学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

算得巧

BOOK

内部资料 非卖品

写在前面的话

数学是锻炼脑盘的体操。无论计算，还是解题，都要力争根据具体情竞选用简便算法或解法，有目的地培养学生思维的敏捷性和灵活性。不少人都有这个体验：获得最优美、最巧妙的解法是一种愉快的享受。

算得巧与算得笨不仅仅是方法的不同，更重要的是思维方式的不同。巧算，属于求异思维。它往往具有独特、新颖、简捷的特点。

本书面向小学中、高年级，从数的概念、数的计算、应用题、几何初步知识几个方面，比较系统地总结了巧算的方法、算理和技巧。本书在写作过程中，注意了以下出点。

1.要求新。所谓新，就是别的书上没有讲过或没有集中讲过的新发现、新经验、新的归纳总结。

2.不求全。全是相对的，没有必要把勉强叫巧算的内容加上去。累此，各知识点的分配是不平衡的。本书的目的是抛砖引玉，让同学们由此受到启发，做好积累、整理工作。

3.讲实用。对于那些与其记一大堆法则，还不如再算一遍的巧算，我们一律不选。有些巧算的法则好记又实用，尽管不少人都知道，我们还是选了。

4.有难度。在几百个例题中，有的题是比较难的。我们的目的是让那些学有余力的同学，能在课余时间有更多的机会锻炼自己的脑筋，提高解题能力。

5.重方法。本书在介绍计算方法时，由于按先讲整数计算，再讲分数计算；这两部分又按加、减、乘、除的顺序编写，所以，例题的题型选择不全，重在讲方法。

6.不重复。本书内容既配合课本，又不重复课本。课堂上讲的内容，这里不再重复。比如，“巧用运算规律”，因为课堂内已经讲过，这里只重点介绍了一些典型问题。

本书在写作过程中，常舒正老师审阅了大部分书稿，畦双祥老师提供了有益的资料并补写了某些内容。在此，谨向他们表示衷心的感谢。

作者

算得巧

巧答概念题

约数的对称关系

很多同学在求某个合数的约数时，往往找不全。这里，向同学们介绍一种巧用对称关系找约数的方法。

如果把任何一个合数的约数，从小到大排列成一串数，那么我们会发现，这些数总是关于某个处于中心位置的数成对存在。为了便于叙述，我们把这个中心位置的数叫做“中</PGN0001.TXT/PGN>心数”

如果某个合数恰好是某个自然数的平方，那么这个“中心数”就是这个自然数，它自然是这个合数的约数，只要把比“中心数”小的几个约数找出来，其他的约数便能一个不漏地迅速找出来。比如，要求 36 的约数，$36=6^2$，在 36 的约数里，比 6 小的 4 个约数为 1、2、3、4，加外 4 个约数为 36、18、12、9。如下图：

1 2 3 4 6 9 12 18 36

如果这个合数不是某个自然数的平方，那么就要找出一个近似的“中心数”。比如，要求 102 的约数。因为 $10^2<102<11^2$，所以可以选 10 或 11 为“中心数”。先找出比 10 或 11 小的 4 个约数 1、2、3、6，再找出另外 4 个约数 102、51、34、17。如下图：

1 2 3 6 (10或11) 17 34 51 102

由此可知，一个合数的“中心数”可能是这个合数的约数，也可能不是。

试一试

试求 64、144、60、108 的所有约数。</PGN0002.TXT/PGN>

巧用筛去法判别

判断某个数能否被 3 整除，这是大家熟悉的问题。可是，当一个数较大时，把一个数各数位上的数字相加，不仅判断速度慢，而且很容易出现口算错误。下面介绍一种简便判断方法——筛去法（或称消倍法）。

这种方法就如同用一种特殊的筛子，先把某个数的各个数位是 3 的倍数的数筛去，然后把剩余的有限几个数字相加，看它们的和是否是 3 的倍数。如果剩下的数字之和是 3 的倍数，那么原数就是 3 的倍数。

比如，判断下面的数能否被 3 整除：

(1)5367；(2)31692；(3)43156。

(1)5367，直接筛去能被 3 整除的 3、6；5 与 7 的和是 3 的倍数，所以 5367 能被 3 整除。

(2)31692，直接筛去能被 3 整除的 3、6、9；1 与 2 的和是 3 的倍数，

所以 31692 能被 3 整除。

(3)43156，直接筛去能被 3 整除的 3、6；4、1 与 5 的和不是 3 的倍数，所以 43156 不能被 3 整除。

试一试

判断下面的数能否被 3 整除：

(1)3486(2)2947(3)56793(4)78541</PGN0003.TXT/PGN>

巧妙判定被 7 约

一个数能否被 7 整除，只要把这个数的末位数字截去，然后从余下的数中减去这个末位数字的 2 倍，如果这时能一眼看出这个得数是 7 的倍数，那么这个数就能被 7 整除，否则就不能被 7 整除。要是仍看不出是否能被 7 整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，判断 112 能否被 7 整除。

```
  11 | 2…………割掉末位数字2
-  4 |…………所余的数11减去这个2的2倍
   7
```

因为 7 能被 7 整除，所以 112 能被 7 整除。这是由于

$$
\begin{aligned}
112\times2&=(11\times10+2)\times2\\
&=11\times20+2\times2\\
&=11\times(21-1)+2\times2\\
&=11\times21-11+2\times2\\
&=11\times7\times3-(11-2\times2)
\end{aligned}
$$

前项有约数 7，且 7 与 2 互质，故只要检验（11－2×2）能否被 7 整除就可以了。

如果所要判定的数，位数比较多，那么这种做法可以一直进行下去。

又如，判断 61572 能否被 7 整除。</PGN0004.TXT/PGN>

```
解：  6 1 5 7 | 2
    -       4 |
     6 1 5 | 3
    -    6 |
     6 0 | 9
    -1 8 |
     4 2
```

因为 42 能被 7 整除，所以 61572 能被 7 整除。

以上这种方法叫割尾法。以下判定某数能否被 11、13、17、19 整除也可以用割尾法。但是，大家务必注意它们的区别。

巧妙判定被 11 约

判定一个数能否被 11 整除，大体上有三种方法：割尾法、奇偶位差

法、分节求和法。

1.割尾法：一个数能否被 11 整除，只要把这个数的末位数字截去，然后从余下的数中减去这个末位数，如果这时能一眼看出这个得数是 11 的倍数，那么这个数就能被 11 整除，否则就不能被 11 整除。要是仍看不出是否能被 11 整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，462 能被 11 整除吗？

```
  4 6 | 2 …………割掉末位数字2
-   2 | …………所余的数46减去这个2
  4 4
```

因为 44 能被 11 整除，所以 462 能被 11 整除。这是因为</PGN0005.TXT/PGN>

462=460+2

=46×10+2

=48×（11-1）+2

=46×11-46+2

=46×11-（46-2）

前项有约数 11，故只要检验（46-2）能否被 11 整除就可以了。

2.奇偶位差法：判定一个数能否被 11 整除，可以先分别求出此数各奇位数字之和，以及各偶位数字之和，再求这两个和数的差，如果这个差能被 11 整除，那么原数能被 11 整除，否则就不能被 11 整除。

比如，823724 能被 11 整除吗？

第六位	第五位	第四位	第三位	第二位	第一位
8	2	3	7	2	4

奇位数字之和为　2+7+4=13

偶位数字之和为　8+3+2=13

这两个和数之差　13-13=0

因为 0 能被 11 整除，所以 823724 能被 11 整除。这是由于

823724=8×100000+2×10000+3×1000+7×100+2×10+4

=8×（100001-1）+2×（9999+1）+3×（1001-1）+7×（99+1）+2×（11-1）+4</PGN0006.TXT/PGN>

=8×100001+2×9999+3×1001+7×99+2×11+［（2+7+4）-（8+3+2）］,

前几项中，100001、9999、1001、99、11 均能被 11 整除，故只要检验［（2+7+4）-（8+3+2）］能否被 11 整除就可以了。

3.分节求和法：判定一个数能否被 11 整除，还可以把一个自然数自右向左每两位截为一节，然后把这些节加起来。如果这样相加所得到的和能被 11 整除，那么这个数就能被 11 整除，否则就不能被 11 整除。要是仍看不出是否能被 11 整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，判数 762421 能否被 11 整除。

