一平面上，比如把有的小棒立起来摆会怎样呢？

只要思路跳到这一步，便可以找到答案了！

尧尧的摆放方法是：



瞧，6 个小棒围成了立着三个三角形，加上平面上的一个，正好是四个三角形。

60.杯子不坏

“爷爷常常提出一些奇怪的问题”，宁宁说，“夏天我和爷爷在 100 米高的楼顶上乘凉，爷爷拿着他手里的玻璃杯说，我把杯子扔向天空，当杯子落下 100 米时却并没摔坏，这可能吗？”

“大家说，楼下是不是铺了很厚的棉花或海绵等极柔软的东西？”

“爷爷说，不，是光滑的水泥地面。”

“大家又说，那就是你这杯子很特殊。”

“爷爷说，也不，是普普通通的玻璃杯子。”

“大家都认为，这是不可能的。可是，最后听爷爷讲了道理，却是真的。”

你能说出是什么道理么？

解：爷爷提的问题真够怪的：普普通通的玻璃杯，从 100 米高的楼顶扔下，落到水泥地面上还摔不坏，这怎么可能呢？

一般人都是这样认为的。

遇到这种问题，要认真地推敲题中的条件。爷爷说的是：在 100 米高的楼顶，把杯子向天空掷去，这就是说，玻璃杯离地面的高度必定是大于 100 米。

再看看爷爷的问题是什么：当杯子下落 100 米时，却并没有摔坏，这可能吗？

啊！明白了！

杯子下落 100 米时，还没有到达地面哩，它怎么会坏呢？

61.磅秤称牛

小朋友都知道曹冲称象的故事。曹冲是先把大象放在船上，记下水位。再让大象下船，向船上放石头，使石头的重量与大象的重量水位一致，最后称出石头的重量，把一个当时的难题解决了。

现在有一头体重约七、八百斤的黄牛，准备宰杀。可是屠宰场只有一台最多只称五百斤的磅秤，要求只用这架磅秤，称出牛的重量，应如何解决呢？

解：当然不能把牛杀掉，肢解以后再称，那样就没有思考价值了。

牛的重量超出磅秤限量几百斤，又不准把牛肢解以后再称，这可真是个难题。

只要开动脑筋想办法，总会找到解决的途径的。

想想，除了秤还有什么能称东西？天平也可以。不可能用天平称牛，然而，天平称东西的方法，却给我们提供思路：它一端放砝码，一端放物品，两端平衡，便称出了物体的重量。

有了，在磅秤旁放一块与底座水平的木板，让牛前足踏在磅秤底座上，后足踏在木板上，称出一个重量，而后再把牛调个方向站立，让它后足踏在磅秤底座上，再称出一个重量，这样，将两次称得的重量相加，就是牛体的总重量。

难题也便解决了！

62.天气情况

已经是晚上九点了，董尧尧仍在复习功课，外面忽然下起雨来了。

爷爷说：“尧尧，考考你，再过 48 小时，会不会出太阳？”

尧尧觉得爷爷在开玩笑：“我又不是气象员，怎么能知道两天以后会不会晴天？”

可是当爷爷说出答案后，尧尧佩服得连连点头称“是”。

请问：爷爷怎么会知道 48 小时后的天气情况的？

解：寻找一个问题的答案时，必须细心地分析题中的所有条件。

尧尧忽略了爷爷问他的时候恰是“晚上九点”，因而便不可能断定 48 小时后会不会出太阳。

从晚上九点开始，再过 48 小时，正好是第三天晚上九点，不论天气是阴是晴，断定是不可能出太阳的。

63.巧分苹果

奶奶拿来16只苹果，说：“把它分成三份，然后再吃。元元的要比倩倩的少3个，却比尧尧多2个。谁算好了，谁先拿走”。

元元不会分，倩倩也不会分，最后还是尧尧给分好了。

你知道应该怎么分吗？

解：根据奶奶的要求，倩倩比元元多3个，元元比尧尧多2个，则倩倩比尧尧多5个。以尧尧作标准，从总数去掉2+5=7（个），余下的除以3便是尧尧应分的苹果。所以，

尧尧得：［16-（2+5）］÷3=3（个）

元元得：3+2=5（个）

倩倩得：5+3=8（个）

64.贵 1 元

某人买一个瓶子和一个软木塞，共花 1.10 元。他问店家：“瓶子和软木塞各是多少钱？”

店家回答：“瓶子比软木塞贵 1 元！”

“这么说，瓶子 1 元，软木塞 0.1 元喽。”某人答道。

可是，店家直摇头。你知道为什么吗？

解：如果软木塞是 0.1 元，瓶子 1 元，那么瓶子比软木塞贵 1-0.1=0.9（元）了。所以这样的回答是错误的。

正确的算法应该是：

软木塞价：（1.1-1）÷2=0.1÷2=0.05（元）

瓶子价：1.1-0.05-1.05（元）

65.每打邮票

我们知道 5 角 1 枚的邮票每打是 12 张，你能知道 1 元 1
枚的邮票，每打应有多少张么？

解：有人也许会回答：1 元 1 枚的邮票每打应有 6 张。因为 1 元是 5 角的 2 倍，5 角的 1 打是 12 枚，1 元 1 打的张数必
缩小 2 倍。

这么回答便错了！

因为邮票不论面值大小，每打都一律是 12 张。

66.仅有 12 个

我国有 12 亿人口，每人都有一个，而全国却仅有 12 个。你知道是什么吗？

解：每人都有一个属相：鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、犬、猪共 12 个。

67.长胡子山羊

山坡上有 20 只山羊，其中母山羊有 12 只，你能知道长胡子的山羊是多少只么？

解：山羊不论公、母，都长胡子。题中并不是问公山羊有多少只的，所以长胡子的山羊仍是 20 只。

68.查车票

某人乘火车外出旅游。听说查票了，他忙掏出了自己的车票。列车员和乘警走进了他所在的 3 号车厢后，看了他的车票。这时，他发现这节车厢里的人有车票的只占$\frac{1}{3}$。

奇怪的是，列车员和乘警却什么也没说，便走了。这是什么原因呢？

解：列车员和乘警是负责检查车票的，可是车厢里的人有票的只占$\frac{1}{3}$，他们却不闻不问地走了，这现象确实奇怪。

原因是：一般人总认为车厢里会有许许多多的乘客。其实 3 号车厢中只有这位游客，加上两位查票的才3个人，持票的只占$\frac{1}{3}$，想到这一步，原因便找到了！

69.取硬币

一天，倩倩要猜谜语，爷爷却要她解一个难题：有一块 4 米见方的地毯，平铺在地上。正中放着 1 枚硬币，不准用别的东西勾取，也不许踩在地毯上或爬上地毯，只能亲自用手拿到硬币。

有什么办法可以解决呢？

解：地毯 4 米见方，显然伸手是够不到的。不准勾取、不准踏上地毯，初一看是无法解决的，如果地毯能变小些就好了！

想到这一步，问题就接近解决了：

从某一边开始，将地毯慢慢地卷起来，这样就可以根据要求，亲手取到硬币了。

70.啤酒钱

张伯伯在饭店吃饭，连啤酒共付 10 元钱。饭菜钱比啤酒钱多 4 元。张伯伯喝啤酒花了多少钱？

解：有人会这么做：10 元-4 元=6 元。便说饭菜用 6 元，啤酒用 4 元。可是这样饭菜只比啤酒钱多 2 元了！

正确的做法是：

（10-4）÷2=6÷2=3（元）……………啤酒钱

10-3=7（元）……………………………饭菜钱

或：（10+4）÷2=14÷2=7（元）…………饭菜钱

10-7=3（元）……………………………啤酒钱

71.没有摔伤

某人虽没有特殊本领，可是他从十层大楼的窗户中跳了出来，却没有摔伤。这是怎么回事呢？

解：十层大楼，人人都一下子联想到它有几十米高。但是题目中并没有说明某人是从哪一层的窗户向外跳的。想到这一步，原因便找到了：

某人是从第一层的窗户向外跳的，这样，并不需要特殊技术，自然也不会摔伤。

72.无人让座

五年级二班是个学雷锋先进中队，人人都文明礼貌、助人为乐。一次全班乘汽车外出春游。中途上来一位瘸腿老人，可是全班 35 个同学没有一个起身让座的，这是什么原因？

解：按照常理，少先队员对一个身体不好的老人是应该让座的，更何况事情又发生在学雷锋先进中队里。但是全班 35 人却没有一个起身让座的，着实令人奇怪！

感到奇怪是总认为汽车中已经坐满了人。如果汽车中本来就存在“空位”，队员们还需要让座吗？思路跳到这里，原因便找到了。

73.老鹰叼鸟

树上有 10 只小鸟，被突然出现的老鹰叼走了 1 只，树上还有几只小鸟？

解：若是问剩下的鸟，应有 9 只。问的是树上的鸟，应该是一只也不会有，全部被老鹰吓跑了！

74.锯三角板

一块三角形木板，锯去一个角，还有几个角？

解：三角形板如果锯去一个角，它的角不仅不会减少，还增加了一个角，这与普通的减法可不同。三减去一却变成四了。

75.蛙落水池

一只青蛙掉进了水泥池里，池深 1 米，青蛙每次能跳 0.5 米。它多少次能跳出池来？

解：两个 0.5 米便是 1 米。也许有人会说：两次能跳上来！

这样答是不符合实际的。其实，它永远也跳不上来。

76.海水上涨

一人在轮船的舷梯上，距海面只有 100 厘米。此时海水每 5 分钟上涨 50 厘米。如果他不迅速离开舷梯，半小时后会怎样？

解：半小时后海水上涨了：50 厘米×（30÷5）=300 厘米。此人原来距海面只有 100 厘米。但是，不要忽略“水涨船高”这个因素，他不会被水吞没的。

77.铅坯零件

一个铅坯可以制一个零件，每 6 个零件的下脚料，又可再熔成一个零件坯。现在有 36 个铅坯，共可做几个零件？

解：36 个铅坯除做了 36 个零件外，下脚料仍可做 36÷6=6 个零件。第二次制成的 6 个零件，下脚料仍能做一个零件。所以，36 个铅坯总共可以做的零件是：

$$36+36\div6+6\div6=36+6+1=43\text{（个）}$$

你也是这么想的吗？

78.门牌号码

董尧尧说，他家的门牌号码是个两位数，两个数字的和是 6，两个数的积是两数商的 9 倍。

你能知道他家的门牌号码吗？

解：用尝试的方法便可找到答案。

从“号码是两位数，数字和是 6”，而 6 分解成两个数，只有三种可能：①1，5 ②2，4 ③3，3。再根据“两个数的积是两个数商的 9 倍”来分析三种情况，①与②两种组合都不符合要求，只有第③种组合是适宜的。

所以，董尧尧家的门牌号码是 33。

元元问倩倩：“今年几岁了？”

79.现在几岁

倩倩说：“我 3 年后的岁数是 3 年前岁数的 3 倍，是爸爸告诉我的。”

可是，元元却算不出。你会算吗？

解：倩倩 3 年后的岁数是“现在的岁数+3”，三年前的岁数是“现在的岁数-3”。据此，可以列方程。

设：倩倩今年为 x 岁，则

$$3\times(X-3)=X+3$$

$$3X-9=X+3$$

$$3X-X=3+9$$

$$2X=12$$

$$X=6$$

即：倩倩今年是 6 岁。

80.矿石体积

尧尧在海州的锦屏山上捡到一些小矿石。他想把这些大大小小的矿石体积都算出来。可是这些小矿石一块块都是不规则形体。后来，他竟用一只 500 毫升的量杯把矿石的体积都算出来了。你知道他是怎么做的吗？

解：尧尧先在量杯中注入一些水，记下水的刻度（体积），而后把矿石投进水里，这时水的刻度必然升高。

尧尧用水面升高后的刻度，减去未投矿石前水面的刻度，它们的差，就是投进那块矿石的体积。这样，便可把一块块小矿石的体积都计算出来了。

81.间隔几人

15 位同学排成一列横队，从左边数尧尧是第 10 名，从右边数亮亮是第 10 名。

请你算一算：尧尧和亮亮中间隔着多少人？

解：可以这么想：

从左数，尧尧是第 10 名；从右数，亮亮是第 10 名。10+10=20，可是全部只有 15 人，说明多出的 5 人（20-15）是重复计数了，即，这 5 个人都被数了两次。

要求尧尧和亮亮中间隔着几个人，还应该再从 5 人中将尧尧和亮亮减去。即：

10+10-15-2=3（人）

82.谁献书多

尧尧、亮亮和元元都有一些课外书。尧尧的书比亮亮的书多，亮亮的书比元元的书多，他们各自拿出$\frac{1}{5}$献给班级图书箱。谁献的书最多？

解：因为各人所有的课外书数量是：

尧尧的书＞亮亮的书＞元元的书。

所以，各献出$\frac{1}{5}$后，仍是：

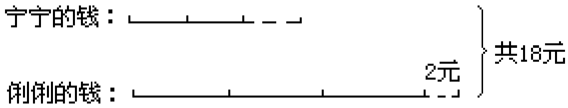
尧尧书的$\frac{1}{5}$＞亮亮书的$\frac{1}{5}$＞元元书的$\frac{1}{5}$。

可知，尧尧献出的书最多。

83.俐俐的钱

宁宁和俐俐两人共有 18 元钱。如果宁宁把自己的钱平均分成 3 份，拿出 1 份给俐俐。那么，俐俐的钱就是宁宁剩下的钱 3 倍还多 2 元。你能知道俐俐原来是多少钱吗？

解：宁宁将钱拿出 1 份给俐俐，俐俐若去掉 2 元，便正好是宁宁剩下钱的 3 倍了。如图：



从总钱数去掉 2 元后，两人的钱正好相当于宁宁剩下钱数的 4 倍（3+1=4）。所以，

宁宁的钱原有：

$$(18-2)\div(3+1)\div\left(1-\frac{1}{3}\right)=16\div4\div\frac{2}{3}=6\text{（元）}$$

俐俐原有的钱是：

18-6=12（元）。

84.牛奶和水

尧尧倒满一杯牛奶。喝了$\frac{1}{6}$后，再倒满水，又喝了一杯的$\frac{1}{3}$，又倒满水后喝了半杯。最后用水加满杯，一次喝干。

尧尧喝的水多还是牛奶多？

解：尧尧喝的水与牛奶的总量其实与怎样喝法没有关系。

因为喝下去的牛奶，总量是一杯；喝下去的水，总量也是一杯。是同样多的。

即都是：

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=1$$

85.什么时间

某人夜里醒后，听到钟声敲了一下，大约过了数十分钟，又敲了一下，再过了数十分钟后，又敲了一下。他家的钟并没有毛病。你能判断第三次敲钟是什么时间吗？

解：自鸣钟报时，都是每隔数秒钟敲一下。可是某人夜里听到的三声敲响，却是相隔数十分钟，他家的钟又没有毛病，这究竟是什么原因呢？

首先断定当时不会是三点，也不会是两点，因为敲钟的间隔不同平常。若是午夜一点半，只有两声，且间隔是 30 分钟，那么第一声是怎么回事呢？对了，是刚醒后听到的，那时正是午夜 12 点半的一响被他听到了。

