学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

学习方法指导丛书

数学课堂学习常规

数学课堂学习程式和方法

数学课堂学习的基本环节

在校学生的学习，是在教师指导下进行的，课堂学习一般由四个环节组成：首先要听老师的课，这就是听课的一环；为了消化和掌握课堂上所传授的知识，需要做练习，这就是作业的一环；为了进一步把所学的知识巩固起来，并了解其内在联系，需要记忆和归纳整理，这就是复习的一环；为了使下一节课学得更主动，事先需要阅读新课，这就是预习的一环。这四个环节的每一部分都有它的独立意义和独立作用，而各部分之间又相互衔接，相互影响，相互制约。这四个环节组成一个小循环，也就是一个学习周期。学习的周期就是学习的车轮运转一周的轨迹，善于学习的人应该从车轮运转一周的辙印中找到它的起止点和中间环节，把四个环节组成定型的学习周期，组成一个学习系统，使每个环节都能充分发挥它们的作用，这样就能取得好的学习效果。

数学课堂学习的原则和基本方法

根据心理学的理论和数学的特点，分析数学课堂学习，应遵循以下原则：动力性原则，循序渐进原则，独立思考原则，及时反馈原则，理论联系实际的原则，并由此提出了以下的数学学习方法：

1.求教与自学相结合

在学习过程中，既要争取教师的指导和帮助，但是又不能处处依靠教师，必须自己主动地去学习、去探索、去获取，应该在自己认真学习和研究的基础上去寻求教师和同学的帮助。

2.学习与思考相结合

在学习过程中，对课本的内容要认真研究，提出疑问，追本穷源。对每一个概念、公式、定理都要弄清其来龙去脉、前因后果、内在联系，以及蕴含于推导过程中的数学思想和方法。在解决问题时，要尽量采用不同的途径和方法，要克服那种死守书本、机械呆板、不知变通的学习方法。

3.学用结合，勤于实践

在学习过程中，要准确地掌握抽象概念的本质含义，了解从实际模型中抽象为理论的演变过程；对所学理论知识，要在更大范围内寻求它的具体实例，使之具体化，尽量将所学的理论知识和思维方法应用于实践。

4.博观约取，由博返约

课本是学生获得知识的主要来源，但不是唯一的来源。在学习过程中，除了认真研究课本以外，还要阅读有关的课外资料，来扩大知识领域。同时在广泛阅读的基础上，进行认真研究，掌握其知识结构。

5.既有模仿，又有创新

模仿是数学学习中不可缺少的学习方法，但是决不能机械地模仿，应该在消化理解的基础上，开动脑筋，提出自己的见解和看法，而不拘泥于已有的框框，不囿于现成的模式。

6.及时复习增强记忆

课堂上学习的内容，必须当天消化，要先复习，后做练习，复习工作必

须经常进行，每一单元结束后，应将所学知识进行概括整理，使之系统化、深刻化。

7.总结学习经验，评价学习效果

学习中的总结和评价，是学习的继续和提高，它有利于知识体系的建立、解题规律的掌握、学习方法与态度的调整和评判能力的提高。在学习过程中，应注意总结听课、阅读和解题中的收获和体会。

更深一步，是涉及到具体内容的学习方法，如，怎样学习数学概念、数学公式、法则、数学定理、数学语言；怎样提高抽象概括能力、运算动力、逻辑思维能力、空间想象能力、分析问题和解决问题的能力；怎样解数学题；怎样克服学习中的差错；怎样获取学习的反馈信息；怎样进行解题过程的评价与总结；怎样准备考试。对这些问题的进一步的研究和探索将更有利于中学生对数学的学习。

历史上许多优秀的教育家、科学家，他们都有一套适合自己特点的学习方法。比如，我国古代数学家祖冲之的学习方法概括起来是四个字：搜炼古今。搜就是搜索，博采前人的成就，广泛地研究；炼是提炼，把各种主张拿来比较研究，再经过自己的消化和提炼。著名的物理学家爱因斯坦的学习经验是：依靠自学，注意自主，穷根究底，大胆想象，力求理解，重视实验，弄通数学，研究哲学等八个方面。如果我们能将这些教育家、科学家的更多的学习经验挖掘整理出来，将是一批非常宝贵的财富，这也是学习方法研究中的一个重要方面。

学习方法这一问题虽已为广大的教育工作者所重视，并且提出了不少好的学习方法。但是由于长期以来“ 以教代学 ”的影响，大部分学生对自己的学习方法是否良好还没有引起注意。许多学生还没有根据自己的特点形成适合自己的有效的学习方法。因此作为一个自觉的学生，就必须在学习知识的同时，掌握科学的学习方法。

学生学教学的基本过程

学生学习独立新知时，一般要经历以下五个基本步骤。

第一步，对所学知识——事、物或数的变化发展过程进行初步感知

如考察事、物的存在、演变的条件与过程；参与对所学知识的演示、操作与实物及再现事物的存在、变化和发展过程，进而获得对所学知识的初步感受。

第二步，再现演示、操作、实验的全过程

经过对比或类比分析，进行初步整理，使所学知识的本质概念在头脑中产生一个既清晰又模糊的印象，即形成表象。

第三步，学习课本

在课本的启发下，结合自己的体验，用最能表达自己感受的语言把所学新知识变化、发展的条件、规律和结果恰如其分地表述出来，形成清晰而完善的概念。

第四步，运用多种方法，熟记并进一步资化对概念的认识，使知识逐步向能力转化

第五步，参与各种练习

进一步巩固和加深对所学知识的领会，一方面完成其向能力的转化工

作，另一方面促进智力水平的不断开发与提高。

上述五个步骤的循环往复就构成了学生独立新知学习过程的基本模式。

学生学习由旧知扩弃而来的新知的基本过程一般有两种形式，每种形式都可分为六个具体的阶段。

每一种形式各阶段的基本次序是：复习旧知—→认识新知—→探究新知（用对比和类比的方法找相同点和不同点）—→概括新知—→记住新知—→运用新知。

第二种形式各阶段的基本次序是：认识新知—→沟通新旧知识的内在联系—→探究新知—→概括新知—→记忆新知—→运用新知。

学生学习半独立新知的过程同前述独立新知和扩弃新知的学习过程基本相同。其具体的实施步骤如下：

接触和初步认识新知——建立感性认识
↓ ↓
开展联想——形成新知表象
↓ ↓
探究新旧知识的内在联系——第二次感知
↓ ↓
抽象概括新知本质特征——向理性知识转化
↓ ↓
记忆新知——巩固
应用新知——将知识转化为能力

重视学生学数学的基本过程的研究，对改进教学方法、加强学法指导，提高教学质量具有十分重要的意义。

数学课文预习方法

1.阅读课文

这是预习以下几个步骤的基础（参看后面介绍的各种阅读方法）。

2.亲自推导公式

数学课程中有大量的公式，有的课本上有推导过程；有的课本上没有推导过程，只是把公式的最初形式写出来，然后说一句，“经推导可得”，就把结果式子写出来了。无论课本上有无推导过程，学生预习的时候应当自己合上书亲自把公式推导一遍；书上有推导过程的，可把自己推导过程和书上的相对照；书上没有推导过程的可在课堂上和老师推导的过程相对照；以便发现自己有没有推导错的地方。

自行推导公式既是自己在独立地分析问题和解决问题，又是在发现自己的知识准备情况。通常，推导不下去或推导出现错误，都是由于自己的知识准备不够，要么是学过的忘记了，要么是有些内容自己还没有学过，只要设法补上，自己也就进步了。

3.扫除绊脚石

数学知识连续性强，前面的概念不理解，后面的课程无法学下去。预习的时候发现学过的概念有不明白、不清楚的，一定要在课前搞清楚。

4.汇集定理、定律、公式、常数等

数学课程中大量的定理、定律、公式、常数、特定符号等，是学习数学课程的最重要的内容，是需要深刻理解，牢牢记住的。所以，在预习的时候，无论你做不做预习笔记，都应当把这些内容单独汇集在一起，每抄录一遍，则加深一次印象。上课的时候，老师讲到这些地方时，应把自己预习时的理解和老师讲的相对照，看自己有没有理解错的地方。

5.试做练习

数学课本上的练习题都是为巩固所学的知识而出的。预习中可以试做那些习题。之所以说试做，是因为并不强调要做对，而是用来检验自己预习的效果。预习效果好，一般书后所附的习题是可以做出来的。

数学教材“三读”法

“三读”：粗读、复读、精读。

预习或自学教材要采取粗读—复读—精读的良好的独立读书程序。

第一，精读—浏览全书，掌握概貌

为此必须以较快的速度迅速浏览。看书时，应先看目录和前言、编者的话等，以了解书的章节大意。阅读正文时，从默读到逐渐加快眼的视力速度，以加强大脑皮层上视觉区的神经兴奋，直接以文字、数学符号作为信息传入脑的视觉区，既加快了阅读速度，又锻炼了自己的逻辑思维能力。粗读中，重点在于了解书的概貌，掌握书中的基本概念、基本原理和定理，学会初步的运算和论证。阅读进度可以配合教学进度阅读，也可自己按章、节、篇划单元阅读。对于书中的重点、难点、问题、原有知识的空白和相关性小的知识怎么办？建议采取“标记号、绕道走、放过去”的对策：

所谓“标记号”，就是对重点知识标注记号。记号可以根据读者习惯，各自选择、创造。例如可取以下记号标于书中的字里行间：

直线段“——”标明较为重要的内容；

红色红段“——”或波浪线段“____”标明特别重要的内容；

问号“？”标明自己的疑点、难点；

“△”标明知识空白点.留待补充；

“*”标明暂时跳过去未看的内容；

等等。

利用标注记号的办法，一方面可以把思维引向书中深处；另一方面利于复习、思考和进一步精读。

所谓“绕道走”，就是当阅读到某些难点，如难理解的概念、难证的定理，或暂时读不懂的地方，又不特别影响后面内容的阅读，则可作上记号，暂时挂起来，跳过去绕道继续往下读。待多读些后回头再来“梳一梳”问题时，也许就迎刃而解或容易弄懂了。

所谓“放过去”，指对书中暂时与自己学习需要无关的内容，或在学术上有争议的问题等，就把它放过去，这样可以缩短看书的进程。

第二，复读—弄清结构，掌握思想

阅读数学书，重要的在于弄清书的结构，了解全书的系统和来龙去脉，掌握它的精神、思想和方法。复读阶段十分重要，它要在初读的基础上加深理解，扫清留下的障碍。此阶段建议采取“追、疑、补、记、注”的对策：

所谓“追”，是指重点追读和思索书中的关键、难点。要深入思考基本

概念的意义、作用；加强对重点问题的演算和论证练习，从而把握有关原理、命题的基本思想及其应用；回头追读难点，扫清知识障碍。数学学习中比较大的障碍就是“抽象性”。例如由于对一些抽象的基本概念理解不清，掌握不牢，遂导致课程的后继学习上的困难。怎样来理解数学中的抽象概念为好呢？考虑到抽象与直观是辩证的统一，大量抽象概念都是从直观中逐步抽象、提炼出来的。如“群”这一抽象概念的产生，就是在证明一般五次方程不可能用根式求解，而导出了包括群在内的近世代数方程理论。如果不考虑“群”的历史发展顺序，可以这样来看群的概念从直观到抽象转化的过程：从最直观的晶体结构→置换群→运动群→抽象群。虽然有些抽象的数学概念未必由直观产生，但可以用某一直观模型来表示，使它直观化。如虚数的产生和人们给它的命名，就说明当时对虚数的奥妙难以捉摸，后来高斯在 1831 年将 $a+bi$ 表示为复平面上的一点，找到了它直观的几何意义，使人们确信了复数确实存在。再如把实数描述成数轴上的一点，把实变数函数描述成平面曲线，把解析函数理解成复平面之间的共形映照，把 n 元数组理解成 n 维向量等等，都是把抽象概念直观化的例子。学习时，只要注意充分利用直观模型来帮助理解抽象概念，就可以减少学习上的难度。

所谓“疑”，是指质疑。就是说在自学过程中，要学会“自疑寻答”。巴尔扎克说过：打开一切科学的钥匙都毫无疑问的是问号；我们大部分的伟大发现都应当归功于如何，而生活的智慧就在于逢事都问个为什么。当你自学数学而提不出问题时，说明你还徘徊在门外；一旦有所疑且提出一个像样的问题时，说明你已在该问题的学习上向前迈进了一步；若能自己寻思求得解答，应该庆贺你在自学过程中取得了一个胜利。值得庆幸的意义不在于你获得了某项知识的解答，主要的在于你开始学会如何在自学中“自疑寻答”。这是自学者非常重要的一种学习素质。正如古人所言：“为学患无疑，疑则有进”、“小疑则小进，大疑则大进”。因此，看书、学习时，应尽力使自己沿着“有疑→有问→有思→有进”的螺旋式进程前进！

所谓“补”，是指补上你学习中的知识空白。学习，特别是对新知识的学习，不可能事先把需用的基础知识都准备好；相反，恰恰是学而不足，用方知补缺。那么，你就采取缺啥补啥，补到够用即可的办法，必能助你学习。

所谓“记”，是指在学习中作记要。写读书记要，既可以加深对数学知识的理解和记忆，又可为后继的学习垫牢基础，更可培养索取知识的动手能力。写读书记要的方式多样，常用的方法有摘记原文、写概要笔记、列表对比摘记、小结式摘记等等。这些都将对你的自学增加补益，从中亦可看出自己思想深化的过程。

所谓“注”，是指自学时在书的“天头”、“地脚”、空白处加批注。这种批注，可以是自己对问题的看法、体会；也可以是“慎读”、“审视”、思索后提出的疑问；也可以是空白知识的补充、易忘公式的记载；也可以是对书中某问题的评价及个人的创见，等等。读书批注，是自学深化的过程，也是破除对书本的“迷信”，发展自身创造性思维能力的过程。持之以恒，大有补益。

第三，精读—深入思索，激发创见

经过各章、各篇的粗读、复读以后，应该说基本上已掌握了该书的结构和知识体系，已有了一定的基础。然而任何一本书中的知识都并非尽善尽美；一本书尽管编得再好，也不是就没有不足之处。因此尚有许多东西值得推敲、

玩味，尚需进一步深入思索。精读的目标建议可考虑如下一些问题：

该书是按怎样的结构体系编写的？这种体系有何优点和不足？

全书的数学思想和精神是什么？

书中的基本概念定义得是否精确？在知识体系中，每个概念的编排是否得当？

主要定理的论证有无可改进之处？若将定理的条件加强些，定理的论证及适用范围将发生怎样的变化？条件减弱要求，情况又会如何？

有关定理或定律的论述中，哪些步骤具有普遍意义？别人是怎样想出来的？还有无可深入之处？它给出什么解题思路？

书中的题例安排是否适当？习题选择、编排是否达到巩固基本知识、应用基本知识、深化基本知识的作用？

书中的编排、论证、阐述上有无逻辑上的错误？

文字叙述是否精确、明晰？等等。

通过对这些问题的推敲、思索，不仅促使对书本的“甚解”，重要的在于激发自己的创造性思维，使自学中的独立思考能力得到更好的发展。

附：阅读数学课本的四步方法

[美] 戴维·E·加勒特

顺利阅读数学课本需要掌握特定的阅读技能，例如：精读，权衡细节的重要程度，理解例题，组织论据，作出推断，区别资料的关联性与无关性以及注意概念间联系等。以下是帮助学生获得这类分析技能的四个步骤。

1.慢速阅读

帮助学生理解数学课本的第一步是放慢阅读速度。大多数数学课本中几乎没有什么多余的语言，由于过渡性语言的缺乏和数学语言的复杂性，致使难以利用上下文的线索，教师要教会学生通过浏览寻找关键词，以及归纳段落大意来阅读数学课本，不仅应该通篇阅读，而且应该逐字逐句地阅读，并要边仔细阅读，边反复思考。

2.复读

第二步是教会学生复读，尤其鼓励学生复读第一遍阅读中没有理解的那些内容。一种适用于结构严谨的数学课本和其他技术资料的系统的阅读——研究方法称为 PQ4R；预习、提问、阅读、思考、改写、评论。这种过程特别适用于阅读文字问题。这些准则告知学生要放慢阅读速度，并找出概念之间的相互关系。

通常，当问题的答案并非一目了然时，学生容易失去信心。新的解题方法产生于学生尝试构思，并付之实际之时，这个过程需要时间。在数学阅读中，学生应该努力做到手脑并用；既思考解题设想，又把它们及时记下。

3.学习数学词汇

第三步是使学生熟悉有关的数学词汇和符号。数学在特定的意义上来使用一些日常词汇，所以其意义已经不同于传统的用法。另外的阅读困难来自课本中使用的数学符号，也可能来自缩写词。

口头数学语言的教学是理解书面数学语言的前提。在幼儿园或小学一年级教学正规数学时，这种连续就应该开始。在数学学习的早期阶段，在对具

体实物进行数学操作中，教师使用规范化的数学口语，有利于儿童打下学习数学语言的扎实基础。

4.调整眼睛移动的形式

解决数学阅读问题的第四步是帮助学生调整眼睛移动的形式，这种形式不同于惯常的阅读文学作品中的从左到右的移动。在数学课本中，学生必须阅读带有指数、小括号、大括号等的表达式，他们也必须阅读若干种不同的表格和插图。当代数方程式中出现分数时，学生往往由于横向阅读分子而不是阅读整个分数，以致发生错误。教师需要强调，为了理解数学课本，种种眼睛移动形式都是必要的。