76’24’21:21+24+76=1’21,21+1=22。

因为 22 能被 11 整除，所以 762421 能被 11 整除。这是由于

762421=76×10000+24×100+21

=76×（9999+1）+24×（99+1）+21

=76×9999+76+24×99+24+21

=76×9999+24×99+（76+24+21），

前两项中，9999、99 均能被 11 整除，故只要检验（76+24+21）能否被 11 整除就可以了。

巧妙判定被 13 约

割尾法：一个数能否被 13 整除，只要把这个数的末位数</PGN0007.TXT/PGN>字截去，然后在余下的数上加上末位数字的 4 倍，如果这时能一眼看出得数是 13 的倍数，那么这个数就能被 13 整除，否则就不能被 13 整除。要是仍看不出是否能被 13 整除，那就要继续上述过程，直到能清楚地作出判新为止。

比如，判断 273 能不能被 13 整除。

```
  2 7 | 3  …………割掉末位数字3
+ 1 2 |    …………所余的数27加这个3的4倍
  -----
  3 9
```

因为 39 能被 13 整除，所以 273 能被 13 整除。这是由于

273×4=（27×10+3）×4

=27×40+3×4

=27×（39+1）+3×4

=27×39+27+3×4

=27×13×3+（27+3×4），

前项中有约数 13，且 13 与 4 互质，故只要检验（27+3×4）能否被 13 整除就可以了。

又如，判断 124156 能否被 13 整除。

```
解：     1 2 4 1 5 | 6
       +       2 4 |
       -------------
         1 2 4 3 | 9
       +     3 6 |
       -----------
         1 2 7 | 9
       +   3 6 |
       ---------
         1 6 | 3
       + 1 2 |
       -------
         2 8
```

</PGN0008.TXT/PGN>

因为 28 不能被 13 整除，所以 124156 不能被 13 整除。

巧妙判定被 17 约

割尾法：一个数能否被 17 整除，只要把这个数的末位数字截去，然后从余下的数中减去这个末位数字的 5 倍，如果这时能一眼看出得数是 17 的倍数，那么这个数就能被 17 整除，否则就不能被 17 整除。要是仍看不出是否能被 17 整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，判断 221 能否被 17 整除。</PGN0009.TXT/PGN>

```
  2 2 |1…………割掉末位数字1
-   5 |…………所余的数22减去这个1的5倍
 ─────
  1 7
```

因为 17 能被 17 整除，所以 221 能被 17 整除。这是由于

221×5=（22×10+1）×5

=22×50+1×5

=22×（51-1）+1×5

=22×51-22+1×5

=22×17×3-（22-1×5）

前项中有约数 17，且 17 与 5 互质，故只要检验（22-1×5）能否被 17 整除就可以了。

又如，判断 278528 能否被 17 整除。

```
解：   2 7 8 5 2 | 8
     -       4 0 |
     ─────────────────
       2 7 8 1 |2
     -     1 0 |
      ─────────
       2 7 7 |1
     -     5 |
      ───────
       2 7 |2
     - 1 0 |
      ─────
       1 7
```

因为 17 能被 17 整除，所以 278528 能被 17 整除。

巧妙判定被 19 约

割尾法：一个数能否被 19 整除，只要把这个数的末位数字截去，然后在余下的数上加上这个末位数的 2 倍，如果这时能一眼看出这个得数是 19 的倍数，那么这个数就能被 19 整除，否则就不能被 19 整除。要是仍看不出是否能被 19 整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，判断 247 能否被 19 整除。

```
   2 4 | 7 …………割掉末位数字7
 + 1 4 |   …………所余的数24加这个7的2倍
 ──────
   3 8
```

因为 38 能被 19 整除，所以 247 能被 19 整除。这是由于

247×2=（24×10+7）×2

=24×20+7×2

=24×（19+1）+7×2

=24×19+24+7×2</PGN0010.TXT/PGN>

=24×19+（24+7×2）

前项中有约数 19，且 19 与 2 互质，故只要检验（24+7×2）能否被 19 整除就可以了。

又如，判断 14253 能否被 19 整除。

```
解：
     1 4 2 5 |3
   +       6 |
  ------------
     1 4 3|1
   +     2|
  ---------
     1 4|5
   + 1 0|
  -------
     2 4
```