由此可断定：当时正是 1 时半。

86.喜鹊和麻雀

树上有 4 只喜鹊，还有 5 只麻雀。后来飞走了 5 只。请问：这 5 只中至少有几只麻雀？

解：因为喜鹊总共只有 4 只。假定这 4 只喜鹊全飞走了，那么，5 只中至少要有 1 只麻雀。

87.方阵人数

一队战士排成方阵。战士小王的前、后、左、右，数到他都是第四。你能知道这个方阵总共有多少名战士么？

解：小王的前、后、左、右人数相等，说明他正居方阵正中，数到他是第四，说明他前、后、左、右各有 3 人，连他自己便是 7 人，也即方阵的边长。

可知总共有战士：7×7＝49（人）。

88.董尧尧换书

暑假里，董尧尧拿着一些课外书与同学交换着看。每到一位同学家，就把自己从家里带出的书一半送给同学，这位同学又把自己的书送给尧尧一本。就这样，尧尧到了几位同学家。当他高高兴兴回家时，手里还剩下 2 本书。

想一想，董尧尧开始时从家里拿出多少本书？

解：尧尧回家时拿着的 2 本书，其中 1 本是最后一位同学给他的，另一本是自己从前一家带来的书拿出一半后剩下的。依此追溯上去，可知他开始时从家里拿出的书也是 2 本。

89.打乒乓球

尧尧、亮亮和元元，三人一起练乒乓球。他们约定只玩 1 小时，两两对打，每人玩的时间要相同，请问：他们每人各打多少分钟才合理？

解：因为是双人对打，每人都要打两次，所以约定时间是 1 小时，按一个人计算便是 2 小时了。

每人打的时间一样长短，就是由 3 个人来平分 2 小时的时间。即，

$$60\times2\div3=40\text{（分）}$$

也就是，每人可以打 40 分钟。

90.对时

尧尧一觉醒来，床头的小钟却静止在 5 点上了。他忙上足了发条，可是却不知应该调在几点上，只得到朋友家去看钟点。

朋友家的电子钟是十分准确的。他看了朋友家的钟，回家后稍一计算，便把钟拨准了。

你能知道尧尧是怎样判断和拨准小钟的么？

解：尧尧已经把停钟上足了发条，便可知道钟上的离家时间和回家时间。

到朋友家去，可从朋友家的钟上知道从到达到离开时共耽搁了多少时间。

从离家的全部时间减去在朋友家的全部时间，得出往返路程的时间，只要知道到朋友家单程所用的时间，便可把自己的小钟拨准了。

奇趣游戏

数学游戏是根据数学的法则、规律编制而成的寓学于乐活动资料，内容生动有趣，扑朔迷离。局外人常常苦思不解。揭穿了秘密，却又令人恍然大悟。

数学游戏形式很多。有猜数、猜谜游戏，对奕游戏，演示游戏，等等。

猜数游戏是要对方按规定要求，进行一系列运算。尽管各人开始所写的数各不一样，但结果都在表演者预料之中。

演示游戏是借助必要的工具，如图、表、骰子之类，要对方在规定的器具上选数。表演者的器具是运用一定的数学原理编制而成的，根据对方提供的信息，通过简单的运算，便可猜中对方的所选。

对奕游戏，是两人或多人按照一定的程序，取数或移动棋子，而后决定胜负。

数学游戏，既可娱乐身心，令人兴味盎然，又能活跃思维，增长智慧，从中更可以领悟到数学的无穷妙趣。

1.瞒不住

表演者说：“咱们都做过‘虫蚀算’的题目了，现在请各位任意写一个多位数。”

他的话音刚落，有人说：“写好了！”

“那就请你把这个数的各位数字加起来。”表演者说，“从你写的多位数中减去这个和。在减得的差中，你随便瞒下一个数字，把余下的数字告诉我，我能马上猜出你瞒下了几。这就叫‘瞒不住’。”

大家觉得很玄乎，便纷纷按照要求写数、计算了。

俐俐写的数是：4567923。

按要求计算过程是：

$$4+5+6+7+9+2+3=36$$

$$4567923-36=4567887$$

他将8字瞒了一个，告诉表演者余下的数字是：4、5、6、7、8、7。

只见表演者稍一思索，果断地说：“8字被你瞒了一个。”

众人问：“是么？”

俐俐惊诧地点点头。

接着，玲玲说：“我计算的结果瞒了一个，还剩3、2、4、5、6、7。”

原来玲玲这次写的是：7654321。

计算过程是：

$$7+6+5+4+3+2+1=28$$

$$7654321-28=7654293$$

她颠倒着将数字报了出来，暗暗地瞒下了9。

只见表演者马上回答说：“你瞒下的数字若不是0，必定是9。”

果然瞒不住！

众人奇怪：表演者掌握了什么诀窍呢？

解：任何一个多位数，减去它自身的数字和，所得的差必定是9的倍数。

根据被9整除的数的特征，表演者只要将对方报出的数加起，看所得的和与9的倍数相差几，差数便是被瞒住的数。

如俐俐报出的数是4、5、6、7、8、7，这几个数字和为37，而比37大的9的倍数是45，37比45少8，所以断定被瞒下的数字是8。

玲玲报的数字和是：$3+2+4+5+6+7=27$，27恰是9的倍数，对方若瞒下的不是0，则比27大的9的倍数是36，$36-27=9$，所以，瞒下的非0即9。

2.只抓尾巴

表演者举起一张数字卡片，上面写着“667”。接着说，这是他的“数字侦探”。

众人忙问：“它能侦探什么？”

表演者说：“当然是侦探数字喽！三位以内的自然数，只要尾巴被它接触到，它就侦探出这个数的全部！”

“咱们悄悄地写下一个数，它也能侦探出吗？”有人怀疑地问。

“那当然！”表演者说，“你们尽管写吧，一位数、两位数、三位数都行！”

众人纷纷报告：“写好啦！”

表演者说：“请把写的数与我的秘密侦探667相乘，只要把积的尾数告诉我，抓住了尾巴，各人原先写的数，我便全部知道。”

有人怀疑：咱们写的数千差万别，位数也各不相同，667 能有这么大的神通？

表演者见观众迷惑的神情，忙接着说：“与667相乘，积的位数肯定不少，但是我要的尾数却不多：你写的若是一位数，就只告知我积的最后一位；是两位数的，也只要积的最后两位数；是三位的，只要积的最后三位数。”

表演者刚交待清楚，报数的便此起彼落：

“我的尾数是9！”

“那你写的一定是7。”表演者随口应答。

“我的尾数是82。”

“你写的是46！”

“我的尾数是442。”

“你写的是326！”

……

一问一答，速度快得像爆米花，没有提出不同意见的。

表演者十分自信说：“我的侦探 667，只要抓住一点信息，便能迅速顺藤摸瓜，使全部真相大白，从来没有失误。”

众人不解：667是怎么侦探的呢？

解：$667\times3=2001$，任何三位以内的数与 2001 相乘，积的尾数必定仍是原数。

表演者要求用对方所想的数与667相乘，他只要将对方告知的尾数再乘以3，则必然是原数了！

如对方告知尾数是 9，$9\times3=2\boxed{7}$，可知对方想的数是 7 即 $667\times7=4669$。

3.魔钟

表演者拿着一个自己制作的画在硬纸上的钟面，神秘地说：“别看我这钟面很不起眼，可是，它却是个魔钟！”

“魔钟？怎么个魔法？”众人齐声问。

“这钟面上共有十二个数字，”表演者说，“你在心里随便记一下，我用小杆在数字上点几下，就知道你心里想的数是几。”

大家听了兴趣倍增，都想立即试试。

表演者说：“是这样，我在钟面上点一下，你就把所想的数加上 1，当你加到 20 时，我的小杆必然指在你所想的数上。”

有趣！果真是这样，那真的是魔钟了！大家将信将疑。

“那就试试吧！”表演者将钟面挂在墙上，面露笑容，充满自信。

一位观众在心里默默地记下 11，表演者用小杆在钟面的数字上点点敲敲，如同让小杆与数字对话一般。

最后，正当观众默数到 20 时，表演者的小杆恰巧落在“11”上！

后来众人悄悄地商定默记“4”。

只见表演者又用小杆在钟面上敲点了起来，他每敲点一次，观众就在心里默默地加上 1，从 4 开始，恰加到 20 时，表演者的小杆又落到 4 点上不动了。

众人迷惑不解：真是个魔钟！

解：表面上看，表演者用小杆随意敲点的，实际他是按照一定律指点的。

钟面上只有 12 个数字，要点到 20 为止，则表演者便用 20－12－1＝7。为什么这样呢？因为点数是从对方默记的数开始的，20 便是对方默记的数＋12＋自身重复 1 次的和。

表演者在开始点数时是随意的，当点完了 7 后，便必须从 12 点开始，按逆时针方向点下去，当对方默数到 20 时，表演者的小杆必然落在默记的数上。

如对方默记“4”。表演者随意点 7 次，4＋7＝11，到此，表演者必须从 12 开始，按逆时针顺序往下点。当小杆指到 4 时，自然便是对方所默记的数了。

若对方要求数到 21 为止，则 21－12－1＝8，开始的 8 次可以任意点，到第 9 次，便应从 12 开始按顺序敲点了。

4.你算我取

表演者拿出一副扑克牌。

“哈，要比赛扑克呀？”有人问，“是抓乌龟，还是争上游？”

表演者说：“咱们玩的都是和数学有关系的，不仅可以娱乐身心，还能促进思维、启迪智慧！”

“那就更好啦！怎么玩法？”大家争相询问。

“这么办吧：你们在 A～K13 张牌中任意默记一张。”表演者说话间将扑克交给了观众，“我说算式，你们计算。最后，我便能从这副牌中，将你们默记的那张牌取出来。”

这游戏也挺新鲜。

大家便取出一张“6”默记在心，然后把牌插入，又认真洗了几遍，交给了表演者，忙说：“快取吧，我们记的是哪一张？”

“咱们这个游戏叫‘你算我取’，你们还没算呢！”表演者说，“把你们刚才记的那张牌的点数，乘以 2，加上 3，再乘以 5，最后减去 25。将结果告诉我。”

大家很快在心里算出了结果：

（6×2＋3）×5－25＝50

忙说：“这么算结果得 50！”

表演者听后，胸有成竹地展开了牌，从中检出一张，高高举起。

众人一看，果然是“6”！

重新试了几次，表演者每次都正确地取出对方所默记的牌。真是奇妙！

解：假设对方默记的点数为 x，根据表演者的要求，列成方程是：

$$(2x+3)\times5-25=50$$
$$10x+15-25=50$$
$$10x-10=50$$
$$10x=60$$
$$x=6$$

根据方程式的特点，表演者可以随自己需要，要求对方将默记的数进行加、减、乘、除。如要求对方将默记的点数乘以 8，加上 12，除以 4，再减去 5，则可列方程式：

$$(8x+12)\div4-5=2x+3-5=2x-2$$

这样，假定对方告知你最后的结果是 22，表演者便作如下的运算：（22＋2）÷2＝12。因为这 22 是对方默记数的 2 倍减 2 得到的，再倒推回去，自然便是他们默记的数了！

5.心心相印

表演者仍拿着一副牌，向大家说：“现在不必计算了。你们任意默记一张，就以它作基数，我抽出一张牌，你们就默默地加上 1，我再抽一张，你们又加上 1……这样，我抽了若干张牌后便停止了。奇怪的是，我最后抽出的这张牌竟然与你们默记的那张牌点数相同。--这就叫‘心心相印’”。

表演者说罢，将扑克牌展成扇形，请观众背着他任抽一张。众人抽了张“9”，随即又插进全副牌中，并将牌洗了几次。

表演者说：“现在开始，我从这副牌中拿一张，你们便在基数上加 1……当你们数到‘25’时，请说声‘停’。”

于是，表演者一张一张地抽牌，众人心里默默地往 9 上一个一个地加。

一会儿，众人说：“停！”

这时，只见表演者抽出的一张恰巧是 9 点！

果然心心相印：大家默记的数与表演者最后抽出的数，都是 9 点！

解：到 25 停，就是众人默记的牌点与表演者抽牌张数的和是 25。扑克牌最大的点数是 13。25－13＝12，当表演者抽到 12 张牌时，连同基数的那张牌恰是 13。

到这时，表演者不能再随意地抽牌，必须从 K（13）开始，按逆序数从大到小顺次抽牌，当对方要求停止时，必然抽到点数与对方默记数相同的点数。

6.底牌总和

表演者拿着一副完整的扑克，非常自信地说：“这副扑克，你们可以任意将它分成几堆，我虽然没有看见各堆最底层那张扑克的点数，但是我能将各堆最底层那张牌点数的总和都算出来。”

这简直太神奇了！

众人便取来了全副扑克，动手分牌。

“还有几个问题需要说明。”表演者说，“第一，请把 A、K、Q、J 和大王、小王都当作 1；第二，底牌是几点，便用它作基数，每添一张算加 1，到 10 为止，算作一堆，每堆都是这样堆法；第三，最后要告诉我共分几堆，并把无法成堆的余牌交给我。

众人明白了要求后，便秘密地分牌了。

他们分别以 A、Q、5、4、3、6、7 作为底牌基数，共分成了七堆。最后余下 2、4、9、Q 不能成 10，作为余牌，交给了表演者。

奇怪的是：当表演者知道共分七堆，并接过余牌后，稍做思索，便说：“底牌点数的总和是 27！”

众人随即翻开底牌，逐个累加，果然是 27。

即：A＋Q＋5＋4＋3＋6＋7

＝1＋1＋5＋4＋3＋6＋7

＝27

大家重新分堆，又表演了几次，表演者的答案百发百中。

表演者是怎么知道的呢？

解：按照表演者要求的那样，各堆牌存在一定的规律：每堆的基数增加 1，这一堆的张数便减少 1。例如底牌是 1 的堆是 10 张，底牌是 2 的堆只有 9 张了，底牌是 8 的堆只有 3 张。又因每堆至 10 张为止，增加一堆，底牌总和便增加 11。全副扑克总计 54 张。

由此，可得出计算公式如下：

底牌点数总和＝堆数×11－（54－剩余张数）

＝堆数×11＋剩余张数－54

根据这个公式，题中的算式是：

7×11＋4－54

＝77＋4－54

＝27

7.数字长龙

表演者说：“咱们来搞个数字长龙吧。”接着他交待了方法：“一共需要 11 个人参加写数，第一个人写一个不是 0 的数；第二个人写一个与第一个人不相同的数，也不准写 0；第三个人写的数，必须是他前边两人所写数的和；第四个人写的数，又必须是二、三两人写数的和，以后都按这样的规律，即后一人写的数是他前两人写的数的和，一直到第十一个人为止。”

众人齐声说：“明白了！”

“这样，数字长龙写好后，我只问第一个人和第八个人写的数，便可立即告诉大家：这十一个数的总和来。”表演者补充说。

于是有十一个人，他们秘密地写下了：

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	(11)
4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521

表演者问：“第一个人写的数是多少？”

回答：“4”。

“第八个人写的数是多少？”

对方答：“123！”