阅读和理解数学课本的方法有别于人文学科。由于在大多数数学或理科课本中的内容的精练性和复杂性，学生不宜采用阅读小说的方法来简单地浏览课本。这里提出的四项建议能够帮助学生加深对书面数学资料的理解。

（竺培梁　编译）

指导学生阅读课本的十种方法

1.默读法

就是不出声地读，用心看。培养学生边读边思考的能力。

2.间读法

间断地而不是持续地读。读一句，想一下，这一句是什么意思，想清楚了领会了，再继续读下去。到中高年级可要求学生一节一节地读，读一节，思考一下什么意思。

3.复读法

就是让学生对同一部分内容翻来复去数遍地阅读。如“分数的意义”一节，可采用“五遍复读法”：一遍领会每句意思。二遍想清楚上下句的联系和每个自然段的意思。三遍想一想叙述和所举例题是不是一致，还可以补充哪些例子。四遍读后进行举例和结语之间的归纳和演绎。五遍记忆一些概念和动手演算本节的习题。

4.研读法

就是对某些概念、定义、法则的语言表达部分进行某些词句的变换，再与原表述内容进行研究比较的一种阅读方法。如：“简易方程”一节，“含有未知数的等式叫做方程。”——“不含有未知数的等式叫做方程”吗？“含有未知数的式子叫做方程”吗？这就掌握了方程的两个特征：一是含有未知数；二必须是等式。

5.跳读法

跳过某些部分，不作一般顺序的读法。小学数学课本内容，一般可分为引语，例题和习题，结语（包括概念和法则）以及图表几种类型。在初读基础上，可着重读引语和结语。对于夹有图、表、线段和几何形体的地方，要跳过一些内容，将有关数表和图形查找对应起来进行比较领会。

6.算读法

对于课本上的算式或例题，可以边读边演算，这是数学阅读中的重要方法之一。可让学生先独立地尝试解答和演算，演算解答发生困难时，或者在演算结束后，再去读书看例题。

7.索果阅读法

对应用题可以从已知条件出发读题，不断提出中间问题。为追索问题的结果提供条件，如，“一个煤矿上半年原计划产煤 66 万吨，实际每月比原计划多生产 2.2 万吨。照这样计算，完成上半年计划要用几个月？”可以这样读：“一个煤矿上半年计划产煤 66 万吨，上半年有几个月？原计划平均月产煤多少吨？实际每月比原计划多生产 2.2 万吨，实际每月产煤多少万吨？照这样计算，完成上半年计划（上半年计划是多少万吨？）要用几个月？”

8.追因阅读法

根据应用题中问题的需要，阅读追索条件。如，“一个机械化养鸡场一月份运出的鸡是 13600 只，二月份运出的鸡的只数是一月份的两倍，三月份运出的比前两个月的总数少 80 只。三月份运出多少只？”可自问“求什么？”自读“三月份运出多少只？”自问“三月份运的鸡数与那几个月有关呢？”自读“比前两个月的总数少 80 只。”自问“前两个月运出的总数是多少只？”自读“……一月份运出 13600 只，二月份运出的只数是一月份的 2 倍。”

9.关键词句阅读法

就是抓住应用题中的关键词句，边读边找条件，提问题，弄清题目的结构。如“高年级同学在校办工厂劳动，6 个同学糊了 35 个纸盒，照这样计算，12 个同学一共可以糊多少个？”抓住“照这样计算”展示阅读。自问“照怎样计算？计算什么？”然后自读“12 个同学业共可以糊多少个纸盒？”

10.代入阅读法

用这种方法阅读应用题，可将复杂的数量关系转化为简单具体的数量关系。如“少年宫合唱队有 64 人，比舞蹈队人数的 2 倍多 16 人。舞蹈队有多少人？”阅读时设舞蹈队有 x 人，然后把题中“舞蹈队人数”“舞蹈队”用 x 人代入读成：“少年宫合唱队有 64 人，比 x 的 2 倍多 16 人。求 x 是多少？”这样一读，方程就读出来了。

附：数学课本六步读书法

为了提高阅读质量，增强再现思维，在实践中可采用读、划、查、思、比、练的六步阅读法，从粗览到精读，做到由泛到精，再由精到博，以达到消化吸收的目的。

第一步：读

就是看书，看课文，精读细看反复识记，深入理解。

第二步：划

就是使用各种符号，作出标记，帮助分析总结，如勾画出定义、定理，重点、难点，画草图，作眉批，提问题……可以用横线、波浪线、问号、惊叹号、箭头等不同符号，要注意符号使用得前后一致。

第三步：查

对阅读中遇到的疑难问题和必须了解的数据，可以通过查阅其它材料搞清楚，或利用工具书验证，力争经过自查不留问题或少留问题。

第四步：思

就是思考，对所读材料要多问几个为什么？从引入方法到概念的内涵和外延，从证题的方法到证题的依据等，要对照书上或教师编拟的思考题逐一思索回答，在理解中进一步掌握。

第五步：比

比的意义，一方面是对照阅读，进行纵向比较及横向比较，把该知识与有关知识的相同点、类似和差别找出，并纳入相应的知识链中；另一方面是与同一类别同一内容的书的讲述方法对比，在比较中熟悉它的特点，加强结构的记忆。

第六步：练

动手写一写，做一做，概念是否清晰准确，方法是否掌握，技能是否具备，都要通过练习来进行自我检测，这是检验阅读效果，训练再现思维的好方法，通过这些方法将会激发阅读的专注性和深刻性，为进一步提高再现能力创造条件，增强自觉性。

附：阅读数学课本的习惯培养

提高阅读能力的第一步就是养成阅读习惯，可采用的方法是：

1.引导阅读

对要学习的内容，事先编写印发提纲或作口头指导，引导学生研究课本内容和表达方式，这样给他们指明阅读的方向和要求。

如对概念部分，要求在阅读中：(1）弄清构成概念的要素，体会概念的一般结构，即“……叫做……”，“……统称为……”；(2）指出关键字、词；(3）判断是非；(4）举正例；(5）举属于邻近概念的反倒；(6）进行相近、相反概念的比较。

2.坚持预习

特别是难懂的教材，一定要求学生通过预习提出疑点，由教师在课堂上答疑，通过释疑、点拨，起到举一反三，触类旁通的作用。

3.适时提问

课堂上，根据学生已阅读的内容，提出精心设计的问题，逐步引入新课，一步步完成数学任务，对有的教材，如“抛物线”、“双曲线”部分，它们位于椭圆一节之后，与“椭圆”一节的研究方法类似，则应以学生阅读为主，要求学生回答它们研究的方法与“椭圆”有何异同（都是按定义——标准方程——性质——平移化简的顺序研究的，又因定义相异，导致离心率 e 的不同），而对标准方程的推导、性质、平移化简等，都要求自行推演。

4.引发讨论

对学生容易忽略的内容，要仔细斟酌，反复推敲，必须让他们边阅读边议论，在讨论中，咬文嚼字，达到消化吸收的目的，如函数定义中的“每一个”、“确定”、“唯一”、“对应”等词的意义，都要求在讨论中加深理解。

5.小结串讲

学完一个单元以后，让学生在反复阅读和复习的基础上，作出简单的书面小结并进行串讲，它包括知识纲要，研究方法，内在规律，应用和要注意的问题。

6.诱导自学

有时对练习和学生提出的问题，不是正面直接讲授，而是让他们去看×页×例，或参阅×书×页，以养成自觉阅读的习惯。

附：小学数学课本的“三步读书法”指导

阅读数学课本的方法“ 三步读书法 ”是对新教材预习或自学时，读教材理解教材的三个步骤，即粗读、细读、精读。“ 三步读书法 ”的操作程序是根据学生学习的规律和年龄特点，把有关学习方法的概念和理论，科学地变为学习过程中可供学生学习实际操作的具体步骤，让学生在学习过程中一步一步地按程序进行学习。这是由河南濮阳中小学教研室郭志刚老师对这种方法进行了实验并作了总结。

1．“ 三步读书法 ”简介

（1）粗读。从整体着眼，通读教材，初步了解知识的全貌了解这段内容要说明一个什么问题，解决一个什么问题，用到哪些旧知识，引入哪些新知识。

（2）细读。逐字逐句，细读教材，研究定义、法则、公式、性质等是怎样得出来的，分几层意思，关键在哪里，新知识与旧知识有些什么联系等，在引导学生逐字逐句地细读课本时，应鼓励学生读一句，自讲其含意，并提出不同的问题，对于自己不能够得到答案的问题要作特殊标记，以便听课或讨论时作为主要问题来研究。

（3）精读。回到整体，带着问题融会贯通地读，由学生提出问题或教师提出简要自学提纲，带着问题进行第三次读书，使学生达到理解。（自学提纲是根据教材的知识结构 教材重点难点以及学生学习中容易混淆的概念精心设计的，自学提纲设计一般包括启发性提问，灵活答辩，以及启迪思维过程和解题思路、方法步骤等）。

2．“ 三步读书法 ”的运用

（1）计算教学的“ 三读 ”。步骤是：粗读，粗读例题，细读，找出与对此题或所学旧知识的区别和联系，精读，根据提纲看书并回答问题或者根据教材特点，将知识分成几个层次来进行“ 三读 ”。

如：计算：$4.3-\left(\frac{3}{5}+2.4\div 2\frac{2}{3}\right)$ 粗读，让学生读出题意，细读，引导学生对式题进行认真地分析，要求：①看运算顺序；②想运算法则；③看数与数之间的联系，精读，回答问题并计算。让学生说出先算什么，后算什么，根据是什么，有几种算法，哪种简便，并写出解题过程。

（2）应用题的“ 三读 ”。具体主法是：一读，领略大意，找出已知条件和问题，二读，理解题中每句话的含意，还可进行联想，可由此及彼沟通知识间（条件与条件，条件与问题）的内在联系，还可尝试画图进行分析。三读，根据自学提纲进行第三次读书。

如：苍海号捕鱼船五月份捕鱼2400吨，六月份比五月份多捕了$\frac{1}{4}$，六月份捕鱼多少吨？粗读要求同上，细读，让学生讲出题意，并联想：把五月份捕鱼的吨数看作“ 1 ”，六月份捕鱼的吨数相当于五月份的（$1+\frac{1}{4}$），求六月份捕鱼多少吨？就是求2400吨的（$1+\frac{1}{4}$）是多少，精读，说出数量关系式，五月份捕的鱼×（$1+\frac{1}{4}$） ＝六月份捕的鱼，并列式解答。

（3）概念的三读。具体作法是：粗读，领略大意，明确本节内容，细读，

把概念的关键词句用不同符号划下来加以分析，逐字逐句讲出每句话含义，寻找课文中定义、概念、推导公式、归纳法则的重要词句，认真领会。精读，按提纲进行第三次读书。

又如：正方体的表面积。在讲之前可留预习作业。粗读，领略大意。细读，认真读题中文字，并结合图形理解题意。精读，按照教师提出的自学提纲进行第三次读书。提纲：①每人找一个或做一个正方体的盒子，看谁做得最符合规格；②量出边长，先计算一个面的面积，再试一试计算六个面的面积之和；③六个面的面积之间有什么关系，你能用最简便的方法计算么？

3.低、中、高年级数学课本的阅读方法

（1）低年级数学课本的阅读。①先讲解后读书。对于小学低年级学生来说，由于他们识字不多，阅读能力有限，教学时，宜先采取直观演示结合讲解，后指导学生看书学习的方式进行。也可将课本上的内容写在小黑板上或用幻灯演示出来，边出示边讲解。然后叫学生翻开书，指出这些内容在书上什么地方，指导他们进行对照，明了书上的图解及叙述意义，以后可逐步提高对学生阅读课文的要求，回答教师提出的问题或复述教师的讲解等（举例略）。②边看边读边引导。从学生的实际出发，在教师的引导下，指导学生边看边读数学课本，培养学习能力。③渗透下节新授内容，引导学生预习。每教完一个内容或上完一节课，在让学生得到充分的练习机会后，把下一节课的教学内容作为作业补充题让学生做。

以上三种方式，对中、高年级的学生学习较复杂的内容也是适用的。

（2）中年级数学课本的阅读。中年级的学生有了一定的阅读能力，教学时可采取以下两种方式。①边讲解边读书。②边读书边讲解，让学生读一句，自讲一句，或学生自己读完以后，同桌或四人一组互讲教材题意，并按教师提出的提纲回答问题。

（3）高年级数学课本的阅读。对于高年级的学生，因他们基本具备了独立着书的能力，对教材中一些不太理解的内容，教学时，可采取先让学生读书思考，后由学生或教师进行分析讲解，以讲清学生读书后的疑难点，可分两种方式：①预习教材。新授课的前一天布置给学生预习要讲的教材，预习前按“三步读书法”提出要求或问题，在预习时自己找答案，并把不懂的例题或难理解的词句记下来，教师在讲课时就共同的问题，讨论或讲解。②课堂指导阅读在课堂上先指导学生按三步读书方法看书学习，尔后，根据实际学情，首先让学生讲给全组或全班学生听，并培养他们提出问题，引导争论，师生共同解答（举例略）

学习数学概念的两种基本课堂模式比较

概念形成的两种学习模式，既“实例一定义”模式和“假设一验证”模式，从结构上讲有相似的地方，但作为两种不同的学习方法它们是有本质区别的。

1.形式结构相似

两种模式的结构大体相似，两种模式都分成两个阶段，每个阶段都有三个步骤，特别是第二个阶段的三个步骤几乎完全相同。

2.各自内涵相异

两种模式最大的区别在前两个步骤之中。“实例一定义”模式的第一步，

要求教师一次性地呈示肯定例证。如在“长方形的认识”的教学中，教师举出课本的表面、黑板的表面，等等，第二步是师生共同归纳这些例证的相同点，再通过全面分析和综合，概括概念的特征。如概括出长方形的特征是“有四条边且对边相等，有四个角且都是直角”。“假设一验证”模式的第一步，要求教师有顺序地呈示附有标记的两类例证。如在“整除的概念”的教学中，教师举出 36÷12=3（是）和 118÷3=39.333…（否），等等。第二步是学生独自比较这些例证，找出两类例证的不同点，再通过不断地反馈，逐步深入，总结概念的特征，如学生总结出“整除就是被除数、除数和商都是整数的除法”。

3.引导角度不同

在“实例一定义”模式中，教师只呈示肯定例证，然后引导学生对这些例证进行观察，再通过分析、综合和概括，让学生经历一次由具体到抽象的认识过程，最后形成概念，在学习过程中，学生在教师的指导下积极思考。

在“假设一验证”模式中，教师的主导作用比较隐蔽，学习时，教师必须呈示两类例证，然后要求学生对这些例证进行观察、比较、猜测，教师在否定、肯定、又否定、又肯定的“场外”指导中，让学生经历一次由假设到验证的发现过程中，最后形成概念，在教学过程中，充分发挥了学生独立思考的能力。

4.理论依据各异

“实例一定义”模式的依据是逻辑学，逻辑学认为：人们认识事物，要经历一个观察、比较、分析、综合、概括、抽象的过程，这是一个由特殊到一般，不断深化认识的过程，“实例一定义”模式就体现了这一过程。

“假设一验证”模式的依据是心理学，心理学认为：人们认识事物，要经历一个假设与验证，并且不断循环的过程，这是一个多次假设、不断反馈、反复验证的过程，“假设一验证”模式就体现了这一过程。

此外，在培养学生思维能力方面，两种模式的教学效果也不一样。

“实例一定义”模式是运用分析、综合、概括、抽象等逻辑思维方法，形象概念，所以它能使学生的思维趋向严密，培养了学生初步的逻辑思维能力。

“假设一验证”模式是通过肯定与否定的多次循环，形成概念，所以它能使学生的思维更加灵活，能培养学生较广的横向联想能力。

数学概念学习八法

1.温故法

不论是皮亚杰还是奥苏伯尔在概念学习理论方面都认为概念教学的起步是在已有的认知结构的基础上进行的。因此，教学新概念前，如果能对学生认知结构中原有的适当概念作一些结构上的变化，引入新概念，则有利于促进新概念的形成。

2.类比法

抓住新旧知识的本质联系，有目的、有计划地让学生将有关新旧知识进行类比，就能很快地得出新旧知识在某些属性上的相同（相似）的结论而引进概念。

如，教学“最简比的意义”，我们就可以用最简分数意义与它进行类比：

①判断：下列分数哪些是最简分数？哪些不是？为什么？

$\frac{42}{63}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{11}{13}$ $\frac{36}{16}$ $\frac{15}{8}$