因为 24 不能被 19 整除，所以 14253 不能被 19 整除。

综上所述，被 7、11、13、17、19 整除的判断方法，虽然都可以用割尾法，但具体方法不同，请同学们千万不要搞混淆了。

奇妙的一千零一

1001 是个非常有趣的数。这个数的约数恰好是 3 个连续质数的积。

1001=7×11×13。

这个数乘以任何 3 位数，得到的结果是前 3 位和后 3 位数完全相同的 6 位数：

345×1001=345345。

这个数还向人们提供了一个判断某数是否是以 7、11、13 为约数的统一的割尾法。</PGN0011.TXT/PGN>

具体做法是：只要把一个数末三位数截下，然后求余下的数与这三位数的差，如果差能被 7、11、13 整除，那么原数能被 7、11、13 整除，反之则不然。

例 1　判断 613571 能否被 7 整除。

解：613571→613’571→613-571=42→42÷7=6→613571 能被 7 整除。

这是由于

1001=7×11×13

613571=613×1000+571

=613×（1001-1）+571

=613×1001-613+571

=613×1001-（613-571），

其中第一项中 1001 能被 7 整除，故只要检验（613-571）能否被 7 整除就可以了。

一个数能否被 11 或 13 整除的判定法及其根据与此相同。

例 2　判断 523479 能否被 11 整除。

解：523479→523’479→523-479=22→44÷11=4→523479 能被 11 整除。

例 3　判断 33319 能否被 13 整除。

解：33319→33’319→319-33=286→286÷13=22→33319 能被 13 整除。

这里所介绍的方法适合对位数比较多的数进行判断，特别是 6 位数，用这种方法会收到极好的效果。</PGN0012.TXT/PGN>

试一试

1.用截尾法判断下列各数，哪些数里含有约数 7、11、13、17、19：

12397　53603　809341

71995　10127　323323

2.用 1-9 九个不同数字组成一个能被 11 整除的最小数。

巧求最大公约数

求两个自然数的最大公约数是进行分数化简的基础，非常重要。一般情况下，求两个数最大公约数用短除的办法。

例如，求 72 与 108 的最大公约数。

具体做法是：

两个数公有的→	2	72	108
两个数公有的→	2	36	54
两个数公有的→	3	18	27
两个数公有的→	3	6	9
两个数公有的→		2	3

所以，把 72 与 108 中一切公有的质因数取出，就得到了最大公约数：</PGN0013.TXT/PGN>

2×2×3×3=36。

这是求两个数最大公约数的常用方法。但是，并不是所有的时候，这样做都能成功。比如，遇到两个较大的数，它们的公约数又不是常见的 2、3、5 时，麻烦就来了。

例如，求 391 与 493 的最大公约数。

在这种情况下，最好的办法是采用辗转相除法。具体做法是，先将 391 和 493 并排写好，然后用三条竖线把它们隔开。下面就是详细过程。

第一步，用小数 391 去除大数 493，把商 1 写在较大数的直线外，并求得余数 102；

	391	493	1
		391	
		102	

第二步，用余数 102 去除刚才作为除数的 391，把商 3 写在较大数的直线外，并求得余数 85；

3	391	493	1
	306	391	
	85	102	

第三步，用余数 85 去除刚才做为除数的 102，把商 1 写在较大数的直线外，并求得余数 17；</PGN0014.TXT/PGN>

3	391	493	1
	306	391	
	85	102	1
		85	
		17	

第四步，用余数 17 去除刚才的除数 85，把商 5 写在较大数的直线外，并求得余数 0；

3	391	493	1
	306	391	
5	85	102	1
	85	85	
	0	17	

第五步，当余数为 0 时，就可以判定，余数 0 前面的那个余数 17 就是最大公约数。

下面，我们再看两个例子。

例 1　求 635 与 889 的最大公约数。

2	635	889	1
	508	635	
	127	254	2
		254	
		0	

</PGN0015.TXT/PGN>

635 与 889 的最大公约数为 127。

例 2　求 67 与 54 的最大公约数。

1	67	54	4
	54	52	
6	13	2	2
	12	2	
	1	0	

67 与 54 的最大公约数是 1，67 与 54 互质。

一般地说，用辗转相除法求两个数的最大公约数的方法是：先用小数除大数；若不能整除，就用余数再去除小数；若仍然不能整除，就用第二次的余数去除第一次的余数……直到余数是 0 为止，这时前面一个余数就是最大约数了。

辗转相除的发明权应属中国。我国西汉末期成书的《九章算术》中，就有用“以少减多，更相减损”的方法求最大公约数的记载。后来人们应用的辗转相除就源于此。中国人运用这种算法求两个数的最大公约数至少比西方人提早了 600 年。

试一试

试求下列各对数的最大公约数：

(1)323 和 391　　(2)1547 和 1976</PGN0016.TXT/PGN>

(3)24273 和 10692

巧求最小公倍数

求两个自然数的最小公倍数是进行分数通分的基础，也非常重要。一般情况下，求两个数的最小公倍数也用短除的办法。

例如，求 24 与 60 的最小公倍数。

具体做法如下：

两数公有的→	2	24	60
两数公有的→	2	12	30
两数公有的→	3	6	15
两数单独有的→		2	5

所以，把 48 与 60 中一切公有的质因数取出，再把单独有的也取出，就得到了最小公倍数：

2×2×3×2×5=120。

实际上，这里有个得出最小公倍数的巧妙办法，具体做法如下：

2	24	60
2	12	30
3	6	15
	2	5

</PGN0017.TXT/PGN>

24 与 60 的最小公倍数为

24×5=120 或 60×2=120。

这样做的道理很简单。

因为 $120=\boxed{2\times2\times3\times2}\times5$

$=24\times5$，

$120=2\times2\times3\times2\times5$

$=\boxed{2\times2\times3\times5}\times2$

$=60\times2$，

所以,用 24 乘以 60 独有的质因数 5 或用 60 乘以 24 独有的质因数 2，都能得到 24 与 60 的最小公倍数。今后用短除找出两个数单独有的质因数后，顺势画一个十字，把它们分别与原来两数相乘，都会得出最小公倍数。

这们做可以加快运算速度，避免口算的失误。

那么，求 3 个数的最小公倍数还能不能用上述的方法呢？答案是肯定的，但是运算的速度就不一定比传统的方法快了。下面，我们通过一个问题看看这时到底用哪种方法好了。

比如，求 12、18、20 的最小公倍数。

第一种方法（传统法）：

三个数公有的→	2	12	18	20
两个数公有的→	2	6	9	10
两个数公有的→	3	3	9	5
两个数单独有的→		1	3	5

</PGN0018.TXT/PGN>

12、18 和 20 的最小公倍数是

2×2×3×3×5=180。

第二种方法（叉乘法）：

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 12 & 18 \\ \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} 2 & 36 & 20 \\ \hline 2 & 18 & 10 \\ \hline & 9 & 5 \end{array}$$

12 与 18 的最小公倍数是　12×3=36；

36 与 20 的最小公倍数是　20×9=180。

因此，12、18 和 20 的最小公倍数是 180。

或者

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 12 & 20 \\ \hline 2 & 6 & 10 \\ \hline & 3 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} 2 & 60 & 18 \\ \hline 3 & 30 & 9 \\ \hline & 10 & 3 \end{array}$$

12 与 20 的最小公倍数是　20×3=60；

60 与 18 的最小公倍数是　60×3=180。

因此，12、18 和 20 的最小公倍数是 180。

当然，用这种方法求这三个数最小公倍数的过程中，用合数去除可能要快些。如：</PGN0019.TXT/PGN>

$$\begin{array}{r|ll} 6 & 12 & 18 \\ \hline & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} & 36 & 20 \\ \hline & 9 & 5 \end{array}$$

18×2=36　　　20×9=180

12、18 和 20 的最小公倍数为 180。

或者

$$\begin{array}{r|ll} 4 & 12 & 20 \\ \hline & 3 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} 6 & 60 & 18 \\ \hline & 10 & 3 \end{array}$$

20×3=60　　　18×10=180

12、18 和 20 的最小公倍数为 180。

通过比较，可以看出两种方法各有千秋，用第一种方法可能运算速度更快些。

试一试

试求下列各组的最小公倍数：

(1)48、64、120　　　　(2)54、63、72

(3)208 和 195　　　　(4)238 和 252

巧比分数的大小

比较分数大小，常用的基本方法是把分数通分。不过，有时这样做比较麻烦，做题的速度太慢。有没有一些巧妙的方法呢？有。</PGN0020.TXT/PGN>

交叉相乘

比如，比较 $\frac{5}{8}$ 和 $\frac{7}{12}$ 的大小。

通常的做法是先求 8 与 12 的最小公倍数，然后通分，即

$\frac{5}{8}=\frac{5\times3}{8\times3}=\frac{15}{24},\frac{7}{12}=\frac{7\times2}{12\times2}=\frac{14}{24}$。

因为$\frac{15}{24}>\frac{14}{24}$,所以$\frac{5}{8}>\frac{7}{12}$。

又如,比较$\frac{5}{7}$和$\frac{8}{11}$的大小。

这时，两个分数的分母互质，公分母就是两个分数分母的积。即

$\frac{5}{7}=\frac{5\times11}{7\times11},\frac{8}{11}=\frac{7\times8}{7\times11}$。

显然，只要看 5×11 和 7×8 的大小就行了。即分数的大小取决于分子的大小。

$5\times11=55$，$7\times8=56$，因为$55<56$，所以$\frac{5}{7}<\frac{8}{11}$。

以上过程可以加以简化。做法如下：

$\frac{5}{7}><\frac{8}{11}$　　$5\times11=55,7\times8=56$。

因为$55<56$，所以$\frac{5}{7}<\frac{8}{11}$。

这种方法给予我们一个启示，不管分母是否互质都可以</PGN0021.TXT/PGN>照此办理。

例　比较下列两组分数的大小：

(1)$\frac{7}{8}$和$\frac{5}{6}$;　(2)$\frac{2}{8}$、$\frac{3}{5}$和$\frac{5}{8}$。

解：(1) $\frac{7}{8}><\frac{5}{6}$　$7\times6=42,$　$8\times5=40$。

因为 $42>40$，所以$\frac{7}{8}>\frac{5}{6}$。

(2)$\frac{2}{3}><\frac{3}{5}><\frac{5}{8}$

2×5=10，3×3=9；3×8=24，5×5=25。

因为$10>9$，所以$\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$;又因为$24<25$,所以$\frac{3}{5}<\frac{5}{8}$。