表演者立即告诉大家：你们 11 个人写出的数，总和是 1357。

大家似信非信，有的用笔，有的用计算器，进行计算验证，折腾了好一会，果然准确无误！

接着，这 11 个人又重新变换写数，尽管数字排得像长龙，总和不用说就更长了！可是表演者仍然只问第一、第八个人写的数，便立即说出 11 个人写数的总和了！

解：如果把题中的数字转化成式子，第八个数与总和间的关系，便一目了然。

设第一人写的数为 a，第二个人写的数为 b，则 11 个人写的数，便分别为：

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
4	7	11	18	29	47	76
a，	b，	a＋b，	a＋2b，	2a＋3b，	3a＋5b，	5a＋8b，

⑧	⑨	⑩	(11)
123	199	322	521
8a＋13b，	13a＋21b，	21a＋34b，	34a＋55b

相加的结果，十一个数总和为 89a＋143b＝（8a＋13b）×11＋a，其中 8a＋13b 恰好是第八个数，乘以 11 又可以简便计算，因而表演者便很快求出：

123×11＋4＝1353＋4＝1357

8.十问知底

表演者说：“上面是 11 个人写数，只有 11 个数。假如扩大范围，在小于 1024 范围内任想一个数，让你猜，你需多少次才能猜中？”

“这可很难说了，”有人回答说，“把所有的数问遍，需一千零二十四次，准猜中了！”

“那还算什么能耐？”表演者说，“我最多只提十个问题，对方也只需要回答‘是’或‘不是’，便可以了。”

有人想了个“187”，说：“我想好了，允许你问一百次，看能猜中不？”

表演者说：“最多十问，大家可以作证。”

于是问答开始了。

表演者问：“大于 512 么？”

对方答：“不是！”

“大于 128 么？”

“是！”

“大于 192 么？”

“不是！”

“大于 160 么？”

“是！”

“大于 176 么？”

“是”

“大于 184 么？”

“是！”

“大于 188 么？”

“不是！”

“大于 186 么？”

“是！”

表演者大声说：“你想的数在 188 和 186 之间，肯定是 187 了！”

果然没用十问便猜中了！

表演者提的问题，隐含着什么奥妙呢？

解：表演者的问题巧妙地利用了“折半”策略。

1024 连续“折半”的结果是：512、256、128、64、32、16、8、4、2、1 共十个数。

表演者先折半提问，根据对方回答的“是”或“不是”，用加加、减减折半数字，逐步缩小猜数范围。如问：“大于 128 么？”对方答“是”，则在 128 上加它的半数（128＋64＝192）再问，对方答“不是”，则减去 64 的折半（192－32＝160）……这样继续问下去，最后便“水落石出”了！

折半思想，有着重要的应用价值。

例如，某地的地缆线忽然中断了，数千米长的距离，怎么查找故障？

用“折半”思想便很容易解决。查线员先在发生故障地段的 $\frac{1}{2}$ 处进行测量，确定故障在哪一端，在有故障的一端，仍取它的 $\frac{1}{2}$ 处测量……依此检测下去，逐步缩小范围，最多抽查十处，故障的准确位置便可找到了！

9.召之即来

表演者说：“新学期开始，大家都喜欢一些吉祥话语，互相祝贺，是吧？”

众人齐声说：“当然啦！吉利话让人听起来愉快、舒畅！”

“我可以用数学语言把大家喜欢的吉祥语呼唤出来！”表演者说。

有人说：“我想在新的一年里‘万事如意’！你能召来吗？”

“万事如意！好！”表演者说，“数学语言就叫做 3451 吧！”

接着表演者要求：“凡是要求这个祝贺语的人，都把自己年龄告诉俐俐，由俐俐算出大家年龄的和。”

一会儿，俐俐回答：“算好了！”

表演者说：“请男同学将这个和用 3 乘，再加上自己的出生年、月、日数，比如 1982 年 7 月 5 日生，便在年龄和上加 1982、7 和 5，再将自己身高的整厘米数（零头不计）也加上。

“女同学将年龄和用 2 乘，也加上自己的出生年数、月数、日数和身高的整厘米数”。

不一会，各人都说：“也算好啦！”

表演者接着说：“因为数字 9 最大，9 本身就是吉祥数，请各人将自己的得数用 9 乘，最后把积的各位数字加起来，直到得出一位数为止。”

按照要求，俐俐的计算过程是：

1.全部参加人的年龄和是：67 岁。

2.用 2 乘这个和（俐俐是女的），再加自己的出生年月日和身高：

$$67\times2+1983+6+13+143=2279$$

3.乘以 9：$2279\times9=20511$

4.积的各位数字和：$2+0+5+1+1=9$

表演者说：“算好了，我们便请‘万事如意’出来：请各人将得数再乘以 300，加上 751！算好的，请报结果！”

俐俐计算得最快：

$$5.9\times300+751=3451！$$

紧接着，人人都异口同声地说：“得数是 3451！”

于是大家手舞足蹈，高声呼喊：“3451--万事如意！”

解：这仍是根据被 9 整除的数的特征设计出来的。在得出“9”之前的各种运算：年龄和，出生年月日……都是表演者故意设计的迷魂阵，实质是要把得数乘以 9，再求积的数字和。

一旦求出了积的数字和（也必然最终得 9），便可根据需要，随心所欲地安排算式，直至使它得出预定的数字。

如：可以要各人用加得的 9 去除 27000，得到的商再加 451，这样，同样可以得到 3451。

表演者说：“以往每次我们都只猜一个数，现在我来表演一次连猜两个数。”

每次猜一个数已经很不容易，连猜两个数就更玄乎了。可能吗？

只见表演者从容地说：“你们各人可以任写一个比 1 大的一位数。”

话音刚落，众人说：“写好啦！”

“将你写的数减去 1，再乘以 5，再减去 2，再乘以 2。”表演者一句一顿地交待方法。

瑶瑶写的是 9，按要求，他不停地计算：

9－1＝8 8×5＝40 40－2＝38 38×2＝76

表演者接着说：“在得数上再随意加上一个自然数。将结果告诉我。”

瑶瑶加上 4：76＋4＝80，便大声报告：“我的得数是 80！”

表演者沉着地说：“你先写的数是 9，后加的数是 4。”

果然连猜两数！

接着，其他人也报告了结果。尽管各人开始写的数和最后加上的数，都各不相同，但是一个个都被表演者准确地猜中了。

大家非常奇怪，表演者是怎么知道的呢？

解：根据表演者确定的规则，设参加者先后写的两个数为 x 和 y，可列为：

$$[(x-1)\times5-2]\times2+y$$

化简后为：10X－14＋y

其中 x 为十位数，y 为个位数，当对方报出的数加上 14 之后，便恢复了原数。

如对方报出结果是 80，表演者便在心中算出 80＋14＝94，十位数 9 便是原先写的数，个位数 4 便是后加的数。

若对方原先写的是两位数，表演者计算后，个位是其后加的数，剪掉个位，余下的数便是原先写的数。

如对方写 15，依规则，运算过程便是：

15－1＝14 14×5＝70 70－2＝68

68×2＝136 136＋7＝143

表演者的算法是：

143＋14＝157 便知对方后加的数是 7，原先写的数是 15。

11.跳不出的怪圈

表演者在黑板上随意写下了一串数字：

17、20、32、46、51、74、100、240、310……

这些数毫无规律。

接着，表演者说：“我随便在这些数中圈一个，你们谁都别想跳出去。”稍停，他笑着说，“当然罗，我指的是计算！”

大家都在静静地听着。

“现在表演开始！”表演者说，“你们每个人悄悄地写下任一个自然数，再减去一个比它小的任一个自然数，将得到的差乘以 9。”

大家按照他的要求，认真地计算着。只听一片纸笔的沙沙声。

“把乘得的积各数位上的数字加起来，再把得的结果各数位上的数字加起来，直到得出一位数为止。”表演者继续发布指令。

根据要求，俐俐的计算过程是：

78－23＝55　55×9＝495　4＋9＋5＝18　1＋8＝9

元元的计算过程是：

281－198＝83　83×9＝747　7＋4＋7＝181＋8＝9

表演者说：“现在我开始圈数！”说着随手给 100 画了个圈，“请你们将最后得到的数，乘以 8 再加上 28。”

一会儿，大家分别报出了答案。

奇怪的是：尽管原先写出的、减去的自然数各不相同，可是最后的结果却不约而同的都是 100！果然没有一个跳出圈外的！

大家一阵惊讶！

表演者接着说：“请把第一阶段的结果乘以 3，减去 3，这回让谁也跳不出 51！”随手又拿起粉笔将 51 圈了起来。

结果又是无一例外！

此后，表演者又圈了一些数，果真谁也没能跳出圈外！甚至黑板上的那些数让别人胡乱写，但只要被他圈住，并且按照他的要求作一番运算，仍是毫无差错。

表演者究竟用的是什么绝招呢？

解：这套游戏是根据 9 的整除特征设计的。

开始从一个数再任意减去一个数，只是故弄玄虚。将差乘以 9 的积，当然能被 9 整除了。能被 9 整除的数，它各位上的数字和也必定是 9 的倍数，再将和的数字连加，最后得出的一位数必然是 9！

此后的加、减、乘、除是表演者根据圈定的数而随意安排的。如需要结果是 100，既可以 9×8＋28，也可 9×9＋19，还可以要大家用 90 被他们的得数除，而后将商扩大 10 倍，这样便都可以得 100。

12.难凑的和

搞了许多猜数游戏，该换换花样了。

表演者说：“咱们来做凑和游戏吧！先确定一个最高位是 2 的五位数，把它当作和，然后每两人一组，轮流说出五个四位数，使它加起来的和恰是预先确定的那个五位数，能在半分钟内完成的，就算及格。”

“半分钟太短了！”大家说，“你先做给我们瞧瞧！”

表演者也不推辞，并且请俐俐与他做一组。两人商定：预定的和是 27636（最高位是 2，五位数）。

俐俐先说了个“4321”。

表演者说了个“5678”。

俐俐接着说：“6235！”

表演者接着说：“3764”。

又轮到俐俐报数了，可是她直皱眉头，涨红了脸也说不出。谁都知道，这最后一个四位数最为关键，它必须与前面已经报出的四个四位数相加的和是 27636，既不能多，也不能少。俐俐一时难住了。

表演者见状，再不帮俐俐，时间就要超出半分钟了，便随口报了个“7638”！

能行吗？大家将信将疑，便将他俩报的数全部加起来进行检验：

4321＋5678＋6235＋3764＋7638＝27636

果然正确！

可是轮到大家凑和时，才知道难度很大，开始时能随便报数，到最后一个便卡住了，再也快不起来！有的不得不动起纸笔，五分钟也完成不了。

然而，不论是谁，只要与表演者结成一组，几秒钟便完成了，而且准确无误。

这使大家十分惊奇，纷纷问表演者：这么熟练的计算是怎么练成的？

表演者笑着说：“这里面有个诀窍，你们都没有找到。”

究竟是什么诀窍呢？

解：表演者前两次报的数，都与对方报的数合成 9999，这样 9999＋9999＝19998，比 20000 少 2。表演者只要在最后一次凑零头数时多加 2，便可以了。如题中：

（4321＋5678）＋（6235＋3764）＋（7636＋2）

＝9999＋9999＋7636＋2

＝（9999＋9999＋2）＋7636

＝20000＋7636＝27636

13.必居其中

表演者先讲了一个有趣的故事：

大禹治水时，传说，从洛河里爬出一只大乌龟，背上有一些奇妙的红色标记。人们仔细辨认后，才明白原来是一些极有规律的数字：它的纵、横、斜每一列每一行三个数字的和都是 15！真是神奇！

表演者接着说：“中国古书上称这个纵横图为‘洛书’，后来外国人称它为‘幻方’。它果真是变幻莫测，趣味无穷。”

“举例说吧，在这个图中，你任意默记一个数字，只要告诉我，它在 A、B、C 中哪一列，之后，我将数字卡片收起重排，排好后，你再告诉我它在哪一列，最后我再重排一次。这样你默记的数字，必定是正中间的那个数！”

4	9	2
3	5	7
8	1	6

大家觉得很新奇，都急着要试试。

俐俐说：“我默记的数字在 B 列。”俐俐默记了 9。

只见表演者将 C 列的三个数，由下而上收起来，按同样的顺序，又收起了 B 列 A 列。最后将收起的卡片从左向右自上而下，重新排成三行。

俐俐说：“我记的数现在到了 A 列。”

表演者仍按原先的方法，从右向左，自下而上将卡片收起，仍按从左向右自上而下，将卡片重新排好。这一次，他将全部卡片都数字向下，背面向上。然后说：“现在我将正中的卡片翻给你们看，必定是你原先默记的数字！”

俐俐一看，果然是 9！不禁十分惊奇。

接着，又有几个人试验，令人不解的是，不论默记哪个数，经过表演者收了摆，摆了收，最后，默记的数字都“必居其中”！

你能知道其中的奥秘吗？

解：表演者遵循的规则是：

①每次收卡片的次序是自下而上，从右向左，并必须把对方报的列数放在中间，即第二次收取。

②每次放牌的顺序要自上而下，从左向右。

这样经过三次摆放，对方所报的数必然正居中心。因为经过这么摆放，一列中排列的数经过了几次轮回，恰把对方所报的数摆到了中心。 14.每组几枚

表演者拿着一把硬币，高高地扬起说：“每次咱们都是写数、猜数，这次咱们变个花样！”

没等他话音落地，大家便急切地问道：“换什么花样？快说！”

“这么着吧，”表演者说，“我给你们 10 枚硬币，任你们把它分成怎样的两组，我都能猜到每组是几个？”

大家倍觉新奇，忙接过硬币，背着表演者悄悄地将 10 枚硬币分成 6 和 4 两组，便说：“分好啦，你猜吧！”

“别忙！”表演者说，“我还要知道点信息呢！--请把其中一组用 7 乘，另一组用 5 乘，再将两个积相加，把加得的结果告诉我。”

大家也很快悄悄地算好了：

$$6\times7=42 \quad 4\times5=20 \quad 42+20=62$$

便齐声说：“两个积相加得 62。”

只见表演者略一思索，便说：“一组 6 枚，一组 4 枚。”

果然猜中了！

众人又重新分组，并按要求计算出和是 68。

表演者又很快猜出一组是 9，另一组是 1。

当他们又报出：“和是 56。”

表演者又很快猜出：“一组是 3，一组是 7。”

总之，这 10 枚硬币，不论怎么分法，都被表演者准确地猜出了。

请想一想，这是为什么？

解：假定对方分成的两组数，一组是 x 枚，另一组便是（10－x）枚了。

按照要求可列成：$x\times7+(10-x)\times5$

$$=7x+50-5x$$

$$=2x+50$$

这样，只要将对方告知的结果减去 50 后，再除以 2，便求出其中的一组。另一组便迎刃而解了。

如对方告知积的和是 62。

表演者便算出了：

（62－50）÷2＝6（枚）……………………一组数

10－6＝4（枚）……………………………另一组数

15.谜底回家

表演者说：“咱们现在玩个‘谜底回家’的游戏吧！”说罢，请五个人上台。

他先召呼甲，悄悄地对他说：“你任意写一个三位数，而后秘密地交给乙。”