②将上述分数看作比，回答哪几个比的前项和原项是互质数？

③比的前项和后项是互质数的比，就叫做最简单的整数比，从而引进了化简比的概念。

可见，这种方法有利于分析二者异同，归纳出新授内容的有关知识，有利于帮助学生架起新、旧知识的桥梁，促进知识的迁移，提高探索能力。

3.喻理法

为正确理解某一概念，以实例或生活中的趣事、典故作比喻，引出新概念，谓之喻理导入法。

如，学“用字母表示数”时，先出示的两句话：“阿 Q 和小 D 在看《W 的悲剧》。”、“我在 A 市 S 街上遇见一位朋友。”问：这两个句子中的字母各表示什么？再出示扑克牌“红桃 A”，要求学生回答这里的 A 则表示什么？最后出示等式“0.5×x=3.5”，擦去等号及 3.5，变成“0.5×x”后，问两道式子里的 x 各表示什么？根据学生的回答，教师结合板书进行小结：字母可以表示人名、地名和数，一个字母可以表示一个数，也可以表示任何数。

这样，枯燥的概念变得生动、有趣，同学们在由衷的喜悦中进入了“字母表示数”概念的学习。

4.置疑法

通过揭示数学自身的矛盾来引入新概念，以突出引进新概念的必要性和合理性，调动了解新概念的强烈动机和愿望。

例如：“通分”让学生回答下面每组中两个分数的大小：

(1) $\frac{3}{4}$和$\frac{5}{6}$ (2) $\frac{5}{8}$和$\frac{5}{7}$ (3) $\frac{3}{4}$和$\frac{1}{4}$ (4) $\frac{7}{12}$和$\frac{5}{10}$

(5) $\frac{3}{4}$和$\frac{5}{6}$

显然，(1)～(4)题学生能很快回答，第(5)题是新授例题，到底怎样回答？学生处于暂时的困惑，教师抓住学生急需求教于老师的这个时机，让学生大胆讨论：到底怎样才能比较$\frac{3}{4}$和$\frac{5}{6}$的大小？投石激浪，学生的回答可用：画跋匕较大小、化成同分母后比较大小、化成同分子后比较大小、化成小数比较大小等，进而，教师再引导学生分析比较上面哪一种方法比较简便？最后小结：我们把$\frac{3}{4}$和$\frac{5}{6}$分别化成$\frac{9}{12}$和$\frac{10}{12}$的过程，就是今天我们要学习的通分。

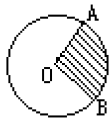
5.演示法

有些教学概念，如果把它最本质的属性用恰当的图形表示出来，把数与形结合起来，使感性材料的提供更为丰富，则会收到良好效果，易于理解和掌握。

如，学“求一个数的几倍是多少”的应用题，重要的是建立“倍”的概念，引进这个概念，可出示 2 只一行的白蝴蝶图，再 2 只、2 只地出示 3 个 2 只的第二行花蝴蝶图，结合演示，通过循序答问，使学生清晰地认识到：花

蝴蝶与白蝴蝶比较，白蝴蝶 1 个 2 只，花蝴蝶是 3 个 2 只；把一个 2 只当作 1 份，则白蝴蝶的只数相当于 1 份，花蝴蝶就有 3 份。用数学上的话说：花蝴蝶与白蝴蝶比，把白蝴蝶当作一倍，花蝴蝶的只数就是白蝴蝶的 3 倍，这样，从演示图形中让学生看到从“个数”到“份数”，再引出倍数，很快地触及了概念的本质。

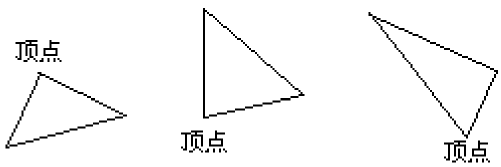
6.问答法



引入概念采用问答式，能在疑、答、辩的过程中，步步探幽，引人入胜。

如，开始学扇形概念时，教师先把自己手中的摺扇打开，问：这是什么？（扇子）接着出示下图问：图中的影形部分像什么？（扇子）所以我们称它是什么？（扇形）那么，圆中空白部分是不是扇形呢？学生意见不一！那么究竟什么样的图形叫扇形呢？指导学生带着问题学习课本。这样，思维从问题开始，随着问题的启发，内在潜力得到了充分发挥，从而对“扇形”概念本质特征的认识在不断深化中达到智力升级。

7.作图法



用直尺、三角板和圆规等作图工具画出已学过的图形，是学习几何的最基本的能力。通过作图揭示新概念的本质属性，就可以从画图引入这些概念。

如讲三角形的“高”和“底”时，可先作图：

（1）过直线上一点画一条和这条直线垂直的直线；

（2）过直线外的一点画一条和这条直线垂直的直线；

（3）给出三个图，要求学生作一条过顶点和顶点所对的边垂直的线段，大量作图的基础上概括出“顶点到垂足之间的线段叫做三角形的高”，“和高垂直的边叫底”。

8.计算法

通过计算能揭示新概念的本质属性，因此，可以从学生所迅速的计算引入新概念，如讲“余数”时，可以让学生计算下列各题：

（1）3 个人吃 10 个苹果，平均每人吃几个？

（2）23 名同学植 100 棵树，每人平均种几棵？

学生能很容易地列出算式，当计算时，见到余下来的数会不知所措，这时教师再指出：

（1）题竖式中余下的“1”；（2）题竖式中余下的“8”，都小于除数，在除法里叫做“余数”。学习新概念的方法很多，但彼此并不是孤立的，就是同一个内容的学习方法也没有固定的模式，有时需要互相配合才能收到良好的效果，如也可以这样引入“扇形”概念，让学生把课前带的一把摺扇一折一折地从小到大展开，引导学生注意观察，然后概括出：

第一，折扇有一个固定的轴；

第二，折扇的“骨”部长。

然后再要求学生在已知圆内作两条半径，使它的夹角为 20°、40°、120°、……引导学生观察所围成的图形与刚才展开的折扇有哪些相似之处，最后概括出扇形的意义。

数学定义学习的步骤和方法

中学数学教学大纲指出“正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提”。数学概念是现实世界空间形式和数量关系及其特征在思维中的反映。概念是一种思维形式，客观事物通过人的感官形成感觉、知觉，通过大脑加工——比较、分析、综合、概括—形成概念，建立一个概念，一般是运用由特殊到一般、由局部到整体的观察方法，遵循由现象到本质，由具体到抽象的认识规律，按照辨证唯物主义的观点去分析，找出事物的外部联系和内在的本质，因此概念是培养学生逻辑思维能力的重要内容，概念又是思维的工具，一切分析、推理、想象都要依据概念和运用概念，所以正确理解概念是提高学生数学能力的前提，相反地，如果对学习概念重视不够，或是学习方法不当，既影响对概念的理解和运用，也直接影响着思维能力的发展，就会表现出思路闭塞、逻辑紊乱的低能。中学数学中的概念多以定义的形式出现，因此必须有学习定义的正确方法，一般说来，有以下几个环节。

1.从定义的建立过程明确定义

定义是在其形成的实际过程中逐步明朗化的。任何一个定义的产生都有它的实际过程，学习定义时要想象前人发现定义的过程，从定义形成的过程中，认识其定义的必要性和合理性，这样可以达到理解定义训练思维的目的。

一个定义的形成，一般地说有四个阶段：

（1）提出问题。提出数学定义的常见方法有以下几种：

①从实例提出。理论的基础是实践，高中数学中大量的定义，如集合、映射、一一映射、函数、等差数列、等比数列、柱体、锥体等，都是从实例中归纳总结出来的。

②通过迁移提出。数学的特征之一是它的系统性，因此常常可以从旧知识过渡迁移而得出新的定义。如球的定义可以从圆的定义迁移而得出；双曲线的定义可以从椭圆的定义迁移而得出；反三角函数的定义可以从反函数的定义结合原来的习题迁移而得出等。

③观察图形或实物提出。“形”是数学研究的对象之一。观察函数的图形可以得出函数的单调性、增减性、奇偶性、周期性等定义，观察空间的直线与直线、直线与平面、平面和平面的位置关系可以得出异面直线、直线与平面平行、相交和垂直的定义，平面与平面平行、相交和垂直的定义等。

④从形成的过程提出。数学中有些定义是通过实际操作而得出的，其操作过程就是定义，这样的定义叫形成性定义，如圆、椭圆的定义，异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角的平面角等。

（2）探索问题的解答。如果学生了解了一个新定义提出的方法，那么心理状况必是：对如何定义有迫切的愿望，因而兴趣被激发，积极主动地去思考得出概念的过程，急切想通过自己冷静的思考去试寻问题的解答。这样既有利于掌握定义的本质，又能较快地发展逻辑思维能力，提高分析问题和解决问题的能力。相反地，如果只知是什么，而不知定义得出的过程，那么所学的知识往往是僵死的，妨碍对定义的灵活运用，能力也得不到应有的提高。

因此应该掌握探索问题解答的正确方法。

①从实例提出的定义，要对所举各例进行分析，去掉其个别的、非本质的东西，抓住其共同的、本质的东西，抽象概括寻求问题的解答。

②对通过迁移提出的定义，要在对旧知识准确理解与运用的基础上，进行比较、分析、推理，去寻求问题的解答。

③对观察图形或实物得出的定义，按照观察的目的，运用正确的观察方法，认真观察，仔细分析，同时还要对正反两方面的图形加以比较，去寻求问题的解答。

④对于形成性定义，要亲自动手进行实际操作，同时操作的每一步都要进行认真地分析，找出操作能顺利进行的条件或操作不能进行的原因，写出使操作能顺利进行的操作过程，去寻求问题的解答。

（3）检验解答的合理性。检验解答的合理性，可以通过实践，也可以利用已有的知识进行逻辑推理，若发现有不合理的因素，要加以修改或补充，这样既可加深对定义的理解，又可培养学生严谨的作风。

（4）写出合理的解答，即为定义。

2.剖析定义

（1）明确定义的本质和关键。建立定义以后，要养成剖析定义的习惯，首先要认真阅读课文，逐字逐句地进行推敲，结合定义形成的过程明确定义的本质和关键。

例如“二面角的平面角”的定义：

①“在二面的α—l—β的校 l 上任取一点 O”，是可取的，但位置是多变的。

②“过 O 分别在两个半平面α、β内作棱 l 的垂线 OA、OB”，由平面几何知，OA、OB 是可作的且是唯一的，即当 O 取定后，∠AOB 是确定的。

③由等角定理可知，∠AOB 的大小与点 O 的位置无关，是二面角本身确定的。

因此定义的本质是：$O\in l$，$OA\subset\alpha$，$OB\subset\beta$，$OA\perp l$，$OB\perp l$，与 O 在 l 上的位置无关，与 OA、OB 得出的方法也无关。这样结合前面所学的知识，可得出找（或作）二面角的平面角的方法：

①可根据定义作出；

②过空间一点 P，作 l 的垂面分别交α、β于 OA、OB，则∠AOB 就是二面角α—l—β的平面角；

③可根据三垂线定理或逆定理作出；

④平面图形中如果存在两条互相垂直的直线，若沿其中的一条折成二面角，则另一条直线被折成的角就是所折的二面角的平面角。

由此可知，棱 l 垂直于二面角的平面角所在的平面，即 l⊥面 AOB。

（2）明确定义的充要性。凡是定义都是充要命题，如直线与平面垂直的定义“如果一条直线和平面内的任何一条直线都垂直，就说这条直线和这个平面互相垂直”；反过来，“如果一条直线垂直于一个平面，那么这条直线就垂直于这个平面内的任何一条直线”仍成立，即直线 l 垂直于平面α是 l 垂直于平面α内的任何一条直线的充要条件。又如椭圆的定义“平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数 2a（2a＞｜F_1F_2｜）的点的轨迹叫椭圆”；反过来“椭圆上的任意一点到两个定点 F_1、F_2 的距离之和都等于常数 2a”。

再如“若函数 f（x）对于定义域内的每一个值 x，都有 f（—x）=f（x），则 f（x）叫做偶函数”；反过来，“如果函数 f（x）是偶函数，那么对于定义域内的每一个值 x 都有 f（—x）=f（x）”等等。

（3）突破定义的难点。对于一个定义，应突破它的难点。如 a＋bi（a、b∈R）为什么表示一个数，周期函数定义中的“对于函数定义域内的每一个 x 的值”，数列的极限的定义中的“ε”、“N”等。都是难以理解的，要认真思考，设法突破它，如举出实例并与定义相对照。加深对难点的理解，纠正认识中的错误，以达到准确地理解定义的目的。

（4）明确定义的基本性质。对于一个定义，不仅要掌握其本身，还应掌握它的一些基本性质。如反函数的定义，不仅明确它的定义，还要掌握求函数的反函数的方法；熟悉函数的它的反函数的定义域和值域的关系；还应明确它的互逆性，即 $f[f^{-1}(x)]\equiv x$，进而了解若 M（a，b）是函数 y=f（x）图象上的点，则 M'（b，a）必是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上的点；并掌握函数 y=f（x）的国家和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 y=x 对称；并理解 y=f（x）与 y=f0'（x）同为增函数，或同为减函数；若 y=f（x）是奇函数，则 $y=f^{-1}(x)$ 也是奇函数，若 y=f（x）是非奇非偶函数，则 $y=f^{-1}(x)$ 也是非奇非偶函数；并且理解偶函数和周期函数都不存在反函数的理由。这样把定义和它的基本性质结合起来，对思考、分析和解答与定义有关的问题显然是很有好处的。

（5）逆向分析。人的思维是可逆的。但必须有意识地去培养这种逆向思维活动的能力。前面说过，定义都是充要命题，但对某些定义还应从多方设问并思考。如对于正棱锥的概念可提出如下的几个问题，并思考。

①侧棱相等的棱锥是否一定是正棱锥？（不一定）

②侧面与底面所成的角相等的棱锥是否一定是正棱锥？（不一定）

③底面是正多边形的棱锥是否一定是正棱锥？（不一定）

④符合以上三条中的两条的棱锥是否一定是正棱锥？（一定）

⑤侧面是全等的等腰三角形的棱锥是否一定是正棱锥？（一定）

（一定的加以证明，不一定的举出反倒。）

3.记忆定义

只有在记忆中能随时再现的知识，才能有助于提高分析问题和解决问题的能力，因此必须准确记忆定义。至于记忆方法这里不想多谈，只谈谈记忆定义不应是孤立的。在建立定义时就要开始记忆，在剖析定义时要巩固记忆，特别要弄清定义的基本结构。因为定义是充要命题，所以一般地说，定义是由条件和结论两部分构成的。一般的句子形式是“如果…，那么…”。或“设…则…”。对于逻辑结构复杂的定义，一般地是“设…，如果…，且…，那么…。”如函数的定义“设 f：A→B 就是从定义域 A 到值域 B 上的函数。”这里“设…，”是前提条件，“如果…”，是加强条件，“且…，”是又加强的条件，总之这是条件部分，“那么…”是结论部分。

4.应用定义

应用定义解答具体问题的过程是培养演绎推理能力的过程。应用定义一般可分三个阶段：

（1）复习巩固定义阶段。学习一个新定义之后，要进行复习巩固。首先要认真阅读教材中给出的定义，领会定义的实质，再要举出实例与定义相对照，加深对定义的理解，然后解答一些直接应用定义的问答题、判断题、选

择题或是推理计算题。一般地，在一个定义的后面紧跟的例题或练习题往往是为此而安排的，要认真地，严格地按照定义，用准确的数学语言去解答，且不可马虎草率，对说不出或出现错误的问题，要深究其原因，并在重新阅读，复习定义的基础上，澄清定义，纠正错误。

（2）章节应用阶段。学完一章以后，要把本章中相近的定义，或是与原来学过的相近的定义如排列与组合，球冠与球缺，函数与方程等有意识地用比较的方法，明确它们的区别和联系。或是批判谬误，在批判错误的过程中，找出错误的根源，以免产生概念间的互相干扰。

另外，要把本章中与某一定义有关的知识加以总结，与这一概念有关的例题、练习题加以归纳、总结出应用此定义的基本题型。

（3）灵活综合应用定义阶段。学习一个单元之后，由于知识的局限性，往往很难把某些概念理解透彻，必须到一定的阶段进行这一概念的补课，特别是数学中具有全局性的重要概念，如算术根及绝对值的概念、函数的概念，充要条件的概念等，以克服只见树木不见森林的弊病，从而培养分析与综合能力，训练辨析事物实质的思维能力。

数学命题学习的步骤和方法

正确的命题是刻画概念的性质或揭示概念间的内在联系的。任何一个数学问题的解决都依赖于定义、定理、公式、性质、法则，因此学好命题是学好数学的关键。学习命题，要弄清发现命题的过程，重视命题的推导或证明方法的分析过程，掌握命题的推导或证明方法，在命题的应用上狠下功夫。克服只重视命题而忽视命题被发现的过程，只重视命题的推导或证明方法而忽视其分析过程，只重视解题而不重视以下几个环节：

1.猜想命题

（1）了解命题提出的方法。了解数学命题是怎样提出来的，是学习数学知识，提高数学能力所需要的。积极思维是探索知识的灵魂，而思维是从问题开始的，因此了解提出命题的途径有利于发展思维的主动性。教材中或教师讲授新课时，提出问题的方式常见的有以下四种：

①从实际问题提出。理论来源于实践，实际问题本身就具有强大的魅力，它吸引学生去探索，去追寻。数学中不少命题是根据实际问题发现的，如线面平行的判定定理，线面垂直的判定定理，面面垂直的判定定理，等差数列的前几项和公式等。