这时仍不能排定 3 个分数的顺序，还应继续做：

2×8=16，3×5=15。

因为$16>15$,所以$\frac{2}{3}>\frac{5}{8}$。

因此,$\frac{3}{5}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$。

与“1”比较

当两个分数都接近 1，又不易观察哪个大哪个小时，可以先分别求这

两个分数与 1 的差，比较这两个差往往比比较</PGN0022.TXT/PGN>原分数容易得多。

比如，比较$\frac{49}{50}$和$\frac{48}{49}$和大小。

我们注意到这两个分数与 1 比较接近，不妨用 1 分别减去这两个分数，看看它们差的大小。即

因为$1-\frac{49}{50}=\frac{1}{50}$，$1-\frac{48}{49}=\frac{1}{49}$，所以

$\frac{49}{50}=1-\frac{1}{50}$，$\frac{48}{49}=1-\frac{1}{49}$。

又因为$\frac{1}{50}<\frac{1}{49}$，所以$\frac{49}{50}>\frac{48}{49}$。

下面，我们再举两个比较复杂的例子。

例1 比较$\frac{2222221}{2222223}$和$\frac{3333331}{3333334}$的大小。

解：$1-\frac{2222221}{2222223}=\frac{2}{2222223}=\frac{6}{6666669}$，

$1-\frac{3333331}{3333334}=\frac{3}{3333334}=\frac{6}{6666668}$。

因为$\frac{6}{6666669}<\frac{6}{6666668}$，所以

$\frac{2222221}{2222223}>\frac{3333331}{3333334}$。

例2 比较$\frac{222222221}{333333332}$和$\frac{444444443}{666666665}$的大小。</PGN0022.TXT/PGN>

解：$1-\frac{222222221}{333333332}=\frac{111111111}{333333332}=\frac{222222222}{666666664}$，

$1-\frac{444444443}{666666665}=\frac{222222222}{666666665}$。

因为$\frac{222222222}{666666664}>\frac{222222222}{666666665}$，所以

$\frac{222222221}{333333332}<\frac{444444443}{666666665}$。

巧通分子

我们把异分子的分数分别化成与原分数相等的同分子分数叫做通分子。

例如，把$\frac{3}{16}$，$\frac{5}{6}$和$\frac{2}{13}$从小到大排列起来。

这是分子、分母都不相同的三个分数，如果用通分的办法来排列它们的大小，显然计算量较大。观察分子，我们发现，与其“通分母”，还不如“通分子”来得快。

通分子，得

$\frac{3}{16}=\frac{3\times10}{16\times10}=\frac{30}{160}$，$\frac{5}{6}=\frac{5\times6}{6\times6}=\frac{30}{36}$，

$\frac{2}{13}=\frac{2\times15}{13\times15}=\frac{30}{195}$。

因为$\frac{30}{195}<\frac{30}{160}<\frac{30}{195}$，所以$\frac{2}{13}<\frac{3}{16}<\frac{5}{6}$。 </PGN0024.TXT/PGN>

有些可以用通分子的办法来解的题，可能一下子看不出。这就需要依情况对题目进行适当“改造”。

例如，把$\frac{8}{13}$，$\frac{11}{16}$和$\frac{9}{14}$从小到大排列起来。

这道题，无论是“通分母”，还是“通分子”，都不简单。但是，经过认真观察，我们发现：每个分数的分母和分子都相差 5。也就是说，用 1 减去上述 3 个分数所得的差的分子相同：

$1-\frac{8}{13}=\frac{5}{13}$，$1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$，$1-\frac{9}{14}=\frac{5}{14}$。

由于被减数都是 1，差数越大说明减数越小，差数越小说明减数越大。

因为$\frac{5}{16}<\frac{5}{14}<\frac{5}{13}$，所以$\frac{11}{16}>\frac{9}{14}>\frac{8}{13}$。

分数相除

例如，比较$\frac{10}{21}$和$\frac{5}{9}$的大小。

为了比较这两个分数的大小，可以用一个分数除以另一个分数。这里可做两种除法：

1.第一个分数除以第二个分数

$\frac{10}{21}\div\frac{5}{9}=\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{7}{\cancel{21}}}\times\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}=\frac{6}{7}$。

</PGN0025.TXT/PGN>

也就是说，$\frac{10}{21}$是$\frac{5}{9}$的$\frac{6}{7}$，所以$\frac{10}{21}<\frac{5}{9}$。

2.第二个分数除以第一个分数

$\frac{5}{9}\div\frac{10}{21}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\times\frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{2}{\cancel{10}}}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$。

也就是说，$\frac{5}{9}$是$\frac{10}{21}$的$1\frac{1}{6}$，所以$\frac{5}{9}>\frac{10}{21}$。

用两个分数相除比较分数的大小，主要看它们的商大于 1 还是小于 1。这种方法省去了通分过程，方法比较简便。

试一试

1.比较下列各组分数大小：

(1) $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{6}{7}$　　(2) $\frac{4}{11}$ 和 $\frac{5}{13}$

(3) $\frac{3}{5}$、$\frac{4}{7}$ 和 $\frac{5}{9}$　　(4) $\frac{4}{7}$、$\frac{5}{9}$ 和 $\frac{6}{11}$

2.比较下列各组分数大小：

(1) $1\frac{10}{13}$、$1\frac{13}{16}$ 和 $1\frac{11}{14}$

(2) $2\frac{5}{11}$、$2\frac{7}{13}$ 和 $2\frac{11}{17}$

3.比较下列各组分数大小：

(1) $\frac{77}{78}$ 和 $\frac{36}{37}$　　(2) $\frac{58}{59}$ 和 $\frac{93}{94}$

(3) $\frac{80}{81}$、$\frac{81}{82}$ 和 $\frac{82}{83}$　　(4) $\frac{74}{75}$、$\frac{63}{64}$ 和 $\frac{87}{88}$

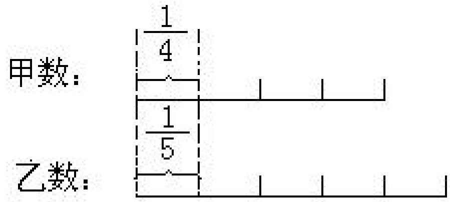
</PGN0026.TXT/PGN>

甲大还是乙大？

有这样一类问题，甲数和乙数之间的关系不是直接给出的，这就增加了问题的难度。

先看分子是1的情况。比如，已知甲数的 $\frac{1}{4}$ 等于乙数的 $\frac{1}{5}$，问甲数与乙数哪能个大？

方法 1：直观比较。



从以上线段图上可以清楚地看出，甲数小于乙数。

方法 2：统一标准。

既然甲数的 $\frac{1}{4}$ 等于乙数的 $\frac{1}{5}$，那么不妨用统一的单位表示。

若甲数的 $\frac{1}{4}=1$个长度单位，乙数的 $\frac{1}{5}=1$个长度单位，则

甲数 $=1\div\frac{1}{4}=4$，乙数 $=1\div\frac{1}{5}=5$。

所以，乙数比甲数大。</PGN0027.TXT/PGN>

方法 3：从分数意义上来看。

很明显，甲数由4个$\frac{1}{4}$构成，乙数由5个$\frac{1}{5}$构成，而1个$\frac{1}{4}$与1个$\frac{1}{5}$相同，所以4个$\frac{1}{4}$小于5个$\frac{1}{5}$，乙数比甲数大。