乙将甲交来的纸条展开一看：749，表演者命他紧挨着照写一遍，再交给丙。

于是丙接到了一个六位数：749749。表演者令他将这个数用 7 除，丙照办了。只是担心万一除不尽怎么办？计算以后，恰好整除：

$$749747 \div 7 = 107107$$

丙把商数交给了丁。表演者命他再将交来数用 11 除，结果得：

$$107107 \div 11 = 9737$$

丁又把 9737 交给戊。

表演者又命戊用 13 除。戊问：“除不尽怎么办？”表演者说：“只希望你别算错就行。”

戊只得照办了：

$$9737 \div 13 = 749$$

恰好整除，他的担心又是多余的。

“现在请戊把运算的结果交给甲，请甲辨认一下交来的数是不是自己原来写的那个数。”

谁知当甲接到戊交来的数后，竟目瞪口呆：经过了那么多关卡，转悠了好长时间，交到自己手上的，仍是 749！果然回家了！

紧接着，又重新写数，奇怪的是，尽管相互都是保密的，可是最终落到写数人手中的，仍是最先写的三位数！

这是怎么回事呢？

解：秘密是：$7 \times 11 \times 13 = 1001$

表演者要求第一个人写的是三位数，第二个人又紧挨着再写一遍，这样组成的数前三位数字与后三位是重复的。而任何一个三位数与 1001 相乘，它的积都是六位数，而且积的前三位数字与后三位数字是重复的，恰好符合这一特点。

这样做的实质就是：第一个人写一个三位数，第二个人将它乘以 1001。此后几个分别用 7、11、13 去除，必然还原到最初的三位数。

16.左边右边

表演者拿出一把一分硬币，说：“给你 10 枚硬币，你将它摆成两行，右边的一次只准摆 1 枚，左边的一次只准摆 2 枚，也可以全部摆在一边，但仍必须一个一个或两个两个地摆，每摆一次只要说声‘好’，最后我便知道你左边或右边各是几枚。”

有人接过硬币摆成了：

左边：00\00\

右边：0\0\0\0\0\0\

刚摆完，表演者立即说：“左边你摆 4 枚，右边你摆 6 枚。”

有人又摆成了：

左边：

右边：0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

奇怪的是，尽管表演者没有看到，仍一口说出：“10 枚全部摆在右边。”

解：这里的奥秘是：表演者虽然未见摆放情况，但根据对方说“好”的次数，便可推算出来。因为事前已经规定：每放一次，必须说“好”。

如：对方共说了八次“好”字，假定都放在右边，就有 2 枚×8＝16 枚，这比总数多 6 枚。为什么会多出来 6 枚呢？因为左边每次只准放 1 枚，也当作 2 枚计算了，每次多算 1 枚，在右边放了 6 次才出现这种情况。因而断定右边放 6 枚，这样左边几枚就容易算出了。第二次共说了十个“好”字，所以断定 10 枚全部放在右边。

17.单数双数

表演者说：“不论是谁，不管他手里拿着多少东西，我都猜到他哪只手拿的是单数，哪只手拿的是双数。”

尧尧两手都握着硬币问：“我哪手是单，哪手是双？”

“请将你左手握的数扩大 3 倍”，表演者说，“右手握的数扩大 2 倍，最后将和告诉我！”

尧尧默默地算了一下，说：“和是 49！”

“这就是说，你右手里是双数，左手里是单数！”表演者胸有成竹地说。

尧尧摊开双手--

果然，右手 8 枚，左手 11 枚。

解：表演者的根据是：

奇数×2＝偶数

奇数×3＝奇数

偶数×2＝偶数

偶数×3＝偶数

偶数＋偶数＝偶数

偶数＋奇数＝奇数

规定“左手的数乘 3，右手的数乘以 2”，所以，若两手得数的和是奇数，便断定左手拿的是奇数；若是偶数，则左手拿的必定是双数。

18.给零知整

表演者说：“你任抓一把硬币，连你自己都不知道总数是多少个，我却知道。”

这更神奇了！

媛媛悄悄地抓取一些硬币，问：“你能猜到是多少么？”

表演者又说：“请你将它排成一个正方形的四条边，多余的舍去，不足的补齐。”

媛媛悄悄地将硬币摆成了：

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○　　　　　　　　　　　　　○
○　　　　　　　　　　　　　○
○　　　　　　　　　　　　　○
○　　　　　　　　　　　　　○
○　　　　　　　　　　　　　○
○　　　　　　　　　　　　　○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

“再请你取起三条边，将硬币沿着剩下的一条边，一行一行地排下去，排得与剩下的边个数相等，排满一行再另起一行。”表演者继续说着他的要求。

媛媛按照要求又将硬币排成了。（下图所示）

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

这一切都是背着表演者悄悄进行的。

“有零头么？”表演者问，“若有，请将零头数告诉我。”

“零头数是 4。”媛媛说。

表演者稍一思索：“你的硬币总数是 28 个！”

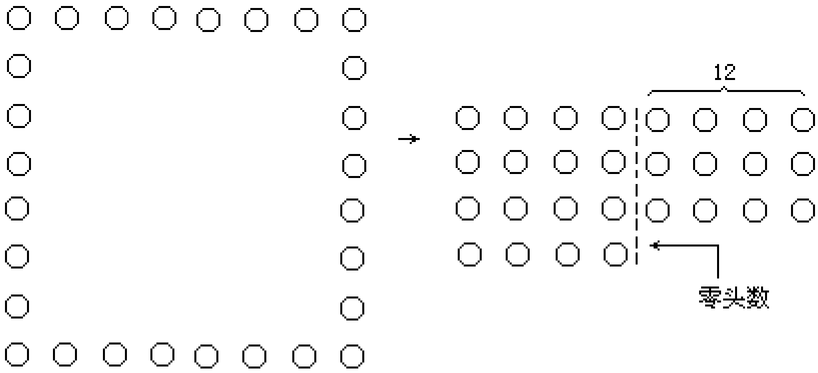
就这样，不论你取多少硬币，最后只将零头数报出来，表演者都准确地知道硬币总数。真是奇妙。

解：表演者的计算公式是：

零头数×4＋12＝总数

如下图。

从图可以看出：任何可以排成正方形的硬币数，再取起沿一边重排，都可以排成三整行，第四行里必定缺少 4 个。



零头数是 4，根据公式得：

4×4＋12＝28（枚）

如果没有零头数，便只能是

0×4＋12＝12（枚）

19.后取难逃

表演者说：“ 把一批硬币放在一起，你们三个人轮流取，尽管我没有看到，但是最后一人取多少，却难逃脱我的预料。 ”

“ 好吧！咱们现在就开始。 ” 有人急不可耐。

“ 我还有话说：①第一个人取走的个数不能超过 11；②第二个取的必须是剩下来的数的十位数与个位数的和；③第三个人取的数不准超过 7。 ”

尽管有这么多的条件，能知道最后的取走多少，也是不容易的。于是大家便三人一组试取起来。表演者自觉地转身不看。

一会儿，一堆约有二、三十枚的硬币每人都取了一次。

“ 谁最后取的？ ” 表演者问。

“ 我！ ” 一人应声回答，并握紧了取币的手。

表演者转过脸，目光扫了一下取剩下的硬币堆，迅即说：“ 你取了 4 枚！”

那人伸开手掌，大家一看果然 4 枚。

表演者根据什么道理猜中的？

解：按照规定的取法，第二个人取后剩下的枚数必定是 9 的倍数。

因为总数是二、三十枚，第一人取后余数只有 20 左右。第二人再取余下数的十位数与个位数的和，任何一个两位数减去它的数字和，余数都是 9 的倍数。这样，当第三人取后，表演者只要瞄一眼堆中剩余的数比 9 的倍数少几，便知道所少的数是被取走的了。

20.抢、让 30

表演者说：“把 30 枚硬币放在一起，咱们轮流取，每次最多可以取 3 枚，最少取 1 枚，也可一次取 2 枚，谁得到最后的一枚，就算取胜。”

奇怪的是不论谁和表演者共同取，却总难取胜。

后来，表演者又做让 30 的游戏，即谁得到最后的一枚，就算失败。

结果，每次表演者都将最后的硬币留给了对方。

其中蕴含着什么奥妙呢？

解：因为 30 是 3 的倍数，要想最后取得硬币，必须保证自己所取的数与对方所取的数和是 3 的倍数。如，对方先取 1，你则取 2，对方取 3，你也取 3……，若表演者先取，就要调整到迫使对方取走“27 数”。

让 30 则相反。

21.弹子告密

表演者拿出 10 个玻璃球说：“你们拿去把它任分两组，这球便会向我告密：甲组几个，乙组几个。”

大家看那些球并没有什么特殊，只是颜色有红、有绿。于是，同学们悄悄地将它们分成 4 个和 6 个两组。便说：“让你的宝贝球告密吧！”

表演者说：“别忙，请把甲组数乘以 8，乙组数乘以 2，将和告诉我。”

大家按照要求，很快地心算出来了：

$$4\times8+6\times2=44$$

便大声说：“和是 44。”

只见表演者口中不停地喃喃着：“红弹子、绿弹子，快告密！”一会儿又说：“知道了，知道了！甲组 4 个，乙组 6 个。”

大家都非常惊诧。又重新作几次分组，表演者仍然猜得准确无误。

玻璃弹子是怎样告密的呢？

解：可用方程求解。

设甲组为 x 个，乙组便是（10－x）个。

根据题意可列如下方程：

$$\begin{aligned} x\cdot8+(10-x)\cdot2&=44\\ 8x+20-2x&=44\\ 6x&=44-20\\ 6x&=24\\ x&=4 \end{aligned}$$

即，甲组 4 个

乙组的个数是：10－4＝6

22.无言有数

表演者手里拿着一叠卡片，笑嘻嘻地说：“每次猜数，结果都是从我嘴里说出来，这一回我让卡片自己说。”

“卡片怎么能说话呢？”大家奇怪地问。

表演者将卡片一张一张亮了出来：“卡片虽然说不出话，它可以用自己身上的数字来表达呀！”

众人聚精会神地看着表演者亮出的一张张卡片：一共 10 张，每张的正面都写了数字：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10。

“我把这些卡片数字向下摆在桌上。”说着，表演者把卡片一张接着一张，在桌上排成了一个横行，“你们把这些卡片，从左端一张一张移到右端。当然罗，不能超过 10 张这个总数，尽管我没有看到你们是怎么移的，我的卡片却能用数字，告诉我你移动的张数。”

表演者讲得神乎其神，大家听得似信非信，难道卡片也长了眼睛？大家迫不及待地跃跃欲试。

于是表演者转过身子，说：“开始吧！”

大家悄悄地把卡片从左端依次向右端移动了 4 张，便说了声：“好啦！”

表演者转过身，口里叨念着：“卡片无言，数在其中。”说着，翻开了左端第二张。

大家一看那卡片上的“4”字，一个个惊得目瞪口呆！

有人怀疑卡片上有暗号，可是每一张大小、颜色，都完全一样，看不出一点差异。

于是众人让他重新摆好，又试了许多次，每一次移动的张数，总是与表演者翻开的卡片上数字相符，卡片用无声的语言说出了移动的张数。

真是玄妙！

解：原来表演者把 10 张卡片排列成：

10、9、1、2、3、4、5、6、7、8

这样，不论对方从左端移几张到右端，表演者只要翻开移动后的卡片左端第二张，卡片上的数字必是被移动的张数。

如移两张到右端后，卡片就排列为 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10，翻开左端第二张，数字便正是“2”字，以此类推。

23.手称扑克

表演者说：“别人称东西用秤，我只用手便可以了。”接着手里拿出一副扑克牌说，“你随便拿出一叠，我只要用手掂一掂，就知道它有多少张。”

谁都知道，一张扑克牌的重量是很轻微的，能用手称出一叠扑克牌的张数，确很玄乎。

众人便急着取过扑克牌，从中随意拿出了一叠。大家悄悄地数了数，共 41 张，便交给了表演者，催促道：“快称称看有多少张吧！”

“别忙！”表演者说，“请把这叠扑克牌张数的十位数字与个位数字相加。从这叠扑克牌中再取出加得数的和的张数，我再称。”

大家又悄悄地按照他的要求算出了：

41，两数字和 4＋1＝5，41－5＝36

而后，将剩余的牌交给了表演者。

只见表演者把扑克牌放在手上轻轻地掂了掂，立即说：“这叠牌共 36 张。”

接着又有几个人，连续按要求取了几次，每一次都被准确地称出了。

真神，大家惊奇极了。

解：因为任何一个自然数减去它的数字和，余下的数都是 9 的倍数。在一副扑克牌中 9 的倍数只有 9，18，27，36 或 45。

表演者根据估计，便很容易地推测出手中牌的张数了。

一个自然数减去它的数字和，为什么余下数一定是 9 的倍数呢？

可作如下证明：

假设从一叠扑克牌中拿出了 ab 张。a 为十位数，b 为个位数，根据规定，可列成下述算式：

$$\begin{aligned} & 10\times a+b-(a+b) \\ =& 10\times a+b-a-b \\ =& 10\times a-a \\ =& 9\times a \end{aligned}$$

最后的余数是 9×a，表明余数一定是 9 的倍数。

24.天才记忆

表演者随手在黑板上写了许多行长长的数字：

①1 1 2 3 5 8 3 1 4 5 9 4 3 7

②2 2 4 6 0 6 6 2 8 0 8 8 6 4

③3 3 6 9 5 4 9 3 2 5 7 2 9 1

④4 4 8 2 0 2 2 4 6 0 6 6 2 8

⑤5 5 0 5 5 0 5 5 0 5 5 0 5 5

⑥6 6 2 8 0 8 8 6 4 0 4 4 8 2

⑦7 7 4 1 5 6 1 7 8 5 3 8 1 9

⑧8 8 6 4 0 4 4 8 2 0 2 2 4 6

⑨9 9 8 7 5 2 7 9 6 5 1 6 7 3

然后说：“这些数，我只是按题号信手写来，现在不论你说哪一题，我都可以立即背出来。”

众人似信非信。共有九道题，每道题的数位都有十四位之多，谁能记得那么多！

于是纷纷提问，当场考验。

有人问第 3 题，表演者确实流利地背出了。

又问第 7 题，仍然背出了。

结果出了九道题，题题都被表演者熟练地背出。

众人惊奇得连声称赞：“真是记忆天才！”

解：原来表演者是按照一定的规律写数的：

每一行的数字，在后面的数总是与它相邻的前两个数的和。如果前两个数的和是两位数，便舍弃十位数，只记下个位数。这样，对方只要说出题号，如第 3 题，表演者便立即可以背出：33695493257291。

25.速算魔块

表演者拿出五枚小小的正方体，每个正方体的每个面都写上各不相同的三位数。它们是：

第一枚：147、345、543、642、741、840

第二枚：459、558、657、756、855、954

第三枚：168、267、366、564、663、960

第四枚：179、278、377、773、872、971

第五枚：186、285、384、483、681、780

表演者说：“将这五枚方块混在一起，不论你如何摇晃，任意抛下后，它的顶上面五个数字和，都可立即得出。”