②过渡性提出。由于数学的系统性很强，数学中有不少命题可从旧知识到新知识的过渡中去猜想而提出问题。如余弦定理可由勾股定理过渡而提出，倍角、差角的三角函数的公式可从和角的三角函数的公式而提出等。

③反倒式提出。由于某些知识的负迁移作用，学生常常会产生错误的猜想，甚至想当然地把错误的猜想当作正确的命题使用。为了避免学生的错误。可用引入反例的方法，提出新的问题。例如，从批判由定理“如果平面α外的一条直线与平面α内的一条直线平行，则这条直线与这个平面平行”，想当然地得出“如果平面α外的一条直线与平面α内的一条直线垂直，则这条直线与平面α垂直”的错误，提出探索线面垂直的判定定理的问题。

④归纳式提出。定理、公式是对客观实际的抽象，要完成这一抽象，常

常用归纳的方法。如幂函数的性质，函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的定理，等差数列和等比数列的通项公式，二项式定理等，都是在观察、分析部分事实的基础上，归纳猜想出来的。

（2）掌握猜想命题的正确方法。问题提出以后，就要积极思维并用正确的方法去猜想命题。

①从实物提出的命题，要在观察实物的基础上，变实际问题为抽象的数学问题，抓住本质的东西去猜想命题。

②过渡性引入的命题，要在复习旧知识的基础上，用推理的方法去寻求命题。

③反例式提出的命题，要在批判错误的东西的同时，改变条件变化方式，用已有的知识去探索命题。

④归纳式提出命题，要在分析部分事实的基础上，用归纳的思维方法，抓住它们规律性的东西去猜想一般的结论。

（3）验证猜想命题的正确性。对于猜想的命题，要用具体事例进行验证，检验猜想的命题是否正确，发现问题及时纠正。

（4）把正确的猜想写成命题。

2.试作证明或推导

学习命题的证明或推导方法有两种，一种是直接阅读教材，按照教材中给出的解答过程，找出每一步的理论依据及其推算过程，从而弄懂命题的推证方法。

另一种方法是，不先看书，而是通过认真审理，分析命题的条件和结论，联想有关的知识，运用分析与综合的方法，理出解决问题的思想，并且试写解答过程，然后再与教材中的解答方法相对照、比较，进行修改补充，从而准确掌握命题的证明或推导方法。

两种方法相比较，一般说来，第一种方法便当省力，但不利于培养数学能力，有时会感到方法来之突然，甚至感到不可琢磨，而且所学到的方法也往往是僵死的；第二种方法比较费力，但对其推证方法感到自然，印象深刻，便于灵活运用，更有利的是在学习命题的推证过程中，能较快地提高分析能力，想象能力，推理能力和解决问题的能力。

3.剖析命题

（1）剖析命题成立的条件或使用范围。在解题中，学生错误地使用定理或公式的现象屡见不鲜。例如：对于 $x^2=|x|^2$。因没弄清应用的范围是 $x\in R$，而导致在复数中出现 $x^2=|z|^2$ 的错误。由此看来，弄清定理或公式的成立条件和使用范围是非常重要的。

（2）逆向分析。对所学的定理、公式、性质、法则，要从不同的角度，不同的方面去分析，去思考，可提高解题的正确率，并能促进思维能力的发展。

对于一个公式，要分析它的多种变形。如 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ 要分析它的正向 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，逆向 $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$；$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$.变形 $\sin\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2\cos\alpha}$；$\cos\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$。

这对于灵活运用公式会很有好处。如求 $\cos20°\cos40°\cos80°$ 的值，虽然方法很多，但使用 $\cos\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$ 得出结果 $\frac{1}{8}$，也可谓简便的方法。

对于一个定理，应写出它的逆命题，并判断是否成立。正确的要加以证明，不正确的要举出反例。

4.应用命题

（1）命题内容的应用。学过一个定理公式后，结合课本中的例题、习题，总结一下它能解决哪些问题，对掌握知识培养能力都是有好处的。如对二项式定理按照课本的要求，主要可用来：

①求二项技开式，如展开 $(1+\frac{1}{x})^4$，$(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 等。

②求二项展开式的某些特定的项。如常数项，x^3 项，展开式的第五项，展开式的前三项，系数绝对值最大的项，中间项，有理项等。

（2）证明方法的应用。命题的证明（或推导）方法往往是很重要的典型的方法。如二倍角的正弦、余弦公式是在和角的正弦、余弦公式中令 $\alpha=\beta$ 而得到。这种“令”的方法就是数学中很重要的一种方法。其后的和差化积公式又是在积化和差公式中令 $\alpha+\beta=\theta$，$\alpha-\beta=\varphi$ 而导出的。

在解答一个具体题目时，也常常用这种“令”的方法。如，已知α、β是锐角，且 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{5}$，求 $\sin\beta$ 的值。

只要在差角的正弦公式中令 $x=\alpha$，$y=\alpha-\beta$，由 $\sin(x-y)=\sin\beta$ 很简便地就能求得。

$\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$$=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{1}{5})^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}-\frac{1}{15}$$

$$=\frac{8\sqrt{3}-1}{15}$$

即 $\sin\beta=\frac{8\sqrt{3}-1}{15}$。

（3）命题的灵活综合应用。对于一个定理、公式，特别是一些重要的定理和公式，如三垂线定理、二项式定理、有关曲线的对称的定理[奇（偶）函数的图象关于坐标原点（y 轴）对称的定理，函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的定理]、三角函数的和差化积与积化和差的公式、万能置换公式、等差（等比）数列的通项公式和前 n 项和公式都不是一讲就通、一学就透、能灵活运用的，必须在章节复习和以后的学习过程中，乃至总复习时逐步加以补充完善，才能学得比较好些，才可能达到灵活、综合运用，因此要注意学习的阶段性和连续性，既不能在低年级时，去做难以达到的事；也不能在高年级时，不注意原来学习的知识。必须有意识地对低年级所学的内容，乃至小学、初中学的内容进行复习、加深、拓广，使之达到综合运用知识的目的。

数学例题学习的步骤和方法

在教材中，每一节继基础知识之后总安排有例题。因此怎样学习例题是

一个值得探讨的问题。

一般说来，例题是典型的具体代表性的题目，例题的解答过程是运用理论解决具体问题的过程。所以说例题的作用不仅是复习巩固基础知识，而且能培养学生由一般到特殊的演绎推理能力，反过来又能加深学生对基础知识的理解。例题的解答方法也往往是典型的重要的方法。学好一个例题往往能掌握解决一类问题的方法。

然而在学生学习例题时，往往认为例题简单而一看了之，或是机械地记忆解题过程，这样不仅不能充分发挥例题的作用，而且妨碍了学生解题能力和思维能力的提高。因此学生要特别重视学习例题的方法。学习例题一般应掌握以下几个环节：

1.审题

在读题的基础上，了解题意，搞清题目所给的条件，特别是某些隐含条件，明确题目的要求，画出相应的图形。

这里重点谈谈“隐含”条件问题。因为这是学生解题时常常忽视的问题，也是导致错误的根源之一，隐含条件一般有以下几种情况。

（1）常用的性质和定义中的特定条件。如二次函数或二次方程中的二次项系数，零指数的底数，对数中的底数和真数，偶次根式的被开方数，公式的分母等的隐含条件。

（2）函数的定义域和值域或方程中变量的取值范围如 sinx 的值域，arcsinx 的定义域和值域，a^x 的值域，$x^2+y^2+2x=0$ 中 x 和 y 的取值范围等。

（3）几何中特定图形的限制条件。

2.寻求解题思路

（1）联想筛选寻求思路。这是最常用的一种方法。首先根据题目的条件联想由此而得出的结论，再由此结论联想其它的结论，然后根据题目的要求联想必需得到什么才能使问题得以解决，并根据图形的特点联想有关的知识和方法。显然，联想的知识越多，所学的知识越系统、所能寻到的解题方法也就越灵活，解题的技巧也就越高。因而在联想的过程中可以增强知识的系统性和综合性。

在联想的基础上要进行筛选，找出能够沟通条件和结论的路线，从而理清解题思路，弄清解题的方法和步骤。

（2）追溯发现过程，寻求解题思路。课本中有些题目的解题思路不易想出，其解证方法孕育在发现结论的过程中，数学归纳法部分尤为突出，因此要追溯得出结论的过程，从而找到解题思路。

3.解答

解题思路明确后，要用严格的格式，准确的数学语言写出题目的解答，这对于培养学生的数学表达能力是非常必要的。

4.小结

在题目解答完毕后，首先要剖析题目中的各条件的作用。思考去掉或改变这些条件会引起什么变化，特别是逆向变化，然后对有多种解法的例题，要把各法加以比较，从中选优，还要注意从解题方法上、运用题目的结论寻求解题的规律和技巧，对有些例题还应注意随着知识的增加而逐步加深和拓广。

行之有效时作出小结，这是学习数学不可缺少的一步，但也是往往被人忽视的。通过总结可使学生准确掌握知识和解题方法。通过一题多解和变题

可培养学生的发散思维能力，使学生得到规律性的方法，达到举一反三，学一知十的目的。

附：小学书面练习“五步”法

教学练习是为了加深学生对数学知识的理解，形成熟练的技能，发展学生的思维。为了达此目的，在数学书面练习时采取五步清是行之有效的，即：一读、二找、三说、四算、五想。

具体做法是，将每个练习题按编排的层次分成若干组，在每组中选有代表性的习题进行指导，分五步进行。

一读

就是不论什么类型的题目，首先认真读题。读题方式要多样，长题默读，短题齐读，式题变换方法读，如“95+25”可读成“95 加上 25”，“95 与 25 的和是多少”，“比 95 大 25 的数是多少”。这样就将计算的实际意义揭示出来了，对于文字题与应用题则要求学生逐步做到读有轻重缓急，关键词语重读，易忽略的地方拉长声读。另外，对于有些叙述繁琐的题目，则要求学生能抽其筋骨读，以明晰数量关系。

二找

就是找出式题的计算顺序，简算题的特征，已知条件与要求的问题，混合运算式题，要求学生在运算符号下面标出计算顺序。简算题可在题目下面标出表示有关运算定律的字母。应用题的已知条件与要求的问题尽量做到用图表表示出来，分数应用题、行程问题都要逐步训练用线段图表示出条件与问题。对于难以用图表表示的题目则要求在已知条件与要求的问题下面画出不同的线条。

三说

就是说一说自己的解答步骤或解题思路，这是较为困难的一步，在进行中要注意三点。①从易到难，先可选择与所教学的例题大致相似的题目让学生模仿地说，再逐步加深难度，适当做些变化。②注意到让所说题目的难度大小与学生程度的高低合理搭配，以保护、培养差生的积极性，防止优生的自满。③要鼓励学生多角度地思考问题，提出异议。

四算

就是在计算结束后进行纵横比较，找出题与题之间的异同点，与以前所学知识的区别与联系，也可结合新课的预习想想所掌握的知识对学习新课的作用，还可分小组讨论各种计算方法的优劣，分析错误的原因。

数学解题检验十三法

1.量纲法

数学是从客观世界中抽象出来的一门科学，其结果当然也要符合客观物质世界的实际情况。因此，对于具有明显几何意义或物理意义的解题结果用量纲检验是一种十分有效的简便方法。

例：在锐角三角形 ABC 中，AB=c，AC=b，∠BAC=α

求证：△ABC 的重心 G 到 BC 的距离为

$$d=\frac{b\sin\beta}{\sqrt[3]{(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

检验 随便这一个长度单位，先看看该式两边与量纲是否相同，若选“米”为单位，则该式左边的量纲是“米”，而右边的量纲却是“（米）”，说明所得表达式不正确，可能题目传抄失误。

2.概念法

运用数学的基本知识和基本概念以及人们的生活经验进行快速的估计和直觉的判断可以检验答案的真实性。

例 如果a、b为有理数，且$\sqrt[3]{a}$和$\sqrt[3]{b}$是两个最简三次根式，那么$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$的有理化因式是什么？

解：依题意可知，$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$的有理化因式是$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$。

检验 “两个含有根式的代数式相乘，如果它们的来积不含根式，就称这两个代数式互为有理化因式。”这里（$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$）（$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$）$=a-\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{a^2b}-b$不是有理式，故题解错误。由于（$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$）（$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$）$=a+b$，故$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$的有理化因式为$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$。

3.估算法

利用人们的生活经验所提供的信息进行估计，是简便易行的检验方法。关于计算人步行速度的应用题中，如呆得到的答案是每小时步行 100 公里，那么就可以断言，或者是题解有错，或者是命题者不了解普通的生活常识。一般说来，命题是以客观实物的数量指标为背景的，所以，在通常情况下，可以断定计算必有错误，需重新检查每一步解答。

4.条件法

解答数学题，关键在于充分利用题设条件，沟通条件与问题或条件与结论间的逻辑联系，条件检验是从数学题的条件入手，全面检查已知条件是否充分利用，题解的各个环节与已知条件是否矛盾。

（1）考虑是否利用了所有的已知条件。如果完成了对某个问题的解答，却又没有用或未用完所给的全部条件，那么必须引起我们警惕和深思。

（2）是否考虑了题中的隐蔽条件。解题中的错误常常来自忽视隐于题设的背后隐含条件。因此，进行条件检验时，要在观察和分析题中的隐含条件上多下功夫。

例 如果 k、k＋1、k＋2 是钝角三角形的三边，求 k 的取值范围。

解：因 k＋2 是三角形的最大边，那么它所对的角 θ 必为钝角。由余弦定理得，

$$\cos\theta=\frac{k^2+(k+1)^2-(k+2)^2}{2K(k+1)}=\frac{k^2-2k+3}{2k(k+1)}$$

$$=\frac{k-3}{2k}<0。$$

解得 0＜k＜3。

检验上面的解答似乎无懈可击，但却是错误的，细察题意，这是一个有关三角形边长的问题，故蕴含着“任意两边之和大于第三边”的隐蔽条件。

若在 0＜k＜3 内取 k=1，则 k=1、k＋1=2、k＋2=3，此三段不可能构成三角形。

略解：设 k＋2 所对的角为θ，则 cosθ＜0，k＞0，k＋（k＋1）＞k＋2，解得 1＜k＜3。

$$\frac{k^2+(k+1)^2-(k+2)^2}{2k(k+1)}<0。$$

（3）考虑题解答案与条件是否和谐。任何一个严密的数学问题都应该是一个有机的整体，其各个部分的关系非常密切，并且表现出一定的和谐性。因而必须重视条件之间、条件与结论之间配合的和谐性。

5．特例法

一个数学结论的成立必须对其允许的各种可能情况均经判断成立后，才能确认，因此，要否定一个数学命题，只要举出一个令其不能成立的特例即可。

特例检验就是从这一思想出发，当我们获得一般性的结论时，用一些适合题意的简单数值、简化问题、给予特例等代入后的结果也一定正确。否则，即可断定题解有误。

例 将代数式 $\dfrac{2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}$ 简化后答案为 $\dfrac{3}{x}$，检验其结果有无错误。

检验可根据代数式恒等变形的意义，取特殊值检验之。如，令 x=2，则

原式 $=\dfrac{2+\dfrac{1}{2-1}-\dfrac{1}{2+1}}{2+\dfrac{2}{2^2-1}}=1$，答案为 $\dfrac{3}{x}=\dfrac{3}{2}$ 两者不相一致，可见答案错误。

6．规律法

看运算结果是否符合客观规律。有些题目在结果中出现与现实生活相矛盾或违背客观规律的情况。如得出的结论中，人数出现分数或小数，面积、长度出现负数，时间出现虚数等，有的结果与题目本身有矛盾，如题目给一个量杯最多能盛 1 升水，可计算结果却出现量杯盛水超过 1 升的结论。又如得到三角形内角和超过 180°，求得水的沸点为 200℃等等，一般都可以判断运算出了错误。

7．逆运算法

用逆运算检验，数学中的加与减、乘与除、乘方与开方是互为逆运算的关系，遇到这一类的运算，可用逆运算反过来再计算一下，看结果与题设是否相符。

8．推理法

解答数学题的过程，实质上是一系列变形、推理过程，如果各步推理都有充分的依据，又遵守相应的逻辑规则，那么题解正确，反之，即可判断题解错误。

推理检验，是从检查题解的推理入手，全面考虑推理依据是否真实，推理过程是否合乎逻辑。

9．代入法

用所得结论代入原命题进行计算。比如解方程一类的题目，可以把得到的 x、y 的值代入原方程进行计算，看方程两边是否相等。对解恒等式、不等

式一类题目，把结果、允许值范围代入原式看是否符合题设。对解因式分解的题目可以把得到的因式相乘展开，看是否得到原式，等等。

10.取值法

在推理检验中，我们强调了结合题意，注意充分条件和必要条件在推理中的关系，即考察问题变换的等价性。然而，解答数学题时，等价变换并非永远可行。在某些情况下，如解分式方程时去分母、解无理方程时有理化、解超越方程时变量替换等等，都不得不施行某些非等价变换来促使问题的转化。但是，非等价变换有可能使解答失真，解方程时的非等价变换可能引入增解或失解。

取值范围的检验，是从原方程及逐次变形时未知数的可能取值范围入手，来确定方程增、失解的一种检验方法，这种方法在一般情形下，比直接代入验根要简便得多。

例 解方程$\sqrt{1+\sqrt{2x-\sqrt{5x^2-17x+10}}}=3$。　　(1)