方法 4：转化关系式。

甲数的$\frac{1}{4}$等于乙数的$\frac{1}{5}$，即

甲数$\times\frac{1}{4}=$乙数$\times\frac{1}{5}$。

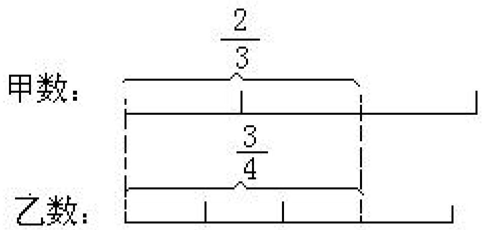
根据“一个因数等于积除以另一个因数”，可得

甲数$=$乙数$\times\frac{1}{5}\div\frac{1}{4}$。

所以，甲数$=$乙数$\times\frac{4}{5}$，即甲数是乙数的$\frac{4}{5}$，乙数比甲数大。

再看分子不是1的情况。比如，甲数的$\frac{2}{3}$等于乙数的$\frac{3}{4}$，问甲数大还是乙数大？

方法 1：直观比较。

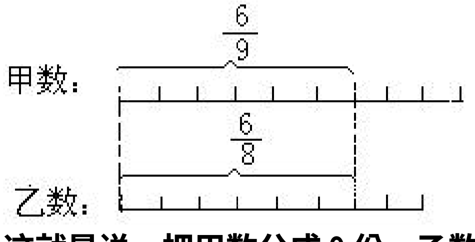


从以上线段图上可以看出，甲数大于乙数。</PGN0028.TXT/PGN>

方法 2：统一分子。

要使$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{4}$变为同分子需要利用分数的性质：

$\frac{2}{3}=\frac{2\times3}{3\times3}=\frac{6}{9}$，$\frac{3}{4}=\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{6}{8}$。



这就是说，把甲数分成 9 份，乙数分成 8 份，它们的 6 份相等 ，所以它们的每一小份相等。甲数共有 9 个小份，乙数共有 8 个小份。所以，甲数大于乙数。

本题的方法 2 与上面一题的方法 2 实质上是一样的。这是因为

甲数的$\frac{6}{9}$等于乙数的$\frac{6}{8}$，即甲数的$\frac{1}{9}$等于乙数的$\frac{1}{8}$。

方法 3：从分数意义上来看。

由于甲数的$\frac{2}{3}$等于乙数的$\frac{3}{4}$$\rightarrow$

甲数的$\frac{6}{9}$等于乙数的$\frac{6}{8}$$\rightarrow$

甲数的$\frac{1}{9}$等于乙数的$\frac{1}{8}$，

所以，仍可以用上题的方法进行解释。

方法 4：转化关系式。</PGN0029.TXT/PGN>

甲数的$\frac{2}{3}$等于乙数的$\frac{3}{4}$，即

甲数$\times\frac{2}{3}=$乙数$\times\frac{3}{4}$。

根据“一个因数等于积除以另一个因数”，可得

甲数$=$乙数$\times\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$。

所以，甲数$=$乙数$\times\frac{9}{8}$，即甲数是乙数的$\frac{9}{8}$，甲数比乙数大。

试一试

1. 已知甲数的$\frac{1}{6}$等于乙数的$\frac{1}{8}$，问甲数大还是乙数大？

2. 已知甲数的$\frac{3}{4}$等于乙数的$\frac{4}{5}$，问甲数是乙数的几分之几？

</PGN0030.TXT/PGN>

巧算计算题

高斯的巧算

在高斯 10 岁上小学的时候，他的老师出了一道题：1+2+3+…+99+100。在别人进行繁琐的连加运算时，高斯灵机一动提出妙招。这种算法简捷、快速，使他的老师惊</PGN0031.TXT/PGN>叹不已。

高斯把这一长串数进行重新组合：把第一个加数与第 100 个加数相加；再把第二个加数与第 99 个加数相加……这样，把 100 个加数分为 50 组，每组的两个加数之和都是 101。于是，他得出：1+2+3+…+99+100=101×50=5050。

对于处在那个知识段的少年来说，这种算法可算是一种运用创造性的思维解题的典型例子。

等差级数求和

从上面那个例子可以归纳出求连续自然数之和的法则：

第一个加数加第末个加数乘以加数个数的一半，即为这个连续自然数之和。

用字母表示为

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$=(a_1+a_n)\times(n\div2)$。

当加数个数是奇数时，上面的公式可变为：

$(a_1+a_n)\div2\times n$，即

$$\frac{n(a_1+a_n)}{2}。$$

这种写法就是到高中时才能学到的等差级数的求和公式。这个公式把高斯小时候提出的那种单独解某个题的方法提到新的高度，即只要这一串由小到大排列的数，相邻两项之差相同，就都可以用这种方法求和。</PGN0032.TXT/PGN>

倒排相加法

高斯算的那道题，还可以采用倒排相加的办法来解决。具体做法是：

解：

$$\begin{array}{r} 1+\quad 2+\quad 3+\cdots+\quad 99+100 \\ +)\ 100+\ 99+\ 98+\cdots\quad\ 2+\quad 1 \\ \hline \underbrace{101+101+101+\cdots\ 101+101}_{100\text{个}} \end{array}$$

因此，1+2+3+…+99+100=101×100÷2=5050。

这种做法和高斯的做法本质上是相同的，但是思路是有区别的。它为我们提供了一种重要的数学方法。

例 1　计算：2+4+6+…96+98。

解：

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2+ & 4+ & 6+\cdots+ & 96+ & 98 \\ +) & 98+ & 96+ & 94+\cdots+ & 4+ & 2 \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{100+\ 100+\ 100+\cdots\ 100+100}_{49个}} \end{array}$$

因此，2+4+6+…96+98=100×49÷2=2450。

例 2　计算：3+5+…97+99。

解：

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3+ & 5+ & \cdots+ & 97+ & 99 \\ +) & 99+ & 97+ & \cdots+ & 5+ & 3 \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{102+102+\cdots+102\ +102}_{49个}} \end{array}$$

因此，3+5+…97+99=102×49÷2=2499。</PGN0033.TXT/PGN>

利用中间项

当一串连续数的个数为奇数时，可以利用中间项求和。

比如，计算 1+2+3+4+5+6+7。

这个加式的中间项显然是4。要是不易观察时，可以用首项加末项之和除以2得出。上式的中间项 $=\frac{1+7}{2}=4$。

我们观察这 7 个加数，发现它们以 4 为中心，左右对称的两数之和为 8。即

$$1+2+3+4+5+6+7$$

所以，原式可变形为

$$\underbrace{4+4+4+4+4+4+4}_{7个}=4\times 7=28。$$

因此，我们得出：当连续数的个数是奇数时，它们的和等于中间数乘以加数个数。

例 3　计算：21+22+23+24+25+26+27+28+29。

解：21+22+23+24+25+26+27+28+29

=25×9×225。

例 4　计算：1+2+3+…+98+99。

解：1+2+3+…+98+99=50×99=4950。

当连续数的个数是偶数时，仍然可以用这种办法，只不过把加式分为两部分就可以了。</PGN0034.TXT/PGN>

比如，计算 1+2+3+…+99+100。

解：1+2+3+…+99+100

=50×99+100

=4950+100

=5050。

实际上，各种方法都可以归结到利用等差级数求和的公式上去。只是在特殊情况下，用特殊方法去计算，运算的速度会更快些。

从 1 到 10 亿

高斯的巧算耐人寻味，我们能不能用这种解题思想解决一些实际问题呢？

有这样一道题：请你计算一下，从1到10亿，这10亿个数的数字之和是多少？

在解这道题之前，必须弄明白，“10 亿个数的数字之和”指的是什么？千万不要与“这 10 亿个数之和”相混淆。举个例子吧。比如，1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12 这 12 个数的数字之和是

1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+0+1+1+1+2=51。

哇，这 10 亿个数的数字之和怎么加呀？

这时，请你不要急于动手去加，要好好想想高斯的巧算。

我们不妨在这 10 亿个数前加一个“0”，这样做不会改变计算的结果，但却改变了数字的个数。我们可以把前面 10 亿</PGN0035.TXT/PGN>个数两两分组。

0 和 999999999；1 和 999999998；

2 和 999999997；3 和 999999996；

………………………………………

依此类推，前 10 亿个数可分为 5 亿组，各组的数字之和为 0+9+9+9+9+9+9+9+9+9=1+9+9+9+9+9+（+9+9+8=……=81。最后一个数 1000000000 不成对，它本身的数字之和是 1。