真能如此，确可称为“魔块”了。因为五枚方块上一共有 30 个三位数，它们任意地排列组合，得到的加法算式便很多很多了。每一道都是五个三位数相加，能迅速得出和来，够神奇了！

于是有人抓起五枚方块，在手中摇晃了一会，又抛在桌上。只见那五枚方块顶面的数分别是：543、657、366、377、384。

“这五个数的和是 2327！”表演者很快答出。

又有人摇出的数是：147、459、168、179、186。

“这五个数的和是 1139！”

有人又摇出了：345、756、663、278、286。

“和是 2228！”表演者仍很快地算出了！速度超过计算器。

什么诀窍呢？

表演者说，他是这么计算的：

先求出各个数的个位数的和，用得数作总和的末两位（若得数是一位数，需在数前补 0），再用 50 减去这个得数，将得到的差作总和的前两位数。因此，很快就算出了总和。

可是，做这样运算的道理是什么呢？

解：认真分析一下五个方块上的数，可发现它们具备以下特征：

1.每个方块上的各个面上的数，中间的一个数都相同。它们分别是：4、5、6、7、8。

2.同一个方块上的各个数，首尾两个数的和也相同，它们分别是：8、13、9、10、7。

根据这个特点，顶面上五个数的和便有规律了。

设顶面五个数的个位数分别为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5，这五个数可以表示为：

第一枚：$100\times(8-x_1)+40+x_1=840-99x_1$

第二枚：$100\times(13-x_2)+50+x_2=1350-99x_2$

第三枚：$100\times(9-x_3)+60+x_3=960-99x_3$

第四枚：$100\times(10-x_4)+70+x_4=1070-99x_4$

第五枚：$100\times(7-x_5)+80+x_5=780-99x_5$

这五个数的和便是：

$S=840+1350+960+1070+780-99\times(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$

$=5000-99\times(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$

设 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=N$ 则

$S=5000-99N=50\times100-100N+N$

$=100(50-N)+N$

其中，N 恰是五个数尾数的和，为总和的末两位数。10050-N），恰是总和的前两位数（百位以上的数）。

因此，表演者的算法是符合算理的。

26.魔阵

表演者拿出一张写满数字的表格（如图），接着神神秘秘地说：“这是我设计好的数字魔阵。在这个魔阵中，你任意圈住几个数字，我闭上眼睛也能说出它们的总和来。”

大家看到图上共有 16 个数字，每次圈四个数，可以有很多很多的组合方法，即使睁着眼也需要计算一会儿才能得出和来呀！他却能闭着眼便知道“和”，真够奇特的了！

34	26	13	17
39	31	18	22
45	37	24	28
28	20	7	11

停了停，他又交待了圈数的方法：

“每圈住一个数，必须把与这个数同行同列的其他数都划去，再在余下的数中圈数，再把圈定的数同行同列的数都划去……，这样，魔阵中最后必然只剩圈住的四个数，这四个数的和，便是可以闭着眼睛告诉大家的。”

于是，有人圈定了下面的几个数：

最后，数阵中只剩下圈住的 26、24、39、11 四个数了。

“圈好了！”几个字刚出口，表演者便脱口而出：“余下这四个数的和是 100！”

果然是闭着眼睛说的！别人在圈数时，他根本就没有看。其中隐藏着什么奥秘呢？

解：原来这个魔阵的数字是按照下表所示的方法制出的。

+	24	16	3	7
10	10+24=34	10+16=26	10+3=13	10+7=17
15	15+24=39	15+16=31	15+3=18	15+7=22
21	21+24=45	21+16=37	21+3=24	21+7=28
4	4+24=28	4+16=20	4+3=7	4+7=11

表上面一行有 24、16、3、7 四个数。左面的一列有 10、15、21、4 四个数，这八个数纵横两两相加，便相应地得到了表中的各个数字。

按照表演者要求的方法所圈定的表中的四个数，都分别是表上纵横八个数两两相加的和，因此，数阵中四个数的和，也就是上表纵横八个数的和。而 24+16+3+7+10+15+21

+4=100，所以表中任意四个数的和也必然是 100，表演者知道这个数阵的特点，当然闭着眼也能说出和来。据此，我们可以制出多种多样的魔阵来。

27.魔窗

表演者拿出两张数字表（如图）和几张挖有窗孔的纸，每张有窗孔的纸都只能看到表上的部分数字，几张窗纸都复在数字表上，最后便只能看到表上的一个数字了。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

数字表			
表一	表二	表三	表四
1	1	1	1
2	2	2	2
3	5	3	5
4	6	4	7
5	9	9	9
6	10	10	11
7	13	11	13
8	14	12	15

表演者说：“你可以暗暗地记住（一）中的任何一个数字，告诉我（二）上哪几张表上有你暗记住的数，我便可以通过魔窗，窥见你所想的那个数。”

人们观察一下这张数字表，共有四行数字，每行都是八个数。每个数都是一个窗口，任意在头脑里暗记一个，对方都能通过魔窗看到自己内心所想的那个数，真新奇！

于是便争相报告：

“我想的数，只有表一、表四里有。”

表演者把几张魔窗放在图一上转动了一会儿，笑着说：“瞧，你想的数是 7。”

“我想的数表一、二、三、四上都有。”

“瞧，你想的是 1！”

“我想的数，表一、二、三、四上都没有！”

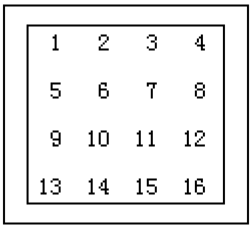
“瞧，你想的是 16！”

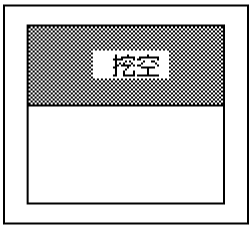
果然不错，任想哪个数，表演者都通过魔窗，准确无误地看到了。

真是神奇奥妙！

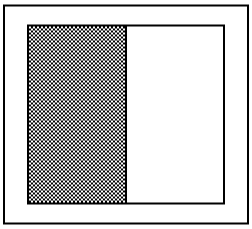
解：魔窗共有四张，它的制法是：

取四张与图一大小相同的厚纸，依照下图挖出窗孔：

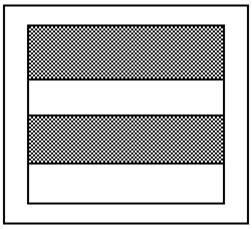




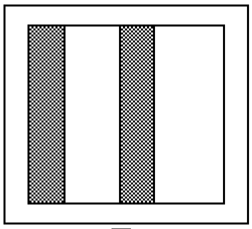
(一)



(二)



(三)



(四)

这样，每张魔窗都遮住数字底片中 16 个数字的一半，露出八个数字。叠两张就露出四个数字，叠三张露出三个数字，四张全叠上就只露出一个数字了。凡是表上有的，就把与表几对应的窗正放，表上没有的，就把与表几对应的魔窗颠倒放。最后露出的就是对方所想的数。

魔窗的原理是二进制计数。

当代的数字电子计算机以及许许多多电气化设备和用品，都是以二进制作基础的。它的理论知识，只有待今后学习高深知识时，才能理解。这种魔窗玩具，实际已是一台小小的最简单的数字计算机了！

28.猜年龄、姓氏

表演者拿出七张卡片，每张卡片上都写满了数字和姓氏（如图）。

表一：

赵 1	孙 3	周 5	郑 7	冯 9	褚 11	蒋 13	韩 15
朱 17	尤 19	何 21	施 23	孔 25	严 27	金 29	陶 31
戚 33	邹 35	柏 37	窦 39	云 41	潘 43	奚 45	彭 47
鲁 49	昌 51	苗 53	花 55	俞 57	袁 59	邦 61	史 63
费 65	岑 67	雷 69	倪 71	滕 73	罗 75	郝 77	安 79
乐 81	时 83	皮 85	齐 87	伍 89	元 91	顾 93	平 95
和 97	肖 99						

表二

钱 2	孙 3	吴 6	郑 7	陈 10	褚 11	沈 14	韩 15
秦 18	尤 19	吕 22	施 23	曹 26	严 27	魏 30	陶 31
谢 34	邹 35	水 38	窦 39	苏 42	潘 43	范 46	彭 47
韦 50	昌 51	凤 54	花 55	任 58	袁 59	鲍 62	史 63
廉 66	岑 67	贺 70	倪 71	殷 74	罗 75	邬 78	安 79
于 82	时 83	卞 86	齐 87	余 90	元 91	孟 94	平 95
穆 98	肖 99						

表三：

李 4	周 5	吴 6	郑 7	卫 12	蒋 13	沈 14	韩 15
许 20	何 21	吕 22	施 23	华 28	金 29	魏 30	陶 31
喻 36	柏 37	水 38	窦 39	葛 44	奚 45	范 46	彭 47
马 5	苗 53	凤 54	花 55	柳 60	邦 61	鲍 62	史 63
薛 68	雷 69	贺 70	倪 71	毕 76	郝 77	邬 78	安 79
傅 84	皮 85	卞 86	齐 87	卜 92	顾 93	孟 94	平 95
尹 100							

表四

王 8	冯 9	陈 10	褚 11	卫 12	蒋 13	沈 14	韩 15
张 24	孔 25	曹 26	严 27	华 28	金 29	魏 30	陶 31
章 40	云 41	苏 42	潘 43	葛 44	奚 45	范 46	彭 47
方 56	俞 57	任 58	袁 59	柳 60	邦 61	鲍 62	史 63
汤 72	滕 73	殷 74	罗 75	毕 76	郝 77	邬 78	安 79
廉 88	伍 89	余 90	元 91	卜 92	顾 93	孟 94	平 95

表五

杨 16	朱 17	秦 18	尤 19	许 20	何 21	吕 22	施 23
张 24	孔 25	曹 26	严 27	华 28	金 29	魏 30	陶 31
郎 48	鲁 49	韦 50	昌 51	马 52	苗 53	凤 54	花 55
方 56	俞 57	任 58	袁 59	柳 60	邦 61	鲍 62	史 63
常 80	乐 81	于 82	时 83	傅 84	皮 85	卞 86	齐 87
廉 88	伍 89	余 90	元 91	卜 92	顾 93	孟 94	平 95

表六：

吴 32	成 33	谢 34	邹 35	喻 36	柏 37	水 38	窦 39
章 40	云 41	苏 42	潘 43	葛 44	奚 45	范 46	彭 47
郎 48	鲁 49	韦 50	昌 51	马 52	苗 53	凤 54	花 55
方 56	俞 57	任 58	袁 59	柳 60	邦 61	鲍 62	史 63
黄 96	和 97	穆 98	肖 99	尹 100			

表七：

唐 64	费 65	廉 66	岑 67	薛 68	雷 69	贺 70	倪 71
汤 72	滕 73	殷 74	罗 75	毕 76	郝 77	邬 78	安 79
常 80	乐 81	于 82	时 83	傅 84	皮 85	卞 86	齐 87
廉 88	伍 89	余 90	元 91	卜 92	顾 93	孟 94	平 95
黄 96	和 97	穆 98	肖 99	尹 100			

表演者说：“任何人只要你的年龄和姓氏在这几张上，我都可以立即猜中。”

他的话音刚落，有人说：“我的年龄在第一张表上。”

“别的表上都没有么？”表演者问。

那人又详细地端详一下，补充说：“第三张、第五张表上也有。”

“凡是表上有的，不能遗漏！”表演者说，“如果你的年龄只在第一、三、五三张表上，那么你的年龄应该是 21 岁。”

果然猜中了！

又有人说；“我的姓在二、三、四、五、七表上有。”

“这就是说，你是孟老夫子的后代了！”

人们接二连三地问，表演者一个个回答，竟然没有一次失误，大家惊奇得目瞪口呆。可是，谁都不了解这奇特的表格里隐藏着的秘密。

解：这几张表也是根据二进制的原理编制成功的。把年龄（姓氏）先变成二进制数字。写在卡片上，就如同把它“存贮”在计算机里。猜年龄时，

“ 有 ”和“ 没有 ”，就等于给计算机一个信号，这个信号计算机将它翻译出来，显示在左上角。只要将左上角的数字加起来，就得到了结果。

例如：表一、三、五有某人的年龄，这三张表左上角的数字分别是 1、4、16，三个数的和为 21，便是被猜者的年龄。猜姓氏的方法也同样如此。

29.阴阳八卦

表演者向大家亮出八张如扑克牌大小的卡片，那上面画着八种不同的符号：

☳ ☱ ☲ ☵ ☴ ☶ ☷ ☰

他说：“这是我国古代的八卦符号，它可以任意代表八种事物，比如：

代表方位：

☳	☱	☲	☵	☴	☶	☷	☰
东	西	南	北	东南	东北	西南	西北

代表动物：

☳	☱	☲	☵	☴	☶	☷	☰
蛇	羊	龟	猪	鸡	虎	牛	马

或表示水果、数字等等，均可以。

不论你想往哪个方向去，或是喜欢哪种动物，我把卡片重排两次，你只要告知我你所想的事物是在上排，还是下排，我都能猜中。”

照这么说，这卡片真神啦！

“让我们试试看！”众人喧嚷着。

表演者将卡片排成如下两行：

☶	☷	☰	☳
虎、东北、3	牛、西南、2	马、西北、1	蛇、东、0
☱	☲	☵	☴
羊、西、7	龟、南、6	猪、北、5	鸡、东南、4

“你喜欢什么？”表演者问。

对方答：“我喜欢的动物，在上排。”

表演者将卡片收起，重新摆成了：

☵	☰	☴	☳
猪、北、5	马、西北、1	鸡、东南、4	蛇、东、0
☱	☶	☲	☷
羊、西、7	虎、东北、3	龟、南、6	牛、西南、2

对方说：“现在在下排。”

表演者又收起卡片，重新排成。

☲	☴	☷	☳
龟、南、6	鸡、东南、4	牛、西南、2	蛇、东、0
☱	☵	☶	☰
羊、西、7	猪、北、5	虎、东北、3	马、西北、1

表演者又问：“现在在哪排？”

对方答：“还在上排！”

表演者立即说：“你喜欢的动物是牛！”

对方连连点头称“是”。

此后，有人暗记数字的，有人暗记方位的，表演者都能一一猜中，真是妙极了！

解：这个游戏的原理也是二进制。

它的诀窍是：

1.凡在上排都算“0”，凡在下排都算“1”。这样，上下两排就可用 0 和 1 代替了。

2.对方第一次讲的排数乘以 4，即，在上排是 0×4，在下排是 1×4。第二次讲的乘以 2，在上排用 0×2，在下排用 1×2。第三次讲的乘以 1，最后将三个积加起来，得数便是对方默记的数。

如题中对方喜欢的动物，重排后分别在上、下、上，列为算式是：

第一次在上排：0×4=0

第二次在下排：1×2=2

第三次在上排：0×1=0

三次相加的和是：0+2+0=2

八种符号中，“≡≡”，序数为 2，代表“牛”。

要注意：收卡片顺序是：↑↘↑↘↑↘↑，放卡片顺序是：

← ← ← ←

← ← ← ←。

30.出生年月

表演者说：“ 我不仅能知道各位的年龄，还能算出生月份。 ”

有人问：“ 你能猜出我是哪月出生的吗？ ”