解：方程（1）两边平方，得$\sqrt{2x-\sqrt{5x^2-17x+10}}=8$。　　(2)

方程（2）两边平方，得$\sqrt{5x^2-17+10}=$（$2x-64$）　　(3)

方程（3）两边平方，得$5x^2-17x+10=$（$2x-64$）^{2}，　　(4)

即 $x^2+293x-4086=0$。

$\therefore x_{1、2}=\dfrac{-239\pm\sqrt{73465}}{2}$。

检验 数字太大，将 x_1、x_2 分别代入原方程检验是很麻烦的，其实，只须对解题过程作一逻辑分析，注意未知数的可能取值范围便能达到目的。很明显，（1）$\Rightarrow$（2）、（2）$\Rightarrow$（3）都是等价变换（两边都不小于0），而因为（3）的右端$2x-64$不能肯定是否不小于0，所以（3）$\Rightarrow$（4）有增根可能，将 x_1、x_2 分别代入 2x—64，若不小于 0，即为原方程根；若小于 0，即为增根。此时，x_1、x_2 都是增根，原方程无解。

11.对称法

对称，是数学美的一个基本内容，它反映了数学对象之间内在的联系，从具有某种对称性的对象推得的结果，也应该具有相应的对称性，否则，就可以怀疑所得结果的正确性。对称检验，就是利用了这一特性。

例 展开（a＋b＋c）（-a+b＋c）（a-b＋c）（a+b-c），学生作出的答案繁多，如

（1）$-a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$；

（2）$2(a^2b^2+b^2c^2+C^2a^2)-(a^4+c^4)$；

（3）$-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2$；

（4）$-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

检验 由于所给式子关于 a、b、c 轮换对称，故展开式仍应为轮换对称式。因此，立即可知答案（1）、（2）和（3）均不具备这一性质，唯有答案（4）可能正确。

12.数形法

数形结合观点是数学的一个基本观点。数形结合可使我们有可能通过数

量关系的讨论来研究图形性质；另一方面，也可利用几何图形直接地反映函数或方程中变量之间的关系。数形结合不但可以相互启发、互相补充，也有互相印证的作用。比如对行程中的追击问题，把表示时间、距离、速度的坐标画在纸上，三者之间的关系一目了然。

例 在 120°的二西角 α-AB-β 内一点 P 到平面 α 的距离为 1，到棱 AB 到距离为$\sqrt{6}$。

求：（1）点 P 到另一个平面 β 的距离；

（2）点 P 到两个平面的垂足间的距离。

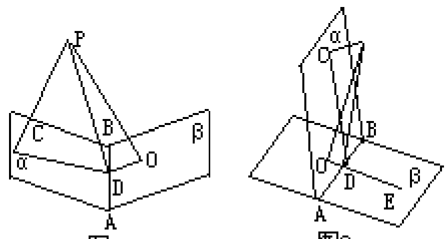


图1 图2

学生常将图形画成图 1 的情形，以为点 P 到平面 β 的距离为垂线 PO 的长，其垂足为 O。

检验 由图1可知$PC = 1$，$PD = \sqrt{6}$，$\angle PDC = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6} < \frac{\pi}{6}$，$\angle PDO = \frac{2\pi}{3} - \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6} > \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$，则点P到平面β的垂足O应落在半平面β的反向延展面上，即为图2的情形。

13.多解法

“抛两个锚比抛一个锚更安全”，有多种解法比只有一种解法更令人放心，比如一道题可以用不同的方法、不同的途径解出结果。有的还可以分别用代数法、几何法、三角法得出结果，这种检验方法不但能准确地检验计算结果是否正确，还能加强知识间的联系，增强分析问题的能力，特别是当仅有的一种解法比较冗长、曲折，自己感到把握不大时，最好探求一下其它的解法，以便相互比较和印证。

例 用 0、1、2、3、4、5 六个数字能组成多少没重复数字的六位奇教？

解：六个数字能组成 P_6 个六位数，减去其中 0 排首的 P^5 个；又由于 1、3、5 是六个数字中的一半，于是六位的奇数有（P_6-P_5）=300（个）。

检验 六个数字能组成 P_6 个六位数，减去 0、2、4 分别排末的各 P_5 个，以及减去 0 排首而 1、3、5 分别排末的各 P_4 个，因此，组成的六位奇数有 P_6-3P_5-3P_4=288（个），仔细比较两种解答，发现原题解错误原因是 1、2、3、4、5 分别排末的六位数是（P_5-P_4）个，但是 0 排末的六位数却有 P_5 个，即比其它数字排末多 P_4 个，列式时未曾注意到，重复了 P_4=12（个）。

最后需要强调指出，有些检验法只能用来进行直觉估计。它的通过并不能保证题解的正确，如量纲检验、特例检验、对称检验等等。但尽管如此，这些仍不失为有效的方法。如果把两种或两种以上的检验法结合起来，将收到相辅相成，事半功倍的效果。

小学生查错习惯培养

培养小学生查错习惯十分重要，一般可运用下面的一些方法，培养学生的查错习惯。

1.在解题时，步步用概念查错

解题过程中离不开概念，因此，弄清概念是查错的前提，例如，一种农药，药液与水重量的比是 1∶1000。（1）3 克药液要加水多少千克？（2）如果要配制 8080 千克药水，要用多少千克药液？解这道题时，为了防止可能发生的计算错误，应要求学生弄清“按比例分配”和“正比例”的联系和区别。

2.题目解错后，应重新审题

弄清已知条件，正确地建立数量关系，从而列出算式。

3.运用一些常见错误，进行判断、选择训练

例如，铺一块地，用边长 0.3 米的方砖需要 576 块，如果改用边长 0.4 米的方砖，需要多少块？解法如下：设需要边长 0.4 米的方砖 x 块，0.4×x＝0.3×576，x=432。此解法对吗？为什么？

4.备一本错题本，吸取平时教训

在平时作业中的一些错例，可摘录在自己的错题本上，并写出产生错误的原因和纠正的方法，经常这样做可以吸取平时的教训，在以后的学习中避免或减少错误的产生。

（1）写原因。开始学生写的原因总是“粗心”、“态度不认真”、“上课没有听，保证以后做好作业”等宽泛空洞近似于检讨书保证书一类的话，后经指导，要求写具体原因，是什么地方错的，怎么错的，为什么错的等等。如：

①抄错题，把 2.5 写成 25。

②结果是近似值，应该用≈。

③每天烧煤 3.2 吨，8 天烧多少吨列式是 3.2×8，我写成了 8×3.2，是没有认真审查造成的。

（2）把自己错误的原因归类整理。学生之间相互交流。共同形成做作业中应注意的几个问题，如做计算题应注意：

①题目有没有抄错？

②计算顺序对不对？数式有没有遗漏？

③计算法则有没有混淆？

④小数点处理是否正确？

⑤是不是近似值？要不要用≈？

上述是五年级学习小数四则混合运算内容时列出的 5 点应注意的问题。针对不同的年级、不同的学习内容，可列出更加贴近具体的注意点。

数学知识记忆十九法

心理学告诉我们，记忆分无意记忆和有意记忆两种。要使记忆对象在大脑中形成深刻的映象，一般来说要通过反复感知，有些记忆对象，由于有明显的特征，只要通过一次感知就能记住，经久不忘，这就是无意记忆。有些记忆对象，由于没有明显特征，即使通过三、五次感知，也很难记住，而且容易遗忘，这就需要加强有意记忆。

1.口诀记忆法

中学数学中，有些方法如果能编成顺口溜或歌诀，可以帮助记忆。例如，根据一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$，$\triangle>0$）与 $ax^2+bx+c<0$（$a>0$，$\triangle>0$）的解法，可编成乘积或分式不等式的解法口诀：“两大写两旁，两小写中间”。即两个一次因式之积（或商）大于 0，解答在两根之外；两个一次因式之积（或商）小于 0，解答在两根之内。当然，使用口诀时，必先将各个一次因式中 X 的系数化为正数。利用口诀时，必先将各个一次因式中 X 的系数化为正数。利用这一口诀，我们就很容易写出乘积不等式 $(x-3)\cdot(2x+1)>0$ 的解是 $x<-\frac{1}{2}$ 或 $X>3$，公式不等式 $\frac{x+2}{3x-1}<0$ 的解是 $-2<x<\frac{1}{3}$。这种记忆法对低年级特别适用。

2.形象记忆法

有些知识，如果能借助图形，可以加强记忆。例如，化函数 $y=a\sin x+b\cos x$（$a>0$，$b>0$）为一个角的三角函数，可以用 a、b 为直角边作一直角三角形 ABC，则斜边 $AB=\sqrt{a^2+b^2}$，于是 $a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta$. $b=\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta$，$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$。这样就很容易记忆。又如，利用指数和对数函数的图象，可帮助记忆其性质、定义域和值域；利用三角函数的图象，可帮助记忆三角函数的性质、符号、定义、值域、增减性、周期性、被值；利用二次函数的图象，可帮助记忆抛物线的性质——开口、顶点、对称轴和极值。

3.表格记忆法

有些知识借助表格也能帮助记忆。例如，0°、30°、45°、60°、90°等特殊角的三角函数值；等差与等比数列的定义、一般形式、通项公式 a_n、前 n 项的和 s_n 性质及注意事项；指数与对数函数的定义、图象、定义域、值域及性质；反三角函数的定义、图象、定义域、主值区间、增减性及有关公式；最简三角方程的通值公式等等，都可以用表格帮助记忆。有些数学题的解题方法，也可以用表格化难为易、驭繁为简。例如，用列表法解乘积或分式不等式，解含绝对值符号的方程或不等式，计算多项式的乘法，求整系数方程的有理根等等，都是很好的方法，这种记忆法在复习中尤其应该提倡。

4.联想记忆法

对新知识可以联想已牢固记忆的旧知识，用类比的方法来帮助记忆。例如：高次方程的根与系数的关系，可以类比二次方程的韦达定理来帮助记忆；一元 n 次多项式的因式分解定理可以类比二次三项式因式分解定理来帮助记忆。有些数学题的解法也可以用联想的方法帮助记忆。例如，联想到实数的有序性，我们容易写出乘积不等式 $(2x+1)(x-3)(x-1)(2x+5)>0$ 与分式不等式 $\frac{(x-1)(2x+5)}{(2x+1)(x-3)}>0$ 的解都是 $x<-\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{1}{2}<x$ 或 $x>3$。这只要把与四个一次因式对应的四根（又叫零点）由小到大排列为 $-\frac{2}{5}$、$-\frac{1}{2}$、1、3，这四个根把数轴分为五个区间，在最右一个区间 $x>3$ 内，$x-(-\frac{2}{5})=\frac{2x+5}{2}$、$x-(-\frac{1}{2})=\frac{2x+1}{2}$、$x-1$、$x-3$ 均为正数，因此 $x>3$ 即为原不

等式的一个范围内的解。写出了这个范围的解，其余范围的解就可以每隔一个区间向前很顺利地写出。可见，将每一个一次因式中 X 的系数都化为正数后，用实数的有序性来解乘积或分式不等式是十分方便的。

5.分类记忆法

遇到数学公式较多，一时难于记忆时，可以将这些公式适当分组。例如求导公式有 18 个，就可以分成四组来记：(1) 常数与幂函数的导数（2 个）；(2) 指数与对数函数的导数（4 个）；(3) 三角函数的导数（6 个）；(4) 反三角函数的导数（6 个）。求导法则有 7 个，可分为两组来记：(1) 和差、积、商复合函数的导数（4 个）；(2) 反函数、隐函数、幂指函数的导数（3 个）。

6.“四多”记忆法

要使记忆对象经久不忘，一般来说要经过多次反复的感知。“四多”即多看、多听、多读、多写。特别是边读边默写，记忆效果更佳。例如，甲对某组公式单纯抄写四次，乙对同组公式抄写两次然后默写（默写不出时可看书）两次，实验证明，乙的记忆效果优于甲。

7.静心记忆法

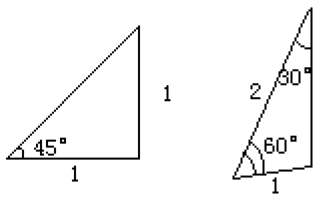
记忆要从平心静气开始，根据一定的记忆目标，找出适合于自己学习特点的记忆方法。比如记忆环境的选择就因人而异。有人觉得早晨记忆力好；有人感到晚上记忆力好；有人习惯于边走边读边记；有人则要在安静的环境下记忆才好等等。不管选择何种方式记忆，都必须保持“心静”。心静才能集中注意力记忆，心静才能形成记忆的优势兴奋中心，记忆需从静始！

8.首次记忆法

首次记忆有四种方式：

(1) 背诵记忆法。将运算过程和结果在理解的基础上背诵记熟，这种记忆称为背诵记忆。比如，加法与乘法法则，两数和、差的平方、立方的展开式等记忆都是背诵记忆。

(2) 模型记忆法。有许多数学知识有它具体的模型，我们可以通过模型来记忆。有些数学知识可有规律的列在图表内，借助于图表来记忆，这些记忆都称模型记忆。



例如，要记住特角 30°，45°，60° 的三角函数值，可以通过两模型来记忆。

(3) 差别记忆法。有些数学知识之间有许多共性，少数异性。要记住它们，只需记住一个基本的和差异特征，就可以记住其它的了，这种记忆称为差别记忆。

例如，平行四边形、菱形、矩形和正方形的定义，我们只要记住平行四边形的定义和它们之间的差异特征就可以了。

平行四 $\xrightarrow{\text{四边相等}}$ 菱形 $\xrightarrow{\text{有一角为直角}}$ 正方形

边形 $\xrightarrow{\text{有一角为直角}}$ 矩形

（4）推理记忆法。许多数学知识之间逻辑关系比较明显，要记住这些知识，只需记忆一个，而其余可利用推理得到，这种记忆称为推理记忆。

例如，平行四边形的性质，我们只要记住它的定义，由定义推得它的任一对角线把它分成两个全等三角形，继而又推得它的对边相等，对角相等，相邻角互补，两条对角线互相平分等性质。

9.重复记忆

重复记忆有三种方式。

（1）标志记忆法。在学习某一章节知识时，先看一遍，对于重要部分用彩笔在下面画上波浪线，在重复记忆时，就不需要将整个章节的内容从头到尾逐字逐句的看了，只要看到波浪线，在它的启示下就能重复记忆本章节主要内容，这种记忆称为标志记忆。

（2）回想记忆法。在重复记忆某一章节的知识时，不看具体内容，而是通过大脑回想达到重复记忆的目的，这种记忆称为回想记忆，在实际记忆时，回想记忆法与标志记忆法是配合使用的。

（3）使用记忆法。在解数学题时，必须用到已记住的知识，使用一次有关知识就被重复记忆一次，这种记忆称为使用记忆。使用记忆法是积极的记忆，效果好。

10.理解记忆法

知识的理解是产生记忆的根本条件，对于数学知识特别要通过理解、掌握它的逻辑结构体系进行记忆。由于数学是建立在逻辑学基础上的一门学科，它的概念、法则的建立，定理的论证，公式的推导，无不处于一定的逻辑体系之中，因此，对于数学知识的理解记忆，主要在于弄清数学知识的逻辑联系，把握它的来龙去脉，只有理解了的东西才能牢固记住它。因此，数学中的定理、公式、法则，都必须弄通它的来龙去脉，弄懂它们的证明过程，以便牢固记住它们。

用好这一方法的关键，在于学习要注意理解，这一方法，不仅对于数学学习，就是对于其它学科的学习都有着广泛的应用。应十分重视。

11.系统记忆法

有位青年总结自己的经验得出：“总结+消化=记忆”。这正是根据系统记忆法的思想总结出来的。因为系统记忆法，就是按照数学知识的系统性，把知识进行恰当的比较、分类、条理化，顺理成章，编织成网，这样记住的就不是零星的知识而是一串，它往往采取列表比较的形式，或抓住主线、内在联系把重要概念、公式和章节联系串为一个整体。

在学习中，应用系统记忆法来小结，总结整理自己的知识系统，对掌握知识大有裨益。

12.简化记忆法

根据记忆目标的特点或自身规律，使用适当方法将记忆目标简化，是减轻记忆负担、提高记忆效率的有效方法。

（1）口诀简化。中学数学中，有些方法如果能编成顺口溜或歌诀，可以帮助记忆。例如，根据一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$，$\triangle>0$）与 $ax^2+bx+c<0$（$a>0$，$\triangle>0$）的解法，可编成乘积或分式不等式的解法口诀：“两大写两旁，两小写中间”。即两个一次因式之积（或商）大于 0，解答在两根之外；两个一次因式之积（或商）小于 0，解答在两根之内。当然，使用口诀时，必先将各个一次因式中 x 的系数化为正数。利用这一口诀，就

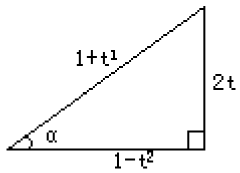
很容易写出乘积不等式（x-3）·（2x+1）＞0 的解是 x
＜$-\frac{1}{2}$或$x>3$，分式不等式$\frac{x+2}{3x-1}<0$的解是$-2<x<\frac{1}{3}$。这种记忆法对低
年级特别适用。