所以，这 10 亿个数的数字之和为

（81×500000000）+1=40500000001。

学习别人的东西不能照戎芦画瓢，而应该根据变化了的情况灵活地加以运用。

试一试

1.计算：

(1)1+3+5+7+9+11+13+15+17

(2)2+4+6+8+10+12+14+16+18+20

2.计算：

(1)11+13+15+…+89+91

(2)10+12+14+…+88+90

3.计算：

(1)1949+1950+…+1992

(2)（1+3+…+1989+1991）-（2+4+…+1900+1992）</PGN0036.TXT/PGN>

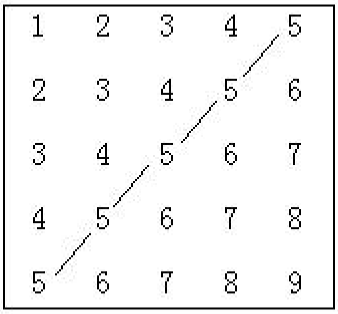
4.请你计算一下，从 1 到 1000，这 1000 个数的数字之和是多少？

化大为小

“化大为小”是数学中的一种重要思想方法。有些题目数目多，关系复杂。遇到这种情况，我们常常从数目较小的特殊情况入手,研究题目的特点,找出一般规律。即所谓“由特殊到一般”，这也是人类认识世界的重要方法。

例 1　计算下面方阵中所有数的和。

1	2	3	……100
2	3	4	……101
3	4	5	……102
…………………………			
100	101	102	……199



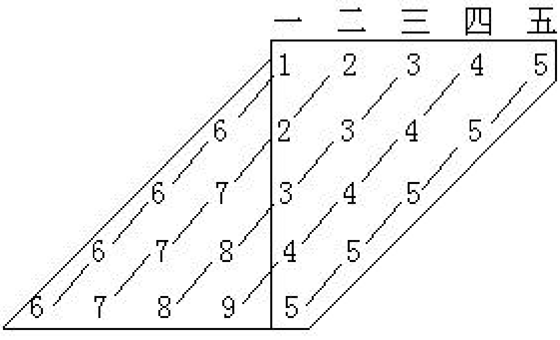
</PGN0037.TXT/PGN>

这道题按高斯的方法一行一行地计算未尝不可，但是这样做比较麻烦。有没有简单的方法呢？

100×100 这个方阵比较复杂，我们把这个问题“化大为小”，先观察 5×5 的方阵。

容易看到，对角线上 5 个 5 之和为 25。

这时，如果把对角线下面的部分用剪刀剪开，并把剪下的部分与对角线上面的部分对接，那么我们就会发现：



这 5 个斜行之和均为 25。

因此，5×5 方阵中所有数的和为

$25\times5=5^3=125$。

易知，100×100 方阵中所有数的和为

$10000\times100=100^3=1000000$。

例 2　把自然数中的偶数 2、4、6、8……依次排 5 列（如图）

</PGN0038.TXT/PGN>

第一列	第二列	第三列	第四列	第五列
	2	4	6	8
16	14	12	10	
	18	20	22	24
32	30	28	26	
	34	36	38	40
48	46	44	42	
…	…	…	…	…

我们把最左边的一列叫第一列，从左到右顺次编号。请问“1992”出现在哪一列？

我们知道，从 2 到 1992 共有：1992÷2=996 个偶数。

我们发现，从前到后，前 8 个偶数为第一组，以后按顺序编成第二组、第三组……后面各组都重复第一组的排列顺序。这个规律是：每组的前 4 个偶数，按由小到大的顺序，分别排在第二、三、四、五列，每组的后 4 个偶数，按由小到大的顺序，分别排在第四、三、二、一列。

因此，由 996÷8=124……4 可知，996 个偶数可分为 124 组还余 4 个。所以，1992 应排在第五列。

试一试

1．下面这个由连续奇数组成的 5 阶方阵中，所有数的和是多少？
</PGN0039.TXT/PGN>

1	3	5	7	9
3	5	7	9	11
5	7	9	11	13
7	9	11	13	15
9	11	13	15	17

2．计算下面方阵中所有数的和。

1	3	5	……	97	99
3	5	7	……	99	101
5	7	9	……	101	103
……	……	……	……	……	……
99	101	103	……	195	197

巧用凑整法

对于某些特殊加数的加法，常常用凑整十、整百、整千……的方法进行简算。

例 1　计算：99.9+11.1。

分析：先把 99.9 拆成 90+9+0.9，再把 11.1 拆成 10+1+0.1，然后把它们重新组合，凑</PGN0040.TXT/PGN>整。

解：99.9+11.1

=（90+10）+（9+1）+（0.9+0.1）

=100+10+1

=111

例 2　计算：9+98+997+6。

分析：先把 6 拆成 1+2+3，然后把它们重新组合、凑整。

解：9+98+997+6

=（9+1）+（98+2）+（997+3）

=10+100+1000

=1110

例 3　计算：9+99+999+9999。

分析：从 9 里取出 3 个 1，分别与 99、999、9999 相加，凑成整百、整千、整万，然后再相加。

解：9+99+999+9999

=（9－3）+（99+1）+（999+1）+（9999+1）

=6+100+1000+10000

=1116

例 4　计算：

125+125+125+125+125+125+125+120。

分析：我们知道 125×8=1000，可是现在只有 7 个 125。这时，我们不妨假定最后一个数也是 125。这样总和多了 5，再减去 5 就是了。

解：125+125+125+125+125+125+125+120

=125×8－5

=1000－5

=995

例 5　计算：567－98。

分析：可先从 567 中减去 100，这样比应减的 98 多减了 2，再加上 2 就是最后的结果。</PGN0041.TXT/PGN>

解：567－98

=567－100+2

=467+2

=469

试一试

计算下面各题：

1．0.+0.99+0.999+0.9999+0.99999

2．8+88+888+6

3．7.87+3.23

4．689－397

“以乘代减”

有这样一种两位数相减：相减的两位数的个位和十位数字恰好相反。对于这种减法，可以用十位数字减去个位数字的差乘以 9 就行了。

比如，83－38=（8－3）×9=5×9=45。

这是由于

83－38

=（10×8+3）－（10×3+8）

=10×8－8+3－10×3

=8×（10－1）－3×（10－1）

=（8－3）×9</PGN0042.TXT/PGN>

=5×9

=45

如果用字母表示具有上述特点的两个数相减（即$\overline{ab}-\overline{ba}$，其中，$a>b$，a、b 皆不为 0），那么上述过程可表述如下：

（10a+b）－（10b+a）

=(10a－a)－(10b－b)

=9a－9b

=9(a－b)

例　计算：(1)43－34；(2)64－46；(3)73－37。

解：(1)43－34=（4－3）×9=9；

(2)64－46=（6－4）×9=18；

(3)73－37=（7－3）×9=36。

这样一来，使这种类型减法的运算速度大大加快了。

试一试

计算下列各题：

21－12	31－13	41－14	51－15
62－26	72－27	82－28	92－29
83－38	93－39	54－45	74－47
65－56	75－57	76－67	86－68
96－69	87－78	97－79	98－89

</PGN0043.TXT/PGN>

巧算退位减法

退位减法，都出现在被减数某个数位上的数字，小于同一数位上减数的数字时。借一当十，然后用心计算结果。尽管这样做并不难，但是常常由于口算不熟而出现计算错误。

下面，我们通过两道题的计算，寻求退位减法的新方法。

(1) $\begin{array}{r} 4275 \\ -3347 \\ \hline 928 \end{array}$　　(2) $\begin{array}{r} 50872 \\ -1699 \\ \hline 49173 \end{array}$