“ 请将你的年龄用 5 乘，再加 6，得数再乘以 20，再把出生月份加上去，最后减去 365。 ”表演者交待了要求。

那人算了一会说：“ 最后得数是 764！ ”

表演者略一思索，说：“ 你今年 10 岁，9 月份出生！ ”

那位小朋友连声说：“ 不错，不错，我今年刚刚过了十岁生日。 ”

众人非常惊奇。

接着猜了许多人，一个个都被猜中了。

表演者是根据什么猜的呢？

解：根据表演者提出的要求，列成算式是：

（年龄×5+6）×20+月份-365

将此式化简后，得：

年龄×100+月份-245

认真分析一下这个算式，可知，百位以上的数是年龄数。十位、个位数便是出生月份，但必须加 245，才能还原。因为式中的“ -365 ”只是个迷魂阵而已！

如上例：

（10×5+6）×20+9-365

=56×20+9-365

=764

764+245=1009

表演者将对方告知的得数 764，再暗暗地加上 245，得 1009，百位前是 10，便知对方为 10 岁，十位、个位是 9，便知对方为 9 月生。

31.出生日期

表演者说：“不论谁，只要按我的要求做，我可以具体猜到他的出生日期。”

有人急不可耐，忙问：“什么要求？快说。”

“好！”表演者说，“①将出生的月份乘以 100，再把出生的日期加上去；②将得数乘以 2，再加 8；③再将得数乘以 5，加上 4；④再将得数乘以 10，加上 4；⑤再加上你的岁数，最后减去 444。”

亮亮按照要求算了好一会儿，说：“最后得数是 121311，你知道我是哪月哪日生的？”

表演者不假思索地说：“你 11 岁，12 月 13 日生。”

众人奇怪，他是怎么猜中的呢？为什么要经过那么多的运算呢？

解：根据表演者的要求，列成算式是：

｛［（月份×100+日期）×2+8］×5+4｝×10+4+岁数-444

化简后为：10000 月+100 日+岁数

这个算式表明：

对方告知的计算结果，万位以前数是出生月份，百位以前万位以后的数是出生日期，十位和个位上的数是年龄数。因此，表演者可以迅速猜出。

32.对分得奖

表演者拿出一张牛皮纸，上面写着：

总分	100分	95分	90分	85分	65分	60分	55分	50分
奖品	袖珍收音机	高级钢笔	文具盒	洗头膏	香皂	彩卷	计算器	手表
玩法	1、记分卡共20枚，5分、10分各十枚。 2、记分卡反放，每次任摸10枚，总分在上列分数中的，得与该分数对应的奖品。 3、参加摸奖者每次付钱5角。							

表演者说：“这个游戏，在车站、街旁、旅游点经常见到。现在我作摊主，各位也来试试如何？”

众人仔细地端详了得分表，20 枚卡片，每次摸 10 枚，共可拼得十个分数，表上所缺的只是 70、75、80 三个分数，即 70%的分数都在表上，应该是赢的机会大得多，而且只要赢得最差的奖品，也比付出的 5 角钱贵得多。于是个个蠢蠢欲动。

说也奇怪，连续十几个人参加摸奖，摸到的十张卡片分数和，大多是表上没有的三个分数。摆在边缘的高额奖品，没有一个人能得到。

究竟什么原因呢？谁也搞不清。

解：摸 10 枚卡片总分可能性最多的是 70、75、80（这个道理是高中数学中“排列组合”）。可是这三个分数恰恰被去掉了。

十枚卡片的总分和为 100 或 50 的奖品最高，然而可能性却微乎其微！

以摸得总分和为 100 为例，需连摸十个都是 10 分的。假定摸第 1 枚是10分，可能为$\frac{10}{20}$，再摸第二枚是10分的可能性只有$\frac{9}{19}$，第三枚也是10分可能性只有$\frac{8}{18}$……以此类推，连摸十个都是10分的可能性只有：

$$\frac{10}{20}\times\frac{9}{19}\times\frac{8}{18}\times\frac{7}{17}\times\frac{6}{16}\times\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{184756}$$

瞧，可能性近于二十万分之一！也即连摸二十万次才有希望摸到一次总分是 100 分的。以每次 0.5 元计，需花 10 万元才有可能得到一只袖珍收音机。

同样，通过计算，得到其他各分数的可能性是：

（95分与55分） $=\frac{100}{184756}$ **约二千分之一**

（90分与60分） $=\frac{2025}{184756}$ **约九十分之一**

（85分与65分） $=\frac{14400}{184756}$ **约十三分之一**

（80分与70分 $=\frac{44100}{184756}$ **约四分之一**

（75分） $=\frac{63504}{184756}$ **约三分之一**

由此，其中的奥妙便不言而喻了！

33.摸球兑奖

“摸球兑奖也是在街道、车站经常看到的一种游戏。”说着表演者拿出一只装有 16 枚红、绿各半玻璃球的布袋和一张画着兑奖图的纸：

兑奖图	○○○○○○○○	●○○○○○○○	●●○○○○○○	●●●○○○○○	●●●●○○○○	●●●●●○○○	●●●●●●○○	●●●●●●●○	●●●●●●●●
奖品	收音机	电子表	香皂	毛笔	买圆珠笔3元一支	毛笔	香皂	电子表	收音机

这个游戏不收参加费，但是摸的玻璃球若与正中间的图相同，则需买一支 3 元钱的圆珠笔。摸其他各图，则可得与图对应的奖品。

令人奇怪的是：参加的人大多是花钱买笔，而那支圆珠笔的实际价值连 2 元都不足。

你能解释是什么原因吗？

解：这个游戏的原理与“对分得奖”类似。

因为从 16 枚红、绿各半的玻璃球中，任意摸出 8 枚，可能性最大的仍是红、绿各半，而这恰恰是对应着“花 3 元钱买 1 支圆珠笔”一栏。

其他各栏，由中心向两旁，摸到如图所示的红、绿球个数，则可能性愈来愈小。尽管两旁的奖品十分丰厚，参与者也只能望而兴叹了。所以，结果总是多数人花高价买一支圆珠笔。

34.抽牌数数

表演者又拿出了另一张纸，说：“这是我在集市上常看到的一种游戏。”接着他介绍了游戏的玩法。

摊主面前摆着一张纸，上面写满数字和奖金：

参加的人不必交钱，告知正数（顺时针方向）或是反数（逆时针方向）后，便可从摊主的整副扑克牌中任抽两张。若抽得的两张是司令，先奖 6 元，再重抽。将抽得两张牌的点数和对应表上的数字为起点，按顺数或逆数，数到和数的格子，最后依终止格标数，决定奖罚。如抽得 7 和 K（K 作 13），点数和为 20，若之前确定正数，就以 20 作起点顺数，终止在“15”格内，便可根据表内预定的数字，获奖 1 元。若之前确定反数的，则终止于“罚”格，将被罚 3 元。也有的规定：抽单数正数、抽双数反数。

表面上看，表上共有 26 个格子，有 25 个格子是有奖的，只有一个“罚”格，获奖的机会大着呢！而且又不用交参加费。万一受罚，仅仅 3 元，可是奖额至少是 1 元，多的达 6 元。有这样的便宜，何乐不为？

可是一旦参加了，才知道高额奖的机会实在太少，而“罚”字虽然只有一个，却常常把你盯住！

许多人坠入其中，却苦思不解，一而再，再而三地掏钱给摊主。不悔悟自己的无知，却埋怨自己运气不佳。

你们说，真是运气不济，还是数学开的玩笑呢？

解：其实，这是运用数学原理精心设计的表格。

表面上看，25 个数字中，能得奖的，正反数共有 26 次机会，受罚的只有 24 次，得奖的次数高于受罚次数。但是若抽得两张牌点数和是 14，则不论正数、反数，均逃不脱受罚（若按单数正数，偶数反数，则几乎均落入“罚”格）。挨罚一次是 3 元，得奖的只能得 1 元。三次得奖才抵上一次受罚。至于那些高额奖金根本就得不到。

至于抽牌得奖，其机会是极小极小的。因为全副扑克牌是 54 张，抽一张司令的机会是 $\frac{1}{54}$，再抽第二张司令，机会只有 $\frac{1}{53}$。

所以抽两张都是司令的机会是：

$$\frac{1}{54}\times\frac{1}{53}=\frac{1}{2862}$$

这就是说，连续抽近 3000 次，才有可能抽到一次是两张司令。

所以参加这种游戏的人，不可能占到便宜，而摆摊设点的人，却总是有利可图。

35.打弹子

“打弹子也是街头常见的游戏。”表演者说着还画出了图，“它是一个前面为玻璃，后面为钉子板的木箱子。箱顶有个开口，可容玻璃弹子通过，钉子板上的钉子间隙也可容玻璃弹子通过。箱底是一个个用木板隔开的小格子，格内摆放着各种奖品。奖品从中间向两旁逐渐丰厚。参加的人，用 2 角钱就可以得一次投弹机会。弹子从箱口投入，落入箱底的格子里，便可得到格内的奖品。但是，奇怪的是两边丰厚的奖品却很少有人得到。”

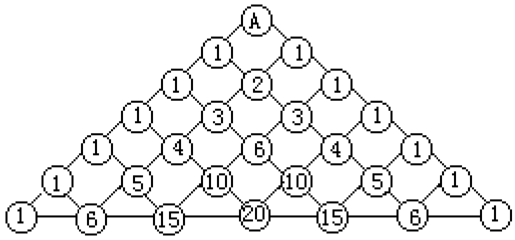
你能解释其中的原因么？

解：这个游戏的理论根据是高中数学中的杨辉三角。但是理解并不困难。

弹子的行进路线由于受钉子的制约，可作下图为示。

从图中可清楚的看出：

弹子到达箱底的路线，从中间向两边，愈来愈少，也即弹子落入中间的机会多，而落入两边的机会少。再加上弹子的入口处在箱顶中间，也即三角形的顶部，下落时，由于重力的作用，落入两边的可能性就更小，而比较丰厚的奖品都分布在箱子的两边，所以中彩的机会必然很少。



图形变幻

图形的变化也如万花筒。

看似平常的图形，常常变出奇妙；看似无序的东西，却隐含一定的规律。

从证明公式到巧妙计算，你将品味到敏捷、灵巧的思维妙趣。

从黄金分割到数线段、数角、数长方形、正方形……你将看到无序中的有序。

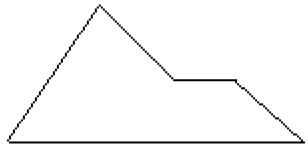
桌面与硬币、线的不同组合，图形的静态与动态，又显示了视觉的迷幻！

图形的分解、组合、计算，真是趣味无穷！

但，这需要一双善于发现的眼睛和一个灵活运转的头脑。

1.狮身人面图

古埃及有狮身人面兽，它的外部轮廓如下图：

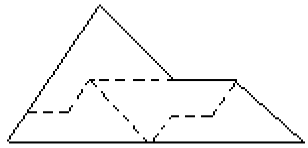


这是一个谜一般的趣图，可以将它作多种有趣的分解，是一道世界著名的智力名题。

现在要求将它分成四等份，每一等份的本身也是一个形状相同、大小相等的“狮身人面图”。

应该怎么分解？

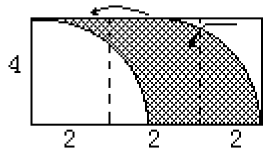
解：下面的分解可供参考：



2.半枚柳叶

尧尧拾到半枚弯弯的柳叶，放在一个长方形的纸片上，恰好可分成三等份（如图，单位：厘米），他竟想出计算柳叶面积的方法了。

你知道他是怎么算的么？



解：认真看图，拼移后，可知空白部分的面积之和正好是边长为 4 的正方形面积。求出长方形的面积减去空白部分的正方形面积，余下的阴影部分就是这半枚柳叶的面积。

解法 1：

（2×3）×4-4×4

=6×4-4×4

=24-16

=8（平方厘米）

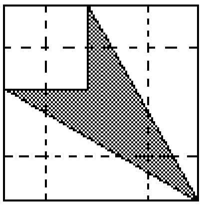
解法 2：还可移动阴影拼成长方形。如箭头所指。

4×2=8（平方厘米）

即：这半枚柳叶的面积为 8 平方厘米。

3. 飞镖面积

在一个面积是 16 平方厘米的正方形中，画着一个飞镖的图形。飞镖是个不规则图形，但是它的面积也是可求的。



你会解答吗？

解：只要认真观察一下，其实很简单：

飞镖的面积=正方形面积-（A＋B＋C）

=16 平方厘米-（A＋B＋C）

其中：A=4 平方厘米

B＝C=4 平方厘米

∴飞镖面积=16-4×3

=16-12

=4（平方厘米）

4.分割黄金

有两条大小相等、形状相同的黄金，按下面的要求，将每一条都截割成两部分：一条割下它的 0.618 倍，另一条割下它的（0.618）^{2}倍。

你知道将两条割下的部分放在一起，将剩余的部分也放在一起，将是一种什么样的美妙状况？

解：设每条黄金的长度都为 x，则：

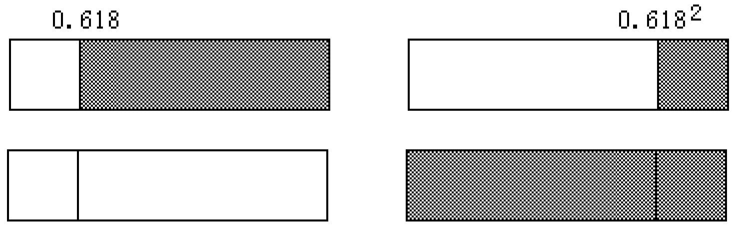
$x=0.618x+(0.618)^2x$

$=0.618x+(0.618\times0.618)x$

$=0.618\cdot(1+0.618)x$

$=0.999924x$

由此可见，将每条割下的部分放在一起，也相当于一整条黄金。（如图）



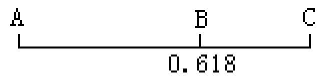
这种分割黄金的方法，在几何学中有个专用名称，叫做“黄金分割”。

“黄金分割”可以表达为：

将一条线段分成两段，使较长的线段成为较短线段与整条线段的比例中项。这时较短线段与较长线段的比，称为“黄金比”，而 0.618 便被称作“黄金分割点”。

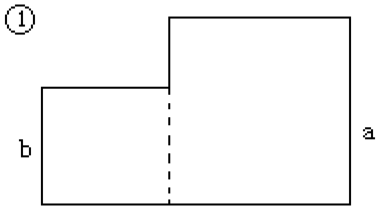
上图中，BC：AC=AC：AB

0.618 被称为“美的数”，因为“黄金比”能给人和谐协调的美感。



5.变出奇妙

有两个面积不等的正方形，它们的边长分别为 a、b，若把它剪成三块，拼成一个正方形，却可得到一个公式。应该如何剪拼？

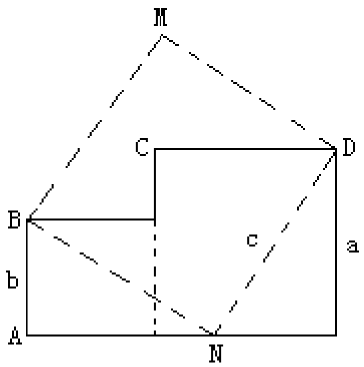


解：用下述方法，便可剪成一个新的正方形：

在 AE 边上截 AN=a，连接 BN、DN，再作通过 B 点垂直于 BN 的直线，通过 D 点垂直于 DN 的垂线，两线相交于 M，则正方形 BNDM 与原来两个正方形面积相等，又恰将原两个组合正方形剪成了三块。