（2）图表简化。有些知识借助表格也能帮助记忆。例如，0°、30°、45°、60°、90°等特殊角的三角函数值；等差与等比数列的定义、一般形式、通项公式 a_n 前 n 项的和 s_n 性质及注意事项；指数与对数函数的定义、图象、定义域、值域及性质；反三解函数的定义，图象、定义域、主值区间、增减性及有关公式；最简三角方程的通值公式等等，都可以用表格帮助记忆。有些数学题的解题方法，也可以用表格化难为易、驭繁为简。例如，用列表法解乘积或分式不等式，计算多项式的乘法，求整系数方程的有理根等等，都是很好的方法，这种记忆法在复习中尤其应该提倡。

（3）目标简化。筛选出记忆目标中具有代表性的部分，用以取代记忆目标的整体，是简化记忆的又一常用方法。三角函数的积化和差与和差化积公式各有四个，可利用两角和与差的正余弦公式，由一组中的四个导出另一组中的四个，因而可着重记忆积化的差公式即可。

（4）取名简化。给记忆目标取一个形象的名字，可顾名释义，记起这个记忆目标。例如，对不等式｜a｜-｜b｜≤｜a±b｜≤｜a｜+｜b｜，针对其特征，设某三角形的三边之长分别为｜a｜、｜b｜、｜a±b｜，由于三角形的三边关系（两边之和大于第三边，两边之差小于第三边）满足这个不等式，故给其取名为“三角形不等式”。

（5）转换简化。把复杂难记的记忆目标甲，转换为简单易记或早已熟记的事物乙，把乙连同甲与乙相互转换的方法，作为新的记忆目标记忆。当需用甲时，大脑会同时再现出甲、乙及甲与乙的转换方法，此时甲往往是模糊的，而乙却是清晰的，转换乙便得到了清晰的甲，如万能公式，可利用图所示的 Rt△的边角关系记忆：



$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$　$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$、$tg\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$(其中$t=tg\frac{\alpha}{2}$)。

13.联合记忆

把具有相关意义的两个或两个以上的记忆目标，联合在一起记忆，往往比孤立地记忆其中一个还要容易，这是因为，利用它们的相关意义由此及彼地联想，经过相互印证、相互补充，必然能收到事半功倍的记记效果。

（1）近似联合。把音、义、式、形等方面具有一定相似之处的几个记忆目标联合在一起。如把同次根式与同类根式的定义联合在一起；把全等三角形与相似三角形的判定定理联合在一起；把$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)h$、$s_{棱台侧}=\frac{1}{2}(c+c')h'$及$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}(c+c')l$联合在一起；把椭圆与双曲线的有关知识联合在一起；把函数 f（x＋k）与 f（x）的图象之间的关系、三角中$y=\sin(x+\varphi)$与$y=\sin x$两图象之间的关系，以及

解析几何中 F（x＋k，y＋h）=0 与 F（x，y）=0 两曲线之间的关系联合在一起。

（2）反正联合。把具有某种相反意义的两个记忆目标联合在一起。如把查对数表的方法与查反对数表的方法联合在一起；把充分条件的定义与必要条件的定义联合在一起；把三垂线定理与其逆定理联合在一起等。

（3）递进联合。把具有从属关系的几个概念，或具有因果关系的几个定理（公式）连同它们的先后顺序联合在一起记忆，不仅可由前者推出后者，而且也可由后者感知前者。如把对应、映射、一一映射、逆映射等概念联合在一起；把棱柱、直棱柱、正棱柱、长方体、正方体等几何体的定义联合在一起；把两角和的正余弦公式、二倍角公式、半角公式等联合在一起等等。

14.意趣记忆

有意义的和感兴趣的事物容易记住，这是每个有记忆力的人的共同感受，把平淡、枯燥的记忆目标意趣化，例如，利用谐音或者生动形象的比喻等，都是强化记忆的有效方法。

15.对比记忆法

是将一些相似的数学材料，列出它们的相同或相异点来比较的记忆方法。例如平面与空间图形的性质，等差数列与等比数列的特征，微分与积分定义、公式、微分方程所描述的不同的物理模型、相似或相互对立的一些概念等等，应用对比记忆法都可收到良好的记忆效果。

16.逻辑记忆法

按照知识的顺序、层次、系统列出某单元知识结构图，根据知识结构图逐步分层记忆，可提高记忆的效率。例如，三角函数的和差角公式，倍角与半角公式，和积互换公式，就可按证明过程的逻辑先后顺序列出公式结构图帮助记忆；同角的三角函数间的关系（俗称八大公式）可根据三角函数线利用单位圆来帮助记忆；三角形的各种面积公式可按下面的逻辑顺序记忆：

$$\Delta=\frac{ah_a}{2}\begin{cases}\Rightarrow\Delta=rs\\ \Rightarrow\Delta=\dfrac{ab\sin C}{2}\begin{cases}\sin C=\dfrac{c}{2R}\\ =\Rightarrow\Delta=\dfrac{abc}{4R}\\ =\Rightarrow\Delta=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}\\ \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}\Rightarrow\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{cases}\end{cases}$$

式中$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，r，R分别为内切圆、外接圆半径。

17.交替记忆法

即是把不同的学习内容、不同的学科互相交替记忆；把学习和休息、学习和体育锻炼互相交替。这样，可以提高大脑的记忆力。

18.分布记忆法

在理科和数学的学习中，也可移植丰子恺先生的“二十二遍读书法”：第一天读十遍，第二天、第三天各读五遍，第四天读二遍。这样的记忆，大

脑细胞可以得到适当的休息，用脑比较省力，既符合加强首次感知的规律，又符合记忆保持的规律。反之，老是重复同一材料，单调的刺激，容易引起大脑皮层的保护性抑制，使记忆力衰降。

19.循环记忆法

即是将要记忆的材料分成若干组，当记后几组时，要有规律地复习记忆前面的几组。也可用此方法于自学读书。当阅读一本数学书时，先读第一章并记忆其中的一些主要结果；在读第二章以后的书时，应分别简要地复读前一章书中的主要结果；读一章书也一样，应在读后节内容之前，复读一下以前各节的主要内容。这样的循环记忆，实则是在强化识记的痕迹，利于记忆的保持，自然可收到深刻记忆的效果。

数学公式的记忆步骤和方法

1.弄清公式结构

例 二项展开式为：

$(a+b)^n$

$= C_n^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$。

对公式右边作如下分析：（1）共有（n＋1）项，全带正号；（2）每项由三部分的积组成，呈 Cab 的形式；（3）a 的指数从高到低（n 到 0）；（4）b 的指数从低到高（0 到 n）；（5）C 的下标恒为 n，上示从低到高，明白以上五点后，学生即可逐步写出这个公式。开始可能慢了些，但熟练后，即可直接写出二项展开式。

2.赋予一个名称，或使用一个记号

有时候，为了加深对某个公式的印象，可以自己赋予某一公式的部件以一个合适的名称，也可以使用一个恰当的记号。经过这种刺激，反而使学生记住这一公式。

例如，点（x_0，y_0）到直线 Ax＋By＋C=0 的距离 d 由下公式计算：

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

此外，分子容易记住：把点代入直线方程一般式的左边后，再取绝对值。但分母可能要忘却，我们称$\sqrt{A^2 + B^2}$为（该直线方程的）法化因子。由于此名称关系，学生就会记住：还要除以一个叫法化因子的东西——而这正是我们的目的。

当然，名称也并非胡撰的。事实上，直线方程在化为法线方程时，确实需要除以$\sqrt{A^2 + B^2}$，故称其为法化因子。

数学上有些公式，或是不常用到，或是重要性相对来说较为次要。这些公式，不必一定全部记住，只要记住其大概的推导方向，或推导方法。直到要用时，临时推导一下即可。

例如，万能公式中的一个$\cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2 - \dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \dfrac{\alpha}{2}}$

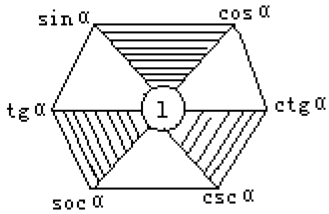
只要记住目的即可：$\cos\alpha$用$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$来表示，于是有：$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$=\frac{\cos 2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

4.利用图表

某些公式，可以制成一个图或一个表，借此，可较为轻松地记住这些公式。

例如，初学“同角三角函数间关系”对其中关系式可能较难记忆，右图可以协助记忆：



①对角线上两个三角函数乘积为 1。

如 sinα·cscα＝1。

②带阴影的三角形中，上面两个顶点上的值的平方和等于下面顶点上的值的平方。

如 $\sin^2 a+\cos^2\alpha=1$。

③六角形任一顶点上的函数值等于与它相邻的二个顶点函数值的乘积。

如 sisα=tgα·cosα。

5.代入特殊值

例如，对某学生来说，正弦函数的三倍角公式是甲？还是乙？

甲：$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，

乙：$\sin 3\alpha=4\sin^3\alpha-3\sin\alpha$.

他记不准了（主要该生把它与 cos3α的公式混淆起来了）。这好办，令$\alpha=30°$，从甲得$1=3\times\frac{1}{2}-4\times\frac{1}{8}=1$，真，而乙为$1=-1$，不对，故认定甲成立。

这里特别要注意，特殊值必须选好，要能区分，又要易于计算。如选α=60°，则无从区分。

6.编制口决

有时候，为了记住某个公式，或为了正确地使用公式，可以根据公式的特点编制一些口诀，运用口诀就可以较方便地解决这种记忆。

例：三角学中有所谓诱导公式，它由 54 个公式组成。如果记住这 54 个公式，脍炙人口的口诀“奇变偶不变，符号看象限”就完全解决了这一问题。

7.记住一般的公式。

有些公式，是更一般公式的特例。因此，单独记住它是不妥的。这似乎是“就事论事”。更主要的是，没能更深刻地揭示事物的本质，故还不如记住一般的公式为好。

例如，球缺的体积公式为：$V=\frac{\pi h}{6}(3r^2+h^2)$记住它，不如记住“球台”的体积公式：$v=\frac{\pi r}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$。

（所谓“球台”是在一个球缺上取下一个球缺后所成的几何体，但二球缺底面要平行）。

理由是简单的，球缺可以看作是球台的特例（$r_2=0$）。由球缺的体积公式去推出球台的体积公式是锻炼学生智力的一个极好的练习。

8.推广公式的意义或使用范围

推广公式的意义，实际上是多记住了一些公式，推广公式的使用范围，有助于减少记忆公式的个数。

9.用一句话，一种说法记住公式，或公式的关键部分，或公式的作用

例如，一平面图形面积为 S，该图形所在平面与某平面 M 成α角。该图形在 M 上射影面积为 S'，则有 S'=Scosα。这个立体几何中颇为有用的公式，请勿记为 S=S'cosα。这只要记住以下简单事实即可：在雨中一块木板所能挡住地面不遭受雨淋的面积决不大于木板本身面积。

10.结尾

初等数学本身也在追求容易记忆的公式。

初等数学中有许多公式，依靠数学手段，数学工具的发展，可以将原来较为复杂难于记忆的公式变为简单易记或较为统一的公式。从此意义上讲，初等数学本身也在追求容易记忆的公式。

例如，椭圆、双曲线、抛物线的标准方程如下：

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$y^2=2px$。

如果说前二公式很有相似之处，那么后一公式实在与前二公式大不一样，但在引进“极坐标”种方法后，三者方程居然可以统一为：

$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$。

这才深刻地揭示了圆锥曲线本质。从我们现在角度来说：这是一个值得记忆的公式，记住一个，等于记住了三个。

数学复习的常规方法

复习是学习的重要环节，它对学生牢固掌握所学知识，形成技能技巧，养成良好的学习习惯具有很大的作用。

1.日常复习

日常复习是复习体系中最重要的环节，通常是在学习新知后的当天中午或晚上进行。一般有五个环节。一想：先把当天所学内容在脑海里“过”一遍，想一想，今天主要学习了什么？老师是怎样讲的？二看：看课本中所学的全部内容，包括例题、图表、公式及法则的推导过程和结语等。三思：思考题，弄清知识的来龙去脉，将所学知识消化、吸收。四记：在理解的基础上，把需要牢固掌握的概念、法则、定律、公式等知识进行记忆，防止遗忘。五练：完成作业，巩固新知。

2.单元复习

一个单元学完后要进行系统复习。单元复习的方法一般有四种。

（1）小结法。将一个单元所学的数学知识，根据自己的理解，写出本单元的重点、难点和注意点，以便理清数学知识的脉络，抓住重点，做到胸中有数。

例如，圆的周长和面积单元：

重点：圆的周长和面积的计算。

难点：圆的面积和扇形面积公式的推导。

注意点：

①概念条件不能少。

②计算圆的周长用长度单位，计算圆的面积和扇形面积用面积单位。

③在计算时，圆周率π取 3.14，但并不就等于 3.14。

④扇形是圆的一部分，但圆的一部分不一定是扇形。

（2）比较法。将某一单元中出现的既有联系又有区别的概念、法则、解题方法及应用题用图表形式列举出来，找出它们之间的内在联系和本质区别，从而更牢固、更准确地理解和掌握数学知识。比和比例中的求比值与化简比、比和比例、正比例与反比例等概念及正比例应用题及反比例应用题就可用比较法进行复习。

（3）提纲挈领法。将某一单元的主要内容，根据课本目录和自己的理解，整理好复习提纲，使学生对本单元的学习内容做到心中有数，一目了然。

例如，分数的意义和性质：

①分数的意义（略）

②分数的种类
- 真分数＜1
- 假分数≥1
- 带分数＞1

③分数的基本性质（略）

④约分
- 什么是约分（略）
- 约分的方法（略）

⑤通公
- 什么是通分（略）
- 通分的根据：分数的基本性质
- 通分的方法（略）
- 分数的大小比较
  - 同分母
  - 同分子
  - 异分母、异分子

⑥分数和小数的互化
- 小数化分数
- 分数化小数

（4）知识点提要法。将某一单元所学的数学知识用图表形式简明扼要地归纳出来，从而沟通联系，形成网络，

3.总复习

总复习包括期中、期末和毕业复习。学习通过总复习可以更系统、更熟练地掌握数学知识和一些解题方法、为期中、期末或毕业考试作准备。总复习的方法一般有以下四种。

（1）系统归类法。将某一部分的数学知识，按一定标准，以图表形式系统整理，合理归类。这样不但能弄清数学知识的纵横内在的联系，而且能使学生更系统、更牢固地掌握某一部分数学知识的主要内容。

（2）提问法。让同座或相邻的两个同学根据某一部分复习内容互相提出问题，如概念、法则、定律、公式等让对方回答，发现问题及时补救。这样既能增强记忆，又能培养学生空间想象能力和语言表达能力。

（3）讨论法。在复习过程中，组织几个同学，就某一数学问题展开讨论，讨论时要求学生积极动脑，各抒己见，做到敢问、敢想、敢说。这样不但能充分调动学生学习的积极性，而且能增强学生的理解能力，发展学生的思维能力。

（4）检测法。就某一部分复习内容或全学年所学知识，自由组合，每人设计一份试卷交换检测。做完后由制卷人认真批阅评分，最后再交换意见，指出对方存在的问题，自己分析错误原因，并及时订正和补救。这样既培养了学生对知识的融汇贯通能力，又能使学生及时发现自己在学习中存在的问题，起到查漏补缺的作用。

教材复习六法

认真、深入地钻研教材中的例题和习题，是搞好复习的根本。这是因为：第一，课本上的例题和习题和所学的数学知识紧密相联；第二，课本中的例题和习题是经过编者认真编选出来的，是很典型的；第三，重视课本中的例题和习题，能引导学生重视教材，真正做到在复习时“以纲为纲”、“以本为本”；第四，通过对例题与习题的挖掘，可以培养发现和创造能力。

1.充分认识公式变式的构形特征

例如，复习等差数列的公式：

$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$；

$S_n=\frac{1}{2}n(a_1+a_n)=n\cdot a_{\frac{1}{a}(1+n)}$（n为奇数）；

$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=\frac{1}{2}dn^2+(a_1-\frac{1}{2}d)n$。

从公式的构形可见，（1）等差数列的通项公式是 n 的一次函数，斜率为 d，d＞0 递增，d＜0 递减；（2）S_n 可用等差中项表示；（3）Sn 是缺常数项的二次函数（$d\neq0$），若 $d<0$，当取 $n=[1-\frac{a_1}{d}]$ 时，S_n 最大，此此时 n' 满足 $a_{n'}>0$ 且 $a_{n'+1}<0$

例 等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$，问 S_1，S_2，…，S_{12} 中哪一项最大。

分析一：由 $S_{13}=13\cdot a_7=13(12+4d)<0\Rightarrow d<-3$。

$S12>0 \Rightarrow d>-\frac{24}{7}$，　**0**

$\therefore -\frac{24}{7}<d<-3<0$。

故当$n'=[1-\frac{a_1}{d}]=[3-\frac{12}{d}]$时$S_n$最大，而$5.5<-\frac{a_1}{d}<n'=[3-\frac{12}{d}]<7$，故$x_6$最大。

分析二：因$-\frac{24}{7}<d<-3<0$，故设S_1最大，则

$$\begin{cases}a_7>0,\\a_7+1<0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+pd-d>0,\\a_1+pd<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{a_1}{d}<p<1-\frac{a_1}{d}。$$