(1)个位上 5 比 7 少 2，差为 8；百位上 2 比 3 少 1，差为 9。

(2)个位上 2 比 9 少 7，差为 3；十位上 6 比 9 少 3，差为 7；千位上

0 比 1 少 1，差为 9。

我们不难发现：

相同数位上，被减数比减数少 1，差为 9；被减数比减数少 2，差为 8……被减数比减数少 9，差为 1。

从中，我们很容易总结出：在计算退位减法时，被减数比减数少的数的补数就是所求的差。

什么是补数呢？比如，3+7=10。我们就说 3 是 7 的补数，7 也是 3 的补数，3 和 7 互补。

这样一来，我们就可以先求被减数比减数少的数，然后再用凑 10 的方法求差了。

例　计算下列各式

$$\begin{array}{r} 6\ 0\ 5\ 3\ 1 \\ -\ 4\ 8\ 7\ 5\ 6 \\ \hline 1\ 1\ 7\ 7\ 5 \\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow \\ \text{少少少} \\ 3\ 3\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 2\ 4\ 8\ 0 \\ -\ 6\ 8\ 7\ 5\ 9 \\ \hline 3\ 7\ 2\ 1 \\ \uparrow\ \uparrow\ \ \ \uparrow \\ \text{少少}\ \ \text{少} \\ 7\ 3\ \ \ 9 \end{array}$$

试一试

计算下列各式：

$$\begin{array}{r} 56078 \\ -\ 27359 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81243 \\ -\ 56752 \\ \hline \end{array}$$

弃九验算法（一）

在验算多位数加减法时，同学们大都根据运算定律或互逆关系。这样做实际上是把原题变换了一种方式又重作了一遍。为了减少计算上的差错，自然做两遍是值得的。但是，这样太费时间。有没有更简单的验算方法呢？有。这种方法叫“弃九法”。

为了弄懂这种方法，先要懂得“去九数”。把一个数的各位数字相加，直到和是一个一位数，我们把这个数叫做原来数的“去九数”。例如：

278：2+7+8=17→1+17=8（去九数）

361：3+6+1=10→1+0=1=（去九数）

5674：5+6+7+4=22→2+2=4（去九数）</PGN0045.TXT/PGN>

去九数也可以这样求得：把一个数中的数字 9 或相加得 9 的几个数字都划去，将剩下的数字相加，得到一个小于 9 的数，这个数就是原来数的去九数。

弃九法就是用去九数进行的。

1．加法题

两个多位数相加的结果是否正确，可以用弃九法。具体做法是：先求出每个加数的去九数，然后把它们相加。如果这个和的去九数与原来计算的和的去九数相等，那么原来的计算就

是错误的。

例 1　判断以下两题计算的结果是否正确：

(1)872+6541=7413；(2)3705+6428=10123。

解：(1)　872+6541=7413

去九数　$\underbrace{8\ +\ 7}_{15}$

去九数　6　=　6

一般地说，由于最后两个去九数相等，所以这道题的原计算结果是正确的。

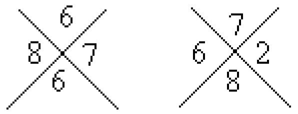
解：(2)　3705+6428=10123

去九数　$\underbrace{6\ +\ 2}$

去九数　8　≠　7

所以，这道题的计算是错误的。正确答案为 10133。

为了便于观察，上述两题也可以写成下面的形式：



其中，左边为第一个加数的去九数，右边为第二个加数的去九数，上边为原加式和的去九数，下边为左右两数和的去九数。

2．减法题

我们知道，减法与加法互为逆运算：

减数+差=被减数。

因此，验算减法可以仍用算加法的办法来进行。

例 2　判断以下两题计算的结果是否正确。

(1)8675－5489=3186；(2)10439－9996=443。

解：(1) 8675 － 5489 =3186

去九数

去九数　8　=　$\underbrace{8\ +\ 0}_{8}$

由于最后两个去九数相同，所以，一般地说，这道题的原计算结果是正确的。

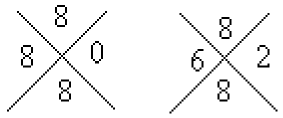
(2)　10439 － 9996 =443

去九数

去九数　8　=　$\underbrace{6\ +\ 2}_{8}$

同样地，一般地说，这道题的原计算结果也是正确的。

当然，上面的做法也可以写成简单形式：



不过，这时左边为减数的去九数，右边为原减式差的去九数，上边为被减数的去九数，下边为左右两数和的去九数。

这种弃九法的根据是什么呢？它就是利用一个数被 9 整除的特性。细心的同学一定已经看出来了，一个数的去九数就是这个数被 9 除后的余数。如果原来的计算是正确的，那么加式等号两边的余数是相同的；如果等号两边的余数不同，那就说明计算一定有错误。

应该说明的是，这种方法并不是万灵的：

1．答案中多写或少写 0 是查不出来的；

2．答案中数字的顺序写颠倒了是查不出来的；

3．你所写错的数正好也符合弃九法，这也是查不出来的（尽管这种可能性很小）。

但是，作为一种辅助方法，应该说在大多数情况下弃九法还是有用的。</PGN0048.TXT/PGN>

多位数乘以 11

一个两位以上的数乘以 11，若用竖式计算，则很容易看出，这种算法实际上就是错位相加。

比如，(1)36×11=398；(2)143×11=1573。

```
  36            143
 ×11           ×11
 ----          -----
   36           143
  36           143
 ----          -----
  396          1573
```

我们认真观察以上两个算式就会发现：

$36\times11=3\ \ 9\ \ 6$，其中 $9 = 3+6$；$143\times11=1\ \ 5\ \ 7\ \ 3$，其中 $5 = 1+4$，$7 = 4+3$

积的头尾两位数字与被乘数的两个数相同，中间的数字就是被乘数相邻的两个数字相加的和，满十要进一，这就是这种乘法的法则。有的人形象地把上述过程通俗地概括为“头尾一拉，中间相加”。

例 1　计算：534×11。

解：5　3　4　×11

=5　8　7　4

534×11=5874。

例 2　计算：876245×11。</PGN0049.TXT/PGN>

解：8　7　6　2　4　5　×11

=　8　15　12　8　6　9　5

(9)　(6)　(3)

876245×11=9638695。

注意：这里出现了进位的情况，前两位数字之和满十进一，积的第一位数字就比被乘数的第一个数字大 1。以下情况与此类似，这里就不一一赘述了。

例 3　计算：3241×33。

解：3241×33

=3241×3×11

=9723×11

=106953

9　7　2　3 ×11

↙↘　↙↘　↙↘　↙↘

9　16　9　5　3

(10)　(6)

这道题的乘数是 11 的 3 倍，可以先将被乘数乘以 3，然后再乘以 11。

试一试

计算下列各题：

647×11　　2058×11　　70561×11

135×33　　321×66　　10101×99

</PGN0050.TXT/PGN>

十位相同、个位是“5”两数积

十位数字相同，个位数字是“5”的两个两位数相乘，实际上就是个位是“5”的两位数的平方。这样两个两位数相乘的具体法则是：相乘积的末两位一定是 25，首位是十位数字乘以它大 1 的数。

比如，(1)45×45；(2)75×75

(1) $45\times45=20\ \ 25$

↑

$4\times(4+1)$

(2) $75\times75=56\ \ 25$

↑

$7\times(7+1)$

这是因为

45×45=（40+5）×（40+5）

=40×40+（5+5）×40+5×5

=1600+400+25

=400×（4+1）+25

=100×4×（4+1）+25，</PGN0051.TXT/PGN>

75×75=（70+5）×（70+5）

=70×70+（5+5）×70+5×5

=4900+700+25

=700（7+1）+25

=100×7×（7+1）+25。

一般地说，若两位数是 $a5$（a为自然数），则 $\overline{a5}=10a+5$，(10a+5)(10a+5)=100a(a+1)+25。

其中，a(a+1)是积的前半部分；25 是积的后半部分；前半部分乘以 100 再加后半部分，正好把两部分对接在一起了。

这样一来，对于求末位是 5 的两位数的平方这类特殊问题，就非常容易了。

上述两题可以这样做：

45×45→首位 4×5=20。末位 25→2025

75×75→首位 7×8=56，末位 25→5625

试一试

直接写出下列各式的结果：

25×25 35×35 45×45 55×55

65×65 75×75 85×85 95×95

十几乘十几，几十一乘几十一

十位数字是 1 的两个两位数相乘或个位数字是 1 的两个两位数相乘，有一种共同的简算方法。具体的法则是：把两个乘数中的十位数字相乘积写在积的百位上，把两个乘数中的不同的两个数字相加之和写在乘积的十位上；把两个乘数中的个位数字相乘积写在乘积的个位上。