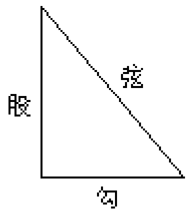
因为原来的两个正方形边长分别为 a、b，则它们的面积便是 a^2+b^2。

设新拼的正方形边长为 c，则它的面积便是 c^2。



这就是说：$c^2=a^2+b^2$

这个等式，恰是三角形的“勾股定理”！



中国古代，把直角三角形的斜边称为“弦”，两个直角边长者叫“股”，短者叫“勾”。

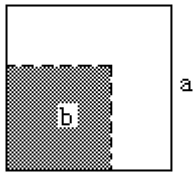
“勾股定理”可以叙述为：在直角三角形中，斜边（弦）的平方等于两直角边（勾、股）平方的和。

上述拼图恰证明了这个原理的正确性。

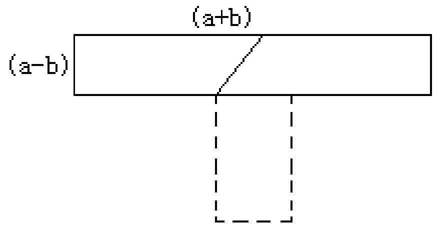
6.平方差公式

两个数的平方差等于这两个数的和与它们的差的积，这便是平方差公式。

下图是边长为 a 的正方形，从中剪下了一个边长为 b 的正方形。怎样把剩余部分剪开再拼成一个长方形，来证明平方差公式的正确性。



解：剩余部分的面积，是大正方形减去小正方形面积，列为算式恰是：a^2-b^2 剩余部分若从斜对角剪开，可以拼成一个长方形。长是 a+b，宽是 a－b，这个长方形的面积便是：（a＋b）（a－b）



这就表明：

剩余部分面积$=a^2-b^2$

$=(a+b)(a-b)$

也即：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

可以任举两个数代入公式，再验证一下：

如：$76^2-24^2=(76+24)(76-24)$

$=100\times 52$

$=5200$

用普通算法就显得太麻烦：

$76^2-24^2=76\times 76-24\times 24$

$=5776-576$

$=5200$

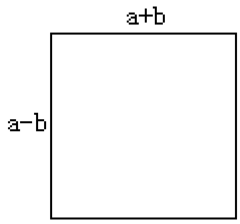
这个公式在中学数学中还要详细讲述，它的用途很广泛。

7.两数和的平方

两数和的平方公式可表达为：

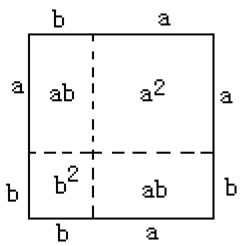
$$(a+b)^{2}={}^{a}2+2ab+b^{2}$$

它的知识是在中学数学中才学到的。但是与平方差公式一样，其实并不难。



下图是边长为（a+b）的正方形，如果把它剪成四块，同样可以证明这个公式的正确性。

解：将正方形按下面的方法剪成四块，算出每块的面积来，再比较一下，它们的面积和与原来正方形面积间的关系，便可证明公式是正确的。



原正方形的面积=$(a+b)^2$

剪开后变成两个长方形、两个正方形，它们的面积和为：

$$a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

这就是说：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

用这个公式可以简化某些运算。如：

$203^2=(200+3)^2$

$=200^2+2\times200\times3+3^2$

$=40000+1200+9$

$=41209$

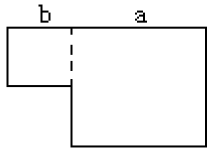
8.两数差的平方

两数差的平方公式是：

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

这个公式用图形来证明，也一目了然。

右图是两个正方形。把它剪成三块，算它的面积和，便可证明。



但是，这三块应该如何剪呢？

解：将原图按下图的虚线剪开成三块，便可以证明两数差的平方公式是正确的。

图中：

A 部分面积=ab

B 部分面积=ab

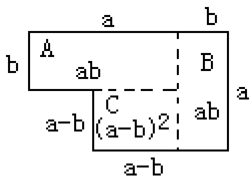
C 部分面积=$(a-b)(a-b)=(a-b)^2$

三部分面积的和=$(a-b)^2+2ab$

三部分面积和恰是原图面积。

原图面积是：a^2+b^2

所以，$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$



$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

例如：$299^2=(300-1)^2$

$=300^2-2\times300\times1+1^2$

$=90000-600+1$

$=89401$

9.扩建鱼塘

岗埠农场原有一个正方形鱼塘，鱼塘的四角都有重要建筑物，不能损坏。可是为了扩大生产发展经营，必须把鱼塘的面积扩大一倍。经过周密设计，不仅保存了四角的建筑，还使鱼塘仍保持正方形。

他们是怎样设计的呢？

解：他们把正方形的摆放方向调换了一下，使扩建后的正方形四个角在原正方形的对边上（如图）。

这样，原正方形的四个角，分别成为改建后正方形四条边的中点，面积正好扩大了一倍。

10.数线段

两点之间的直线叫做线段。

在下图的 AF 中，还有 B、C、D、E 各点，它们每两点中的连线都是线段。

数一数，图中共有多少条线段？

解：这类题目，如果没有掌握一定的规律，在数数的过程中，很容易重复或遗漏。因此，必须按序进行。上图中：

以 A 为出发点有：AB、AC、AD、AE、AF 共 5 条。

以 B 为出发点有：BC、BD、BE、BF 共 4 条。

以 C 为出发点有：CD、CE、CF 共 3 条。

以 D 为出发点有：DE、DF 共 2 条。

以 E 为出发点有：EF 只 1 条。

线段的总数是：

5+4＋3＋2+1=15（条）

上述线段上共有 A、B、C、D、E、F 六个点，若点数越多，所含线段总数也越多：它们都是从 1 开始的几个连续自然数的和，其中最大的一个加数，是线段上总点数减 1。找到了最大的一个加数，算式便容易列出了。

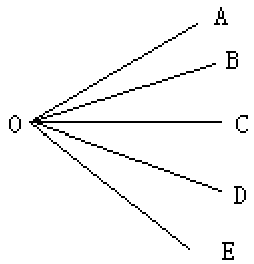
由此可见，如果一条长线段上有 n 个点，则它含有的线段总条数为：

（n-1）＋（n-2）+（n-3）＋……＋3＋2+1

11.数角

从一点引出的两条射线组成的图形叫做角。

请你数一数，下图中一共构成了多少个角？



解：数角与数线段一样，要做到不重复不遗漏，也必须按照一定的程序。

我们从数线段的规律中，得到启示：线段总数与线段上的点数有关；角的总数与角的边数有关。而且，每两点可联成一条线段，每两条边也可构成一个角。由此可知：角的总数也是从 1 开始的几个连续自然数的和，其中最大的一个加数比总边数少 1。

本题共有 5 条边，因此，连续的几个自然数中最大的一个是 5-1=4。这样，图中含角的总数便是：

4＋3＋2＋1=10（个）。

12.数长方形

长方形的构成必须有长和宽，下图中有许多个长方形，你能数出它是多少个吗？

解：因为长方形的构成与长的线段数有关，也与宽的线段数也有关，所以数长方形的个数必须要看长与宽两个因素。

上图中长有 6 条线段，即：3＋2＋1=6

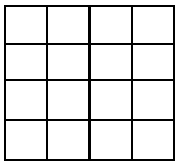
宽边上有 3 条线段，即：2+1=3

因此，长方形的总个数便有：6×3=18（个）

如果图中长边上有 m 条线段，宽边上有 n 条线段，那么，这个图中长方形的总数便是 m·n 个。

13.数正方形

数一数，下图中一共有多少个正方形？



解：图中边长为 4 的正方形 1 个
边长为 3 的正方形 4 个
边长为 2 的正方形 9 个
边长为 1 的正方形有 16 个
总共有正方形是：

$$1+4+9+16=30\text{（个）}$$

解题的规律是：

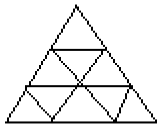
$$1^2+2^2+3^2+4^2=1+4+9+16=30\text{（个）。}$$

14.数三角形

数三角形比数长方形、正方形显得复杂。随着构图形式的变化，难度也更大。

（1）下图中共有多少个三角形？

解：我们把图中最短的线段称为“一个单位长度”，这样按



序数下去：

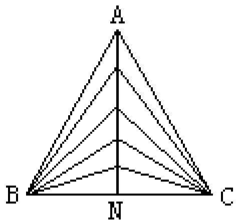
①以一个单位长度为边的三角形有：正 6 个，倒 3 个，共 9 个。

②以两个单位长度为边的三角形有 3 个。

③以三个单位长度为边的三角形有 1 个。

全图总共有 9+3+1=13 个三角形。

（2）数数下图共有多少个三角形？



解：①AN 边线段的总数有：

6＋5＋4＋3＋2＋1=6×（6＋1）÷2=21（条）

②以 21 条线段各为一边可构成三角形：

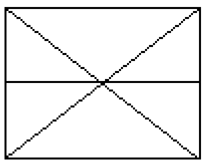
21×2=42（个）

③以 AC 为一边可构成三角形有 6 个。

④图中的三角形总数有：

42＋6-48（个）

（3）下面的正方形中，共有多少个三角形？



解：①以正方形一边为三角形的共有 4 个。

②以正方形对角线为一边的三角形共有 4 个。

③以正方形边长古为一边的三角形共有 8 个。

图形中三角形的总数是：

4＋4＋8=16（个）

15、巧算方中圆

把一个边长 8 厘米的正方形，剪成一个最大的圆。

你知道剪去部分与正方形面积间存在什么样的特定关系？

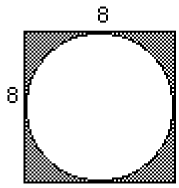
解：我们可以先算出它们的面积：

正方形的面积是：

$$8\times8=64\text{（平方厘米）}$$

圆的直径与正方形边长相等，所以圆面积是：

$$(8\div2)^2\times3.14=50.24\text{（平方厘米）}$$



剪去部分面积是：

$$64-50.24=13.76\text{（平方厘米）}$$

剪去部分与正方形面积比较：

$$13.76\div64=0.215=21.5\%$$

21.5%是个固定的数。不论正方形大小，只要在其中剪一个最大的圆，剪去部分的面积都是正方形面积的 21.5%！

这种特定的关系，可以证明如下：

设正方形边长为 a，则剪去部分的面积是：

$$a^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-\pi\cdot\frac{a^2}{4}=a^2-\frac{\pi a^2}{4}$$

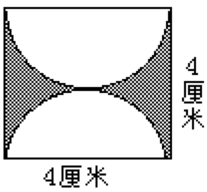
剪去部分的面积占正方形面积的百分比是：

$$\frac{a^2-\pi a^2}{4}=\frac{a^2-a^2\cdot\dfrac{\pi}{4}}{a^2}=\frac{a^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)}{a^2}$$

$$=1-\frac{\pi}{4}\approx1-0.785=21.5\%$$

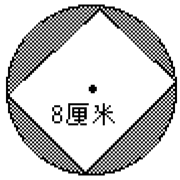
利用这个数据可以简化运算。如，求上图中阴影部分面积，可以直接运算：

$$4\times4\times21.5\%=3.44\text{（平方厘米）}$$



16.巧算圆中方

在一个直径 8 厘米的圆内剪一个最大的正方形。



你知道剪去的部分与正方形面积间存在怎样的特定关系？

解：先求出正方形和圆的面积。

圆的面积是：

$$(8\div2)^2\times3.14=50.24\text{（平方厘米）}$$

正方形的面积是两个以直径为底、半径为高的三角形面积的和：

$$8\times\frac{8}{2}\div2\times2=32\text{（平方厘米）}$$

剪去部分面积是：

$$50.24-32=18.24\text{（平方厘米）}$$

剪去部分与正方形面积比较：

$$18.24\div32=0.57=57\%$$

57%是一个固定的数，不论圆的大小，只要在其中剪一个最大的正方形，剪掉部分面积都是正方形面积的 57%。

这种特定的关系，也可以证明如下：

设圆的半径为 r，则剪去部分面积是：

$$\pi r^2-2r\cdot r\div2\times2=\pi r^2-2r^2$$

剪去部分占正方形面积的百分比是：

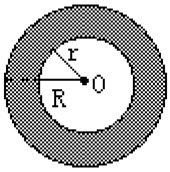
$$\frac{\pi r^2-2r^2}{2r^2}=\frac{(\pi-2)r^2}{2r^2}=\frac{\pi-2}{2}=\frac{1.14}{2}=57\%$$

利用这个特定关系，可直接求上图阴影部分面积：

$$(4\times4/2\div2\times2)\times57\%$$
$$=8\times57\%$$
$$=4.56\text{（平方厘米）}$$

17.圆环的面积

一个垫圈，外圆半径是 4 厘米，内圆半径是 3 厘米，圆环的面积是多少？



解：求圆环的面积，只要用外圆的面积减去内圆的面积，便可求得。

我们还可推导出更简便的算法：

设大圆半径为 R，小圆半径为 r，圆环的面积是：

$$\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)$$

按照这个公式，上述圆环的面积是：

3.14×（4+3）×（4-3）

=3.14×7

=21.98（平方厘米）

如果把圆环剪开、伸直，则近似于梯形，上底是内圆周长，下底是外圆周长，梯形的高恰似两半径的差，因此，还可以把圆环当作梯形来计算：

$$(2\pi r+2\pi R)\times(R-r)\div 2$$

$$=2\pi\times(R+r)\times(R-r)\div 2$$

$$=\pi\times(R+r)\times(R-r)$$

按照这个公式，上题也可以解为：

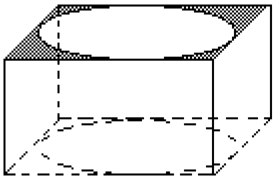
3.14×（4+3）×（4-3）

=3.14×7

=21.98（平方厘米）

18.方内柱

一个棱长为 4 分米的正方体木料，将它削成一个最大的圆柱体，削去的部分与正方体的体积间存在怎样的特定关系？



解：设正方体棱长为 a，则

正方体的体积为：$a \cdot a \cdot a = a^3$

圆柱的体积为：$\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{4}$

削去的部分的体积是：$a^3 - \frac{\pi a^3}{4} = a^3 - a^3 \cdot \frac{\pi}{4} = a^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

削去部分体积与正方体体积比较：

$$\frac{a^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{a^3} = 1 - \frac{\pi}{4} = 1 - 0.785 = 21.5\%$$