再由$S_{13}<0\Rightarrow -\frac{a_1}{d}<6$，$S_{12}>0\Rightarrow -\frac{a_1}{d}>5\frac{1}{2}$。

$\therefore 5\frac{1}{2}<-\frac{a_1}{d}<p<1-\frac{a_1}{d}<7$，

$\therefore S_6$最大。

2.熟练掌握课本中基本题型

复习时，应对课本中的常见基本题型、一般规律及一般解法达到熟练掌握，并注意基本题型的变形与演化，以及其特殊或一般的情况。在复习中，将与之相近的、相似的、或相关的各类题目，都联系原基本题型、从而达到举一反三、触类旁通的能力。

例如，在△ABC 中求证 tgA＋tgB＋tgC=tgAtgBtgC（证明略）。

这类题型的一般规律是：在 A＋B＋C=π的条件下，研究 A、B、C 的正（或余）切的和、差与积的关系，一般解法是应用诱导公式，看下列各题：

（1）求证：tg40°＋tg60°＋tg80°=tg40°tg60°tg80°；

（2）设 A+B+C=π，求证：

tgnA＋tgnB+tgnC=tgnAtgnBtgnC（n∈N）；

（3）设 A＋B＋C=π，求证：

$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}+\mathrm{ctg}\frac{B}{2}+\mathrm{ctg}\frac{C}{2}=\mathrm{ctg}\frac{A}{2}\mathrm{ctg}\frac{B}{2}\mathrm{ctg}\frac{C}{2}$；

（4）设 A＋B＋C=π，求证：

$\mathrm{ctg}\frac{A}{2}+\mathrm{ctg}\frac{B}{2}+\mathrm{ctg}\frac{C}{2}=\mathrm{ctg}\frac{A}{2}\mathrm{ctb}\frac{B}{2}\mathrm{ctg}\frac{C}{2}$；

（5）求证：tg3θ-tg2θ-tgθ=tg3tg2θtgθ；

（6）求证：

$\mathrm{tg}20°+\mathrm{tg}40°+\sqrt{3}\mathrm{tg}20°\mathrm{tg}40°=\sqrt{3}$。

易知，其中（1）是例 1 的特殊情况；（2）是例 1 的一个推广；（3）、（4）、（5）、（6）与例 1 相近或相关，其证法也与例 1 的证法类似。

3.旧题新解

变陈题为新题的意义，主要在于挖掘命题与解题的思路原由，更深刻地理解题目的本质，从而能更好地培养学生的思维能力。本文就变陈题为新题

的一些技巧，作一些初步探讨。

（1）通式赋值法。运用从一般到特殊的思维方法，将一些已证明但并非公式的结论，赋于特殊值，使陈题降低了难度，用于掌握原结论的证明方法。

陈题：求证：$\log_n$（n-1）logn（n＋1）＜1。

变题：求证：$\log_{1991}1990\cdot\log_{1991}1992$＜1。

陈题：△ABC 中，求证；cosA＋cosB＋cosC

$=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$。

变题：求证：$\sin50°+\cos80°-\frac{1}{2}=2\sin20°\sin40°$。

（2）因果倒置法。将陈题的条件和结论加以交换，新命题真假都有，选择其真命题，常常可以加大题目的难度。

陈题：一圆的极坐标方程是$P=5\cos\theta-5\sqrt{3}\sin\theta$，$\theta\in[0，2\pi)$，求该圆圆心的极坐标。

变题：极坐标方程ρ=acosθ-bsinθ（0＜a＜b）是一个圆，圆心坐标为（5，5π/3），圆的直径为 10，求 a、b 的值。

（3）引深变形法。变更陈题的条件或所求，引进一些其它知识，使题目相对复杂化，成为综合题。

陈题：一个圆锥的轴截面面积为 S，过两条母线所作截面面积的最大值为$\frac{2}{3}\sqrt{3}S$，求它的底圆的面积。

变题：一个圆锥的轴截面面积为 S，过两条母线所作截面面积的最大值为$\frac{2}{3}\sqrt{3}S$，求有最大截面积的截面与轴截面所成的二面角。

（4）迁移联想法。此法特点是：对陈题的叙述方式作较大变动，但不改其原意；或者变更其对象而不变其方法。

陈题：求正四面体两条高所成的角。

变题：自空间一点 O 引出四条射线，使它们之间两两所成的角都相等，求这角的大小。

陈题：设点 P 到原点的距离为 a，到点 A（0，-3）的距离为 b，到点 B（-3,0）的距离为 c，且满足 b=2a=c，求 a。一变题：已知复数 z 满足｜z-3i｜=2｜z｜=｜z+3｜，求｜z｜。

（5）结论逆返法。改变陈题的结论，模仿陈题的求解过程进行逆推，从而得到新的已知条件。

陈题：不查表求 ctg70°+4cos70°的值。

本题结果为$\sqrt{3}$。欲使另一题结果为$-\sqrt{3}$，则有

$-\sqrt{3}=2\cos30°\cos80°/\sin10°$

=（-cos110°-cos50°）/sin10°

=（-2cos60°cos110°-sin40°）/sin10°

=（cos10°-2sin40°）/sin10°

=ctg10°-8cos10°cos20°。故得。

变题：不查表求

ctg10°-8cos10°cos20°的值。

（6）中途替换法。一些陈题解法中，中途有一个推理转折的关键式子，模仿此式进行替换，便可得到条件类同的新题。

陈题：数列｛a_n｝中，$a_1=1$，$a_n=3a_{n-1}+2$（n≥2），求数列的通项公式 a_n。

本题解法中，常将 $a_n=3a_{n-1}+2$ 变为 $a_{n+1}=3(a_{n-1}+1)$ 的形式，从而归结为等比数列 $b_n=3b_{n-1}$ 求解。若令 $b_n=\frac{1}{a_n}-1$ 进行交换，整理后得到。

变题：数列｛a_n｝中，$a_1=1$，$3a_n+2a_na_{n-1}-a_n=0$（n≥2，且 $a_n\neq0$），求数列的通项公式 a_n。

（7）归纳推进法。有的陈题，不断改变已知条件的数字，经过几个特例的研究，归纳出一般性结论，由此演变出的新题，更具有抽象和完美的特点。

陈题：△ABC 中，∠C=90°，｜AC｜=｜BC｜，D 为 BC 中点，E 点在 AB 上，且｜AE｜=2｜BE｜，求证：AD⊥CE。

变动此题中的 D、E 两点，但始终保持 AD⊥CE，情形如下：若｜BD｜=2｜DC｜，则｜AE｜=3｜BE｜；若｜BD｜=3｜DC｜，则｜AE｜=4｜BE｜；……很快发现。

｜BD｜=n｜DC｜，则｜AE｜=（n+1）｜BE｜。此结论中的 n 是自然数，能否扩大这个数集？很快又能发现：去掉绝对值符号，引进有向线段的概念，本题可推进为

变题 1：△ABC 是等腰直角三角形，C 是直角顶点，D 点在直线 BC 上，E 点在直线 AB 上，且满足 BD=n·DC，AE=（n＋1）·EB（n∈R 且 n≠-1，n≠-2），

求证：AD⊥CE。

如果限定 D 点在线段 BC 上，E 点在线段 AB 上，但将等腰条件换成一直角边为另一直角边的 k（k＞0）倍，又可得到

变题 2：△ABC 中，∠C=90°，｜AC｜=k｜BC｜，D、E 两点分别在 BC 和 AB 上，且满足｜BC｜=n｜DC｜，｜AE｜=k_2n｜EB｜，(k 和 n 都是正的常数)。

求证：AD⊥CE。

在日常教学中，变求证为化简（或求值或猜想）；变图形为式子；变方程为不等式等等都是常用的陈题改造技巧，在此不一一赘述。其目的在于使陈题换新貌，使学生产生新鲜感，从而提高学习兴趣。

4.研究教材中题的多种解法

一题多解的训练是数学复习的重要方面，是培养学生求异思维（有时也叫做发散性思维）能力的好方法，求异思维富于联想，思维宽阔，善于分解组合，引申推广。

例 设 A_1、A_2 是一个圆的直径的两个端点，P_1P_2 是与 A_1A_2 垂直的弦、求直线 A_1P_1 与 A_2P_2 交点的轨迹方程。

此题除用交轨法外，另有三种解法：

略解一：建立直角坐标系，如图，设 P_1（rcosa，rsina），P_2（rcosa，-rsina），A_1（-r，0），A_2（r，0），则直线 A_1P_1 方程为 y=[sina/（cosa＋1）]（x＋r），直线 A_2P_2 方程为

y=[-sina/（cosa-1）]（x-r），此二万程相乘得。$x^2-y^2=r^2$。

注意到由于 P_1、P_2 可以互换，故得 A_1P_1 与 A_2P_2 两直线方程可以与上面所得之相应的方程不同，但最终结果是一致的。

最后得到所求的轨迹是等轴的双曲线 $x^2-y^2=r^2$。

略解二：设 P_1（x_0，y_0），则 P_2（x_0，$-y_0$），令 A_1P_1 与 A_2P_2 相交于 P（x，y），因 $kA_1P \cdot kP_1A_2=-1$，又因 $kA_1P=y/(x+r)$，$kA_2P=y/(x-r)$ 故有 $x^2-y^2=r^2$。

注意到由于 P_1P_2 的位置变化使 kA_1P 等可能与上面值不同,但最终结果都是 $x^2-y^2=r^2$。

略解三：设 $\angle pA_1A_2=\theta$，则 $90°-\theta=\angle A_1P_1P_2=\angle A_1A_2P_2=\angle PA_2x$。知 $kPA_1=ig\theta$，$kPA_2=tg(90°=\theta)=ctg\theta$.

于是

直线 A_1P_1 的方程为 $y=tg\theta\cdot(x+r)$，

直线 A_1P_2 的万程为 $y=ctg\theta\cdot(x-r)$，

此二方程相乘，得 $x^2-y^2=r^2$

还要注意由 P_1P_2 的位置变化引起 kA_1 等的变化,但最终结果仍是 $x^2-y^2=r^2$

5.提炼数学思想

例如复习

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\\ |x|\leq 1，|y|\leq 1\end{cases}$$

这个简单的课本知识表明：（1）如果定义域为[-1，1]，则可设 x=sinθ（或 cosθ），而使关于 x 的代数问题转化为关于 sinθ，cosθ的三角函数问题。像这样的思想，称转化思。（2）关于 sinθ，cosθ的一次（或二次）方程，若令 x=cosθ，y=sinθ，则变为直线与二次曲线的几何问题，又根据其几何性质结合代数方法去解决，象这样的思想称数形结合思想。

例 求 $y=1+x+\sqrt{2-x^2}$ 的值域。

分析一：因定义域为 $|x|\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right|\leq 1$，故可设 $x=\sqrt{2}\sin\theta$，$\in[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$，则

$$y=1+\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=1+2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\quad(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})。$$

$\therefore y\in[1+\sqrt{2}，3]$。

分析二：因 $(x)^2+(\sqrt{2-x^2})^2=2\Rightarrow(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+(\sqrt{\frac{2-x^2}{2}})^2=1$。故可设 $x=\sqrt{2}\sin\theta$，$\sqrt{\frac{2-x^2}{2}}=\cos\theta$，则 $y=1+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)$，下与分析一同。

6.研究教材中题目的变形与推广

例 已知三角形顶点是 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），C（x_3，y_3），求△ABC 的重心 G 的坐标（x，y）。

解法略，答 G（$(x_1+x_2+x_3)/3$，$(y_1+y_2+y_3)/3$）。

下面深入研究此题，先考虑三角形的重心，除其几何性质外还有什么代数性质？经过研究得到：三角形内存在一点，它到三个顶点的距离平方和最小，这一点就是三角形的重心。

下面证明这个性质。设点 P（x，y）到 A，B，C 的距离平方和最小，然后证明

$x=(x_1+x_2+x_3)/3$，$y=(y_1+y_2+y_3)/3$

$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=(x-x1)^2+(y-y1)^2$

$+(x-x_2)^2+(y-y_2)+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$

$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2+3y^2$

$-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2$。

因 x_1，x_2，x_3，y_1，y_2，y_3 为定值，故上式最小时，必须 $3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x$ 最小，而且 $3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y$ 也最小，易知必须 $x=(x_1+x_2+x_3)/3$，$y=(y_1+y_2+y_3)/3$。

以上证明了我们要证明的结论。

上面的结果还可以推广到 n 边形中去：在 n 边形内，到它的几个顶点距离平方和最小的点是这个 n 边形的重心。

证明：用复数法来证。把这个 n 边形放在复平面中，取这个 n 边形的重心为坐标原点。设 n 个顶点对应的复数分别为 z_1、z_2、……、z_n。因 n 边形的重心坐标原点，也就是复数 0，故有 $z_1+z_2\cdots\cdots+z_n=0$。

设 n 边形内任意一点对应的复数为 z，则这点与 n 个顶点距离平方和为 $D=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2+\cdots+|z-z_n|^2$

而 $|z-z_k|^2=(z-z_k)(\bar{z}-\overline{z_k})$

$$=|z|^2+|z_k|^2-\overline{zz_k}-\bar{z}z_k\ (k=1,2,\cdots,n),$$

故 $D=n|z|^2+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2-z\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}-\bar{z}\sum_{k=1}^{n}z_k$

$=n|z|^2+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$。

因 $\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$ 是常数，故使 D 最小时，只有 $z=0$。

到此，对于这一例题的研究似乎讨论完了，但是，注意到前面证明中的式子

$$D=m|z|^2+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$$

可知，只要 $|z_p|=|z_p'|$ 就一定有 $D_p=D_p'$ 从而得到：

①平面上任意一个 n 边形,用 G 表示它的几何重心,那么以 G 为圆心的 圆周上的每一点，到 n 个顶点距离平方和是一定值。

②平面上任一正 n 边形的处接圆上任意一点到此正 n 边形每个顶点距离平方和为定值。

附：学生复习十二技

为了让学生牢固地、全面系统地掌握教学知识，不仅要指导学生复习知识，更重要的是要教给学生一些正确的复习方法。

1.温习课文

课本是复习的重要依据。要让学生温习课文，也可以让学生相互交流阅读课本的方法。对课文中的说明部分和结语，要字字推敲，不能粗心放过。如“只有一组对边平行的四边形叫做梯形”，这句话中“只”字不能少，少了这个“只”字，变成“有一组对边平行四边形”，那就不一定是梯形了。

2.说理例证

对于重要的教学知识要求学生结合具体例证加以说明，以加深对知识的理解，提高运用知识的能力。如一个三角形，如果你知道它一个角的大小，你能知道它是锐角三角形、钝角三角形或直角三角形吗？要求学生学会分析说理、例证。已知的角可能有三种情况：①钝角，②直角，③锐角。如系①或②两种情况，则可断定这个三角形是钝角三角形或直角三角形，而如果已知的角是锐角，那么就难以断定这个三角形是怎样的三角形。

3.阅读批注

学完一部分内容，教师应让学生自觉地阅读课本，重点章节及复读，边读边对重点语句加上圈点或记号，有时还可根据自己对课文的理解补充一些批语、注解。如阅读“圆柱的体积”一节的例 2，课本用的是叙述法：“1 立方分米的水重 1 公斤，所以这个水桶大约能装 28 公斤水。”在此，可以加如下批注：“1×28=28（公斤），28 个一公斤就是 28 公斤。”这样批注，一方面从运算的角度加深了对例题答案的理解；另一方面，对以后碰到与水的比重不同的物质的计算问题就容易了。

就是把若干既有区别又有联系的知识放在一起进行对比复习。小结其异同点，抓住本质特征。如将比的基本性质，小数的基本性质，分数的基本性质与商不变的规律对比，将除法、分数与比的意义对比。

5.提问追踪

就是让学生自己给自己提出问题，自己解答。解答了一个问题，接着再设计一个问题，一个接一个地追踪下去。碰到困难，再去读书求师找答案。这有利于弄清知识的来龙去脉。如，复习数的整除时，可问“整除与除尽有何异同？”“零除以一个不为零的数叫整除？还是叫除尽？”“12 能被整除，12 能整除；这两种说法确切吗？”

6.歌诀概括

有些内容可编成顺口溜，让学生熟读成诵，帮助学习复习记忆。如，公市制长度单位、面积单位、体积单位的换算率分别是“三、九、二十七”。

7.图像表格

运用图像表格的方法对数学知识进行总结复习，数形结合，有利于将知识条理化和形象化，便于记忆，利用巩固。如通过数轴上标出数的对应点，可将自然数、整数、小数、分数、百分数的概念与形结合起来。这就显得形象、直观。

8.回忆再现

在复习时，采取系统回忆的办法，对知识进行“盘底”，从而对症下药，及时补偿；回忆时可采取静思、复述、背诵和默写的办法，也可把这几种结合起来。如复习长方体时，可回忆长方体的性质特征，由性质引起联想，回

顾长方体的表面积与体积的求法，最后试设一例进行练习，这就可使零碎的知识像“一线串珠”似的联结起来，达到系统强化的目的。

9.整理归纳

教师可以通过复习，让学生把平时分散、孤立的知识加以纵横联系，使之系统化、条理化、整理归纳成有机的整体。这样学生对知识就能融会贯通，运用自如。如通过“倍”的复习，可将整数应用题的“倍”与分数应用题的“几分之几”，百分数应用题的“百分之几”、比的应用题中“x：y”等知识串联成线。

10.多种思维

如在复习应用题知识的过程中，可以让学生体会数量关系较简单的应用题，一般以综合法为主，遇到困难时借助于分析法。对数量关系较复杂的应用题，一般以分析法为主，结合综合法进行。对数量关系较隐蔽，用一般的思考方法不易找到解题途径的，还需要教给学生用特殊的思考方法来解决。例如用假设法，通过假设，简化应用题的结构，便于启发解题思路。对数量关系较隐蔽的应用题，亦可引导学生用列方程的方法来解。

11.设疑讨论

在一个学期中，由于各种原因，学生对本册教材所学的知识总会遗留一些尚未解决的问题。复习时，可以有意识地设疑置难，让学生讨论，启发学生思考，以便因势利导，攻关解惑。如学生对“复名数和小数（单名数）”的三化掌握得不够牢固，总复习时，可设置一些有一定难度的例题让学生讨论，例如 4 吨 5 公斤=（）公斤，98 克=（）公斤，（）公里=5 公里 80 米。在讨论中进一步掌握三化的关键和规律，即：

$$\text{高级单位}\ \underset{\text{除以进率}}{\overset{\text{乘以进率}}{\rightleftarrows}}\ \text{低级单位}$$

同时注意小数点移位的方向及移动的位数，正确地处理在数的末尾或前头添上零和去掉小数末尾的零的问题。

12.弥补缺漏

平时学习知识，难免产生缺漏。有些知识理解不深，记忆不牢。应利用复习机会，让学生自己把遗忘的或缺漏的部分补上去，进一步理解记忆，牢固掌握。如复习前，让学生把自己（本学期的）平时的作业和历次考卷翻出来看一看，想一想，哪些地方错了，为什么错，现在弄清楚了没有。然后针对存在的问题，在复习中加强这方面的听课、温习和练习。

培养中学生六种良好教学学习习惯

1.专心听讲的习惯

上课专心听讲是获取知识，培养能力，发展智力的前提。专心听讲习惯的养成，就低年级来说，是靠老师有意识的采取各种措施，使教学内容生动形象、教学方法灵活多样，课堂生动活泼，从而唤起学生的学习兴趣，激发学生的求知欲望。在教学过程中，注意把学生的有意注意与无意注意结合起来，不断地转移儿童的兴奋中心，使儿童在一定时间里把注意力都集中在应注意的对象上，从而争取最佳的教学效果，久而久之，就会形成学生注意听讲的好习惯。

培养学生专心听讲的具体内容是：

①认真听老师讲解，注意看老师演示、板书和表情、动作，仔细想老师提出的问题和讲解的内容。②注意听同学们的发言，大胆地发表自己的意见，积极参加课堂上的讨论活动。③认真完成教师布置的演示、读书、写作业等任务。纠正精神不集中、贪玩，做与课堂无关的事情的不良习惯。

2.善于求异和质疑问难的习惯

培养学生独立思考和善于提出问题的习惯对发展学生的创造性思维以及将来进一步学习都有重要的作用。小学生求知欲强，好奇、好问。对于这种好问的积极性，一定要很好地保护和发展、爱因斯坦说过：“提出一个问题比解决一个问题更重要”。对于那些敢于发现问题，特别是提出不同见解的同学，要进行鼓励和表扬；另外通过“一题多变”“一题多解”和编题练习培养学生发散思维，使学生独立并创造性地运用已有知识，学习新知识，解决新问题，从而培养学生的创造性思维能力。这样经过长期培养，可使学生养成爱动脑筋的好习惯。

培养学生求异和质疑问难习惯的具体内容是：

①独立地思考问题，自己肯从书中、演示中或从分析自己的错例中寻找问题答案，不畏困难，积极思考。②敢于提出自己的疑问，并追根问底，敢于提出不同见解，充分发表自己的不同意见。③在解题、讨论或研究问题时，能突破条条框框的约束，不墨守陈规，能从不同角度多方面的思考问题，寻求出创造性的解题方法。纠正儿童懒于思考，事事依赖老师、家长、同学或单纯靠记忆、模仿、照搬等习惯思维的不良习惯。

3.培养学生认真阅读课本的习惯

阅读课本，是学生获得知识的主要途径。培养学生认真阅读数学课本的习惯，正是培养学生自学能力的开始，正如叶圣陶所说：“教是为了不教。”

刚入学的新生，为了培养（学生自学能力）和集中他们的注意力，可以采取先讲后看书的方法。老师把书上的插图放大，讲完后打开书看看，刚才讲的是哪道题、插图画的是什么，算式怎么写等等。使他们看到，课堂上用的这些有趣的教具和讲的有用的知识，都来自课本。从而喜爱课本。

当学生初步形成了课堂常规，有了一定自制能力时，可采用讲讲看看与引导学生自己看书的办法，即按照书上的例题，从上往下一步一步地去看。先看题里怎么说，接着看书中插图是什么意思。再看看是怎么算的，旁注是怎么写的，最后让学生用自己的话说一说是什么意思，是怎么想的？启发学生说说为什么？老师再补充讲讲。然后就采取带着问题看书，分组讨论，启发学生自己概括。最后，采取先看书后提出看不懂的问题。这些办法都要由浅入深，循序渐进，并持之以恒。

让低年级儿童自学看书，不是放手随便看而是在老师启发引导下，激发学生的看书兴趣，教给学生看书的方法，养成学生看书的习惯，培养学生自学能力。同时要纠正学生不看课本或走马观花的不良习惯。

4.严格认真，一丝不苟的习惯

数学的科学性强，逻辑严密，来不得半点马虎。在数学教学和学生作业中，要注意培养学生严肃认真，一丝不苟、认真负责的态度和书写工整、格式规范的习惯以及积极挑错、改错的习惯。这对学生优良品质的形成和以后学习、生活都有很大好处。

书写工整、格式规范，是提高数学计算准确性的重要因素，而且能培养学生认真负责的学习态度。因此，在数学课书写时，除同语文课一样要求写字姿势、执笔方法、笔顺规则，字形比例等规则以外，还要提出格式要求，如横式、竖式、递等式的写法；答案书写在什么地方；四则混合运算、文字题、应用题等又怎么写；什么样的题用多大格，都应培养学生书写格式规范的良好习惯。反之，作业不专一，书写潦草，会造成作业中不应有的错误。同时要纠正学生字迹潦草，作业马虎不认真的习惯。

5.按时独立完成作业的习惯

按时独立完成作业，是考察学生学习态度，学习习惯及培养学生独立思考能力的主要途径，学生的作业不仅反映学生知识，技能的水平和教学效果，而且也能反映学生的学习态度和学习习惯，表现教育的结果。如果学生从小做作业，就养成了一种马马虎虎，敷衍了事的坏习惯，将来工作时就难以做到一丝不苟，有条不紊，认真对待事业。因此，对学生的作业不但要重视知识内容是否正确，还必须注意卷面是否工整和按时独立完成，卷面乱、脏，没按时完成作业，不但导致不良习惯形成而且必然要影响学习质量。

做作业的主要要求是：态度认真、字迹工整、卷面整洁、格式规范，独立完成，按时交卷，及时改正，保存完整。开始时，要统一格式、甚至字写多大，哪道题写在哪个格里，都要提出具体要求，以后逐步消减限制，逐步过渡到学生独立安排，以利于培养学生的良好习惯和独立处理问题的能力。

在平时，要严防与纠正投机取巧，抄袭别人作业与马虎了事的坏习惯。要注意从小培养学生的时间观念和责任感，同时也培养学生勇于克服困难完成任务的毅力。

6.检验习惯

在数学教学中，培养学生对所解答的问题进行“检验”，这是培养学生检验能力与习惯的一种重要手段。学生检验的方法越多、思路越广、思维也就越灵活。培养学生检验习惯的同时，还要注意培养学生有惜自觉改正的习惯，从小树立学习的责任感，纠正某些草率从事，不管对错的不负责任的态度，以保证学生解答问题的正确率和培养学生认真负责的态度。

附：培养小学生九种良好的数学学习习惯

1.专心听讲习惯的培养

教师在教学中要做到：①合理分配教学时间，采用多种多样的教学方法用生动形象的语言，形象化的直观教学来吸引学生的注意力。②从学生的实际出发，抓住学生学习中的难点，深入浅出，使学生都能听得懂。③注意调动和保持学生学习的积极性，不讲刺激学生的语言，教态和蔼可亲。

培养学生良好的听课习惯可以从三方面入手：①对教师讲的主要部分关键问题一定要提醒学生，引起他们的注意力，使学生自觉不自觉地养成注意听课的习惯。②要培养学生在课堂教学中边听边想的习惯，遇到不懂的地方，要及时举手，向老师提出来，强化学生在课堂教学中积极主动地学习，把疑难问题放在课堂中解决。③边听边记。听课必须有手的活动，随时听到的重点随手记到本上或书上，养成这种听写同步进行的习惯对今后的学习是大有益处的。此外，教师讲课时要善于察看学生听课的表情，如果学生对所讲内容反应淡漠，就应及时调整讲课内容方法；如有个别学生思想“开小差”，

要及时提醒。

专心听讲是学生在数学课上接受信息、获取知识的基本保证。一方面教师在讲课时要注意突出重点，善于捕捉学生的注意，善于巧妙提问，启发思维，引起兴趣。另一方面要加强思想教育和进行常规训练，注意提出明确的专心听讲的具体要求，逐条落实。

上课专心听讲，包括两方面的要求：一是认真听教师讲课并注意观察教师的教具演示过程，板书内容，讲课的动作及表情等，理解教师讲课的内容。二是注意听同学的发言，同学在回答教师提出的问题时，要注意听，边听边想，同学回答得对或不对，如果不对，错在什么地方，如果让自己回答，该怎样说好。此外，还要让学生明确学习的任务，掌握学习的主动权，这是学生“听懂”数学课的关键。

2.动脑多思习惯的培养

教师应创造条件，充分利用一切机会，使学生在课堂教学中能够精力集中、专心听讲、勇于钻研、肯于动脑、大胆发言并逐步养成习惯。其做法是：①激疑启思法。教师要抓住教材中的重点和难点，在教学中善于提问，启发学生积极思考，使其产生探索求知，解决问题的积极要求。②情境激励法。从数学学科特点和小学生心理特点出发，根据新授知识的需要，精心设计教学情境，激发学生学习的欲望和信心，提高他们进一步探索问题的能力，培养其良好的钻研动脑习惯。③操作悟理法。在数学教学中，结合教学的重点或难点，教师一方面应利用形象的直观教具进行演示，另一方面应充分让学生有操作的机会，使学生通过实际操作，领悟算理，同时培养学生动手能力和探索精神。

在教学学习活动中，要教育学生上课时要边听边看边想，阅读数学课本时边读边思，作业时要边做边想；要引导学生全面地、细致地、一丝不苟地观察题、式、图，从大量的感性材料中自觉地进行分析综合，比较对照，抽象概括，逐步形成独立的观察与思考能力；要注意引导学生把握科学知识间的内部联系，在复杂的问题情境中抓住关键，揭示规律；特别要注意培养求异思维，强调独立自主地思考问题，分析问题、解决问题，自觉从书本中、演示中或反省错例中寻找问题的正确答案；要注意纠正个别学生的思维惰性，改变他们一味依赖老师、家长、同学或单纯靠死记硬背，照搬照抄等不良习惯。

要逐步训练学生学会有条理、有根据地思考问题，培养思维的敏捷性和灵活性。要求学生在教师的指导下，积极参加问题的讨论。在讨论中，不但要认真听取、分析别人的意见；而且要多动脑筋，多方面去思考问题；让他们把看到的听到的用数学语言讲出来，然后再想一想，把弄明白的道理讲给教师和同学们听。

3.质疑问难习惯的培养

从低年级开始，先要培养学生不懂就问的良好习惯。低年级学生还比较敢问，对不懂就问的学生要表扬。到了中高年级，学生由于心理上的原因，怕问，因此教师一旦发现学生练习中的错误，要耐心询问学生哪里不懂，要以鼓励、诱导、启发等尊重、爱护学生的方法，使学生树立学习的信心，切忌责怪。对学有所长的学生，则还要鼓励他们提出不同见解。如果学生不会质疑，教师则要设疑。通过经常训练，学生就从无疑到有疑，从不会质疑到会质疑。

教师在教学中，要积极引导学生思考，满腔热情地鼓励学生发问。启发学生在阅读课本和听课时，把疑难的地方随时画出来，特别是对书上的新课叙述部分，使学生养成逐字逐句细看深究习惯，哪怕对一个词产生疑问也要提出来。要根据教学内容和学生学习实际，帮助学生克服自卑不敢发问，满足于一般理解的倾向，教师对各类学生的质疑都要给予鼓励，树立学生的自信心，培养学生质疑问难的习惯。

4.阅读课本习惯的培养

数学书需要重读、精读、巧读。①计算过程重点读。计算教学中不仅要读算式、读法则，更重要的是要训练学生阅读中间过程。②数学概念应精读。数学概念应按其结构来精读，要力求让学生学会理解概念的方法，在此基础上指导学生精读概念。③应用题要巧读。关键词语重音读；省略句式补全读；意思隐含换词读。

阅读是学生独立获取知识的主要途径和手段，其施为过程为：

（1）循着知识脉络初读，重感知。数学教材中的公式、法则、性质、概念等，往往只揭示基本的推理和步骤。初读教材，要循“序”而读。沿着教材所揭示的知识发生、发展顺序追根溯源，探索每一步骤推理的依据，依着数学知识的结构，将每一单元、每一章节的内容进行系统整理，从整体高度加强认识。

（2）围绕知识重点精读，求理解。数学教材中的文字，多为提示思想性文字和结论性文字，语言简炼、准确。要能掌握知识的完整性、严密性和系统性，就要在逐字逐句阅读的基础上精读，要斟词酌句，注重要点，把握精髓，在阅读中思考，在思考中发现。

（3）针对知识、“疑难”研读，得发展。研读教材，要对每一概念、法则进行分析、探讨，同时参阅其他书籍，对同一概念的不同阐述，同一例题的不同解法进行比较，随时针对“疑难”研究探讨。

（4）低年级，教给学生看数学课本的初步方法。看书要从上到下，从左到右看，跟着教师有顺序的看课本上的插图，要数清图中各种物体的个数，用简单的语言进行图解。教师要注意采用“先讲解后读书”的方法，培养学生看书的习惯。

（5）中高年级，教师要帮助学生建立起读书的技巧。在普通读的基础上，重点内容，难理解的地方，注意勾画，认真推敲课本上的黑体字和方框中的内容，怎样掌握公式的推导过程，线段图与应用题的关系，如何看懂各种图表等。

5.完成作业习惯的培养

培养学生细心的作业习惯，首先要求要具体明确。作业要求学生做到认真、准确、完整。其次要树立作业榜样。在作业前，有意识地把做得好的作业展示给学生，使学生产生向典型看齐的向上心理。还要及时反馈、认真纠错。

培养学生良好的计算习惯，做法有：①培养学生认真正确的看、听、读、说的学习习惯。②培养学生认真思考，全面分析的习惯。在指导审题上，要寻找题中特点，思考计算法则，运用运算定律，选择最佳的解题方法。③培养学生正确，规范的作业习惯。即作业书写规范化，作业订正自动化。④培养小学生自觉检查作业的习惯。自查，用短程目标的管理，推动学生主动自查作业。互查，针对小学生好胜争强的心理，开展学生作业互查活动。

6.参与合作习惯的培养

课堂教学是教与学的双边活动，每个学生都应积极参与，与人合作。①启做议练。即在课堂教学中，首先提出问题，启发学生思考，进而带着问题去动手操作，组织讨论，发表意见，进行练习，以达到巩固的目的。②点化自学。通过教师点拨，学生自学，把旧知识和新知识联系起来，加以迁移运用，深化提高。

7.准确表达习惯的培养

在低年级，要训练学生运用学过的数学语言来叙述图意，复述题意，说明计算过程和回答问题，要求他们逐步做到完整地表达自己的思想。随着年级的升高，要训练学生有根有据、有条有理地说明算理，分析数量关系，理由充足地与他人讨论数学问题，并能随时纠正别人不正确不严密的数学语言。

8.课外学习习惯的培养

课后要培养学生预习、复习、多思的习惯，预习复习不能流于形式，要真有效果，必须天天布置预、复习作业，还要指点方法，经常检查完成的情况。对中、高年级，还要培养学生课后看学习小报、参考书、习题书、有好的内容随时做些摘录，常整理知识，动手做学具等习惯。

9.快节奏有亲理习惯的培养

要做到提高效率，必须加强做事的计划性和条理性，养成做事有条理的良好习惯。教师要做到教学方案设计合理，组织严密，环环相扣，提高教的效率，还要想办法提高学生学的效率。①竞赛训练法。通过组织学生进行竞赛、游戏等方法，训练做题又准又快的能力。②手势会意法。教师运用事先与学生约定好的，学生能够自觉接受并领会的手势信号来传递信息，以提高效率。