21.5%是个固定的数，不论正方体大小，只要把它削成最大的圆柱体，那么削去部分的体积总是占正方体体积的 21.5%，由此也可知圆柱的体积是正方体的 78.5%。

据此，上题可解为：

$$4^3 \times 21.5\% = 64 \times 0.215 = 13.76\text{（立方厘米）}$$

即削去了 13.76 立方厘米。

削成的圆柱体积便是：

$$4^3 \times (1 - 21.5\%) = 64 \times 0.785 = 50.24\text{（立方厘米）}$$

19.柱内方

一个高与底面直径相等的圆柱，将它削成一个最大的长方体，削去的部分与长方体的体积存在怎样的特定关系？

解：设圆柱体的底面半径为 r，则高为 2r。

圆柱体的体积为：

$$V_{柱}=\pi r^2 \cdot 2r=2\pi r^3$$

削成的长方体底面为两个相等的直角三角形，所以它的体积为：

$$V_{正方体}=(2r \cdot r \div 2 \times 2) \times 2r$$
$$=2r^2 \cdot 2r$$
$$=4r^3$$

削去的部分体积是：

$$2\pi r^3-4r^3$$
$$=r^3(2\pi-4)$$

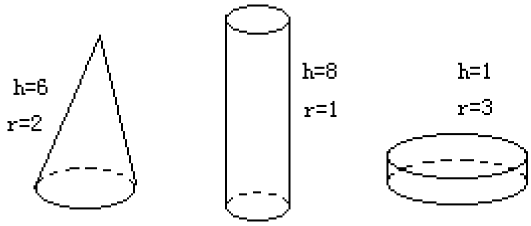
削去部分的体积占长方体体积的百分比是：

$$\frac{r^3(2\pi-4)}{4r^3}$$
$$=\frac{2\pi-4}{4}$$
$$=\frac{2.28}{4}$$
$$=0.57$$
$$=57\%$$

这种比值关系也是一个固定的数。

20.比较

下面的三个图（单位：厘米）你仅用肉眼观察能否断定它们的体积哪个最大？哪个最小？而后再计算一下，验证你的观察是否正确？



解：凭肉眼看很可能认为圆锥最大，矮圆柱最小。但这不科学。通过计算再比较看是什么结果？

圆锥的体积是：

$$\frac{1}{3}\pi\times2^2\times6=8\pi\text{（立方厘米）}$$

高圆柱的体积是：

$$\pi\times1^2\times8=8\pi\text{（立方厘米）}$$

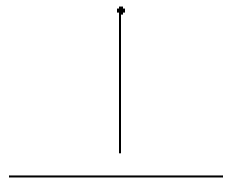
矮圆柱的体积是：

$$\pi\times3^2\times1=9\pi\text{（立方厘米）}$$

瞧，实际矮圆柱的体积最大，高圆柱的体积与圆锥体积相等。

21.哪条线长

下面的两条线段一竖一横，请你认真地观察一下，能猜出哪条线更长？再用直尺量，验证一下你的观察是否正确？

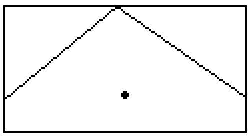


解：大多数同学认为竖线较长。可是当你实际量后便发觉，眼睛并不十分可靠。因为在某种情况下常常会使人产生错觉。

22.转出奇妙

在一张厚纸上，从同一点出发画两条线段，构成了一个角。然后在纸的中心穿进一根大头针，扭动几下别针，使针孔变得大些。而后，一手捏住别针，一手敲动厚纸，使它快速旋转，这时，一种奇妙的现象便出现了：你画的角不见了，却出现了另一个你不曾画的图形。

你知道角变成了什么吗？如果从同一点画出两根、三根线段，你又看到了什么？



解：在纸片快速旋转时，视觉产生了错误，结果看到的是一个圆。若画出两根、三根线段，将出现两个、三个同心圆。

23．阴影移位

在一个面积为 1/4 圆的扇形中，以它的两条半径为直径，在扇形内部作两个半圆，求阴影部分的面积（单位：厘米）。

解：这题难在扇内两个半圆重叠部分的阴影面积难求。但当认真观察后，作一些辅助线段，把阴影部分移动一下位置，求解便十分容易了。

$$\frac{1}{4}\times\pi\times4^{2}-\frac{1}{2}\times4\times4$$

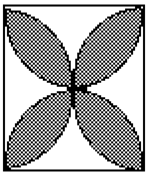
$=4\pi-8$

$=12.56-8$

$=4.56$（平方厘米）

24. 花瓣面积

以正方形的四条边为直径，在正方形内部作四个半圆，阴影部分恰如花瓣，求它的面积（单位：厘米）。



解：若将花瓣图等分成四块，则每一块含有一个花瓣，一个花瓣的面积是：

$$\left(\frac{1}{4}\times\pi\times2^2-\frac{1}{2}\times2^2\right)\times2$$

$=(\pi-2)\times2$

$=2\pi-4$

$=2.28$（平方厘米）

4 个花瓣的总面积是：

2.28×4=9.12（平方厘米）

25.阴影

大圆的直径为 8 厘米，求图中阴影部分的面积。

解：阴影构成的图案很美丽。每一块都是 1/4 个大圆减去半个小圆。如果把它们移在大圆直径的一侧，则阴影部分恰是半个大圆减去一个小圆。

即

$$\frac{1}{2}\times\pi\times(8\div2)^2-\pi\times(8\div2\div2)^2$$

$$=8\pi-4\pi$$

$$=4\pi$$

$=12.56$（平方厘米）

26.六角星面积

下面左图是一个六角星。已知相邻两角顶间距离是 8 厘米，不相邻的两角顶间距离是 15.6 厘米，你能算出这个六角星的面积吗？

解：初看起来，求这个六角星的面积似乎很难。但是认真观察后，却十分简单：

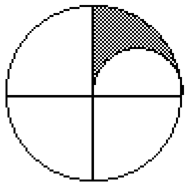
如果将其中相对的两个角割下，补入另两个凹陷的地方，整个图形，便恰是一个长方形。这个长方形的长是 15.6 厘米，宽是 8 厘米，它的面积是：

15.6×8=124.8（平方厘米）

27.巧算阴影

下图大圆的半径为8厘米，求阴影部分面积，一般用大圆的$\frac{1}{4}$减去小圆的$\frac{1}{2}$，可是认真分析一下却有更巧妙的解法。

你能看得出来吗？



解：从图中可见，小圆的半径正好是大圆半径的$\frac{1}{2}$。所以小圆的面积与大圆面积的比是：

$$3.14\times(\frac{8}{2})^2 : 3.14\times8^2$$
$$=3.14\times4^2 : 3.14\times8^2$$
$$=1:4$$

-

也即，小圆面积是大圆面积的$\frac{1}{4}$。半个小圆面积，也就是大圆面积的$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

图中阴影部分面积，即为：

$$\frac{1}{4}\text{大圆面积}-\frac{1}{8}\text{大圆面积}=\frac{1}{8}\text{大圆面积}$$

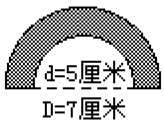
因此，可以直接列式为：

$$3.14\times8^2\times\frac{1}{8}=25.12\text{（平方厘米）}$$

28.巧解半环

求下图半环面积，一般解法是，用外圆面积的 $\frac{1}{2}$ 减去内圆面积的 $\frac{1}{2}$。

也可以不必先求出两个圆面积，只利用直径来计算，你会吗？



解：因为一般解法内外直径都需除以 2 后再平方，即

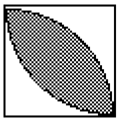
（7÷2）²×π÷2-（5÷2）²×π÷2，

故可以都不除以 2 用直径直接计算，但直径平方比半径平方扩大了 4 倍需将结果再乘以 $\frac{1}{4}$。

$3.14\times（7\ 2-5\ 2）\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=9.42$ **（平方厘米）**

29.一片树叶

已知正方形的面积为 400 平方厘米，以边长为半径，以相对的两个顶点为圆心，在正方形内画弧（见图），阴影部分恰像一片树叶，求它的面积。



解：根据正方形面积是 400 平方厘米，可知正方形边长为 20 厘米，若把上图重新移接，可变成右图，这样求阴影部分的面积就变成求扇形 ABC 面积减去等腰三角形 ABC 面积之差的 2 倍了。

也可以这么想：图中圆心角是 90°的扇形有两个，而这两个扇形又互相重叠，所以这两个扇形面积之和与正方形相比，恰好多一个阴影部分的面积。这样，求阴影面积便可简单多了。

解 1：

$$\left(3.14\times 20^2\times\frac{90}{360}-\frac{20\times 20}{2}\right)\times 2$$

$=（314-200）\times 2$

$=114\times 2$

$=228$**（平方厘米）**

解 2：

$$3.14\times 20^2\times\frac{90}{360}\times 2-20\times 20$$

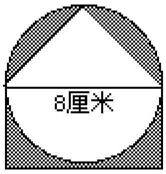
$=3.14\times 2-400$

$=228$**（平方厘米）**

30.玲玲的积木

玲玲在搭积木时摆出了下面的图形，已知图中积木的直径为 8 厘米，问阴影部分面积是多少？

解：积木中的阴影部分面积是半圆的面积减去一个三角形的面积，再加上长方形面积与半圆面积的差。半径已经知道，那么长方形的长、宽，三角形的底、高就都知道了，所以阴影部分面积可求。



将图中沿图的直径对折，使上半圆与下半圆重合，阴影部分的面积就是两个完全相等的三角形面积之和了，而三角形的底、高都是这圆的半径，这样求阴影部分面积就更简单了。

解法 1：

$$3.14\times\left(\frac{8}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}-8\times\frac{8}{2}\div 2+8\times\frac{8}{2}-3.14\times\left(\frac{8}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

$=25.12-16+32-25.12$

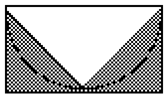
$=16$ **（平方厘米）**

解法 2：

$$\frac{8}{2}\times\frac{8}{2}\div 2\times 2$$

$=16\div 2\times 2$

$=16$ **（平方厘米）**

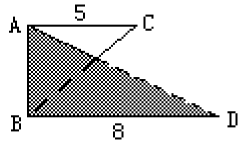


答：玲玲的积木中的阴影面积为 16 平方厘米。

31.拼成的三角形

谷小倩把两个三角尺摆成了如下的图形，已知上面的△ABC 面积为 12 平方厘米，一条边是 5 厘米，另一个三角形的底边是 8 厘米，求新拼成的大三角形 ABD 面积（AC 与 BD 平行）。你会算吗？

解：因为 AC 和 BD 平行，那么三角形 ABC 和三角形 ABD 高相等，所以三角形 ABD 面积就是 BD 与三角形 ABC 的高的积的一半(根据三角形面积公式)。



还可以这么思考，因为 AC 与 BD 平行，三角形 ABC 与三角形 ABD 高相等，那么它们底的比也就是面积的比。即 5：8，也即三角形 ABC 的面积是三角形ABD的面积的 $\frac{5}{8}$。

解法 1：

先求出三角形 ABC 的高，也就是三角形 ABD 的高：

12×2÷5=4.8（厘米）

再求出三角形 ABD 的面积：

8×4.8÷2=19.2（平方厘米）

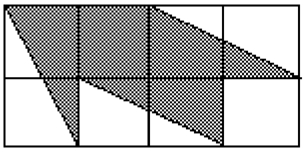
解法 2：

$12 \div \frac{5}{8} = 19.2$（平方厘米）

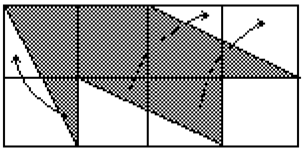
答：新围成的大三角形面积为 19.2 平方厘米

32.阴影的妙算

已知图中每个小正方形的边长都是 2 厘米，求阴影部分的面积。



解：要求出图中阴影部分的面积，可先算出整个长方形的面积，再减去三个三角形和一个小正方形的面积之和便可。



如果将下半部阴影部分割下来，如箭头所表示的那样，拼到上半部分，那么它正好可以拼成四个小正方形。这样，只需要求出四个小正方形面积便是原来阴影部分的面积了。

解法 1：

$$(2+2)\times(2\times4)-(2+2)\times2\times\frac{1}{2}\times3-2\times2$$

$=4\times8-4\times2\times\frac{1}{2}\times3-4$

$=32-12-4$

$=16$（平方厘米）

解法 2：

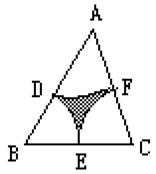
$2^2\times4=16$（平方厘米）

答：图中的阴影部分面积为 16 平方厘米。

33.三个弧长

一个等边三角形 ABC 的边长为 6 厘米，其中 D、E、F 分别为各边的中点。如果分别以 A、B、C 为圆心，以 AD、BE、CF 为半径画弧，那么三个弧围成的图形的周长是多少厘米？

解：根据题意可画出下图，图中阴影部分的周长恰是三个扇形的孤长。



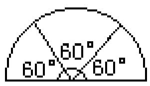
因为每个扇形的圆心角都是 60°，而且它们的半径又相等，所以，如果把三个扇形拼起来，就能组成一个直径为 6 厘米的半圆形，这个半圆形的弧长实际就是阴影部分的周长。经过这样一组合，问题便简化多了。

解法 1：

$$\frac{2\times3.14\times\frac{6}{2}}{360}\times60\times3=9.42$$（厘米）

解法 2：

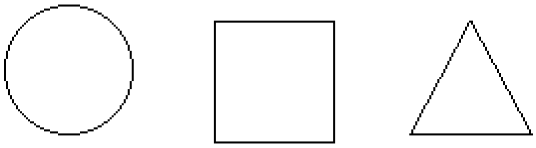
6×3.14÷2=9.42（厘米）



答：这个阴影部分的周长是 9.42 厘米。

34.三用塞子

下面的三个图，是三个孔眼的形状，它们之间的关系是：



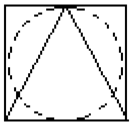
圆的直径=正方形边长=等腰三角形的高。

根据需要，现在要制一个“三用塞子”，用它来塞任何一个孔眼都能塞进去。

这个三用塞子能制出吗？

解：这个塞子必须具备圆、正方形、等腰三角形三种特点才能符合要求。

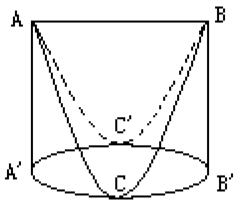
根据这个特点，先做一个高等于圆的直径的圆柱体。这个圆柱便具备了圆和正方形两个特征，即，顶视图是一个圆，侧视图是一个正方形。



再将这个圆柱削成侧视为等腰三角形，便成功了。

制法如下：

选取 C 和 C′，使它是弧 A′B′的中点，这样，A′CB′弧便等于 A′C′B′弧。将 ABC 和 ABC′两块削去，剩余部分的侧视图，便是个等腰三角形了。



35.苏格拉底的花园

苏格拉底是古希腊的哲学家。

他知道自己将不久于人世，便想将自己心爱的花园分给四个得意门生。

花园是块梯形，里面生长着四株美丽的月桂树。

怎样把它分成大小相等、形状相同的四块而且每块地里都长有一株月桂树呢？

这个花园恰是个直角梯形，长腰等于下底，短腰是上底的 2 倍。如图：

后来，苏格拉底根据花园地形的特点，在他去世前成功地分好了。

他是怎么分割的呢？

解：苏格拉底的分法如下图：