比如，(1)12×13；(2)21×31。</PGN0052.TXT/PGN>

$$\begin{array}{lccc} & \text{百} & \text{十} & \text{个} \\ (1)\ 12\times13= & 1 & 5 & 6 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & 1\times1 & 2+3 & 2\times3 \\ (2)\ 21\times31= & 6 & 5 & 1 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & 2\times3 & 2+3 & 1\times1 \end{array}$$

这是因为

12×13=（10+2）（10+3）

=1×1×100+（2+3）×10+2×3

=100+50+6

=156，

21×31=（20+1）（30+1）

=2×3×100+（2+3）×10+1×1

=600+50+1

=651。

这里应指出的是：每次运算结果出现满十或几十的，就要向前进一或进几。

比如，(3)15×17；(2)41×71。

(3)15×17＝2　5　5

　　↑　↑　↑

1×1　5＋7　5×7

＋1　＋3　进3

　　进1

(4)41×71＝29　1　1

　　↑　↑　↑

4×7　4＋7　1×1

＋1　进1

进2

</PGN0053.TXT/PGN>

一般地说，上述两个特殊方法可概述为：

1．若两个两位数分别是$\overline{1a}$、$\overline{1b}$(a、b为自然数)，则$\overline{1a}=10+a$，$\overline{1b}=10+b$，(10+a)(10+b)=1×1×100+(a+b)×10+ab。

其中，1×1 就是百位数；a+b 就是十位数（够 10 进位）；ab 就是个位数（够 10 进位）。

2．若两个两位数分别是$\overline{c1}$、$\overline{d1}$（a、d为自然数），则$\overline{c1}=10c+1$，$\overline{d1}=10d+1$，$(10c+1)(10d+1)=c\times d\times 100+(c+d)\times 10+1\times 1$。

其中，c×d 就是百位数（若有进位，它就占据千位和百位）；c+d 就是十位数（够 10 进位）；1×1 就是个位数。

试一试

计算下列各题：

17×18 71×81 14×19 41×91

16×13 91×61 17×12 51×71

十位相同，个位相补两数积

十位数字相同，个位数字相补的两个两位数相乘，具有这样的法则：它们的相乘积的末两位数是这两个两位数的个位数字之积，首位是十位数字乘以比它大 1 的数。

比如，(1)74×76；(2)81×89。</PGN0054.TXT/PGN>

(1) 74×76＝56　24

　　↑　↑

7×(7＋1)　4×6

(2) 81×89＝72　09

　　↑　↑

8×(8＋1)　1×9

这是因为

74×76=（70+4）（70+6）

=70×70+（4+6）×70+4×6

=70×80+4×6

=7×（7+1）×100+4×6

=5624，

81×89=（80+1）（80+9）

$=80\times80+(1+9)\times80+1\times9$

$=80\times90+1\times9$

$=8\times(8+1)\times100+1\times9$

$=7209$。

一般地说，若一个两位数的十位数字是 a，个位数字是 b，则

$(10a+b)[10a+(10-b)]$

$=100a^2+100ab+100a-100ab+10b-b^2$

$=100a^2+100a+10b-b^2$

$=100a(a+1)+b(10-b)$。

其中，$a(a+1)$就是乘积的前半部分；$b(10-b)$就是乘积的后半部分；前半部分乘以 100 再加后半部分，正好把两</PGN0055.TXT/PGN>部分对接在一起了。

应当指出的是，如果是两个三位数相乘，并且这两个三位数的百位和十位数字相同，个位数字互补，那么上述法则依然成立。

比如，134×136。

根据同样的法则可得

$$134\times136=\underset{\substack{\uparrow\\13\times(13+1)}}{182}\ \underset{\substack{\uparrow\\4\times6}}{24}$$

试一试

计算下列各式：

37×33 76×74 92×98

51×59 64×66 85×85

十位相补、个位相同两数积

个位数字相同，十位数字相补的两个两位数相乘，具有这样的法则：它们的相乘积的末两位数是个位数字的平方，首位是两个十位数字之积再加上一个个位数字。

比如，(1)24×84；(2)33×73。

$$(1)\ 24\times84=\underset{\substack{\uparrow\\2\times8+4}}{20}\ \underset{\substack{\uparrow\\4\times4}}{16}$$

</PGN0056.TXT/PGN>

$$(2)\ 33\times73=\underset{\substack{\uparrow\\3\times7+3}}{24}\ \underset{\substack{\uparrow\\3\times3}}{09}$$

这是因为

$24\times84=(20+4)(80+4)$

$=20\times80+4\times80+20\times4+4\times4$

$=1600+400+4^2$

$=100(16+4)+4^2$

$=100(2\times8+4)+4^2$

=2016，

33×73=（30+3）（70+3）

=30×70+3×70+30×3+3×3

=2100+300+3^2

=100（21+3）+3^2

=100（3×7+3）+3^2

=2409。

一般地说，若一个两位数的十位数字是 a，个位数字是 b，则

(10a+b)[10(10－a)+b]

=(10a+b)[100－10a+b]

=1000a+100b－100a^2－10ab+10ab+b^2

=100[10a－a^2+b]+b^2

=100[a(10－a)+b]+b^2。

其中，a(10－a)+b 就是乘积的前半部分；b^2 就是乘积</PGN0057.TXT/PGN>的后半部分；前半部分乘以 100 再加后半部分，正好把两部分对接在一起了。

试一试

计算下列各式：

21×81 34×74 46×66

92×12 83×23 57×57

接近 100 的两数积

这里的说的接近，一般是指和 100 上下不超过 9 的数。由于这种乘法比较复杂，我们打算分三种情况进行讨论。

1．两个乘数都比 100 小

例 1　98×94。

解：98×94=92　　12

$$\underbrace{\overset{\uparrow}{98-6}\qquad\overset{\uparrow}{2\times 6}}_{(98-6)\times 100+2\times 6}$$

这里，前面减式中，98 是被乘数，6 是乘数个位数字的补数。后面乘式中，2 和 6 分别是被乘数和乘数个位数字的补数。

这是因为

98×94=（100－2）（100－6）

=100^2－100×2－100×6+2×6</PGN0058.TXT/PGN>

=（100－2－6）×100+2×6

=（98－6）×100+2×6。

例 2　91×97。

解：91×97＝88　27

91－3　9×3

(91－3)×100+9×3

2．两个乘数都比 100 大

例 3　102×107。

解：102×107＝109　14

102+7　2×7

(102+7)×100+2×7

这里，前面加式中，102 是被乘数，7 是乘数的个位数字。后面乘式中，2 和 7 分别是被乘数和乘数的个位数字。

这是因为

102×107=（100+2）（100+7）

$=100^2$+100×2+100×7+2×7

=（100+2+7）×100+2×7

=（102+7）×100+2×7。

例 4　103×103。

解：103×103＝106　09

103+3　3×3

(103+3)×100+3×3 </PGN0059.TXT/PGN>

3．一个乘数比 100 大，另一个乘数比 100 小

例 5　106×98。

解：106×98＝103　98

106－2－1　100－6×2

(106－2－1)×100+100－6×2

这里，前面减式中，106 是被乘数，2 是乘数个位数字 8 的补数。后面乘式中，6 是被乘数的个位数字，2 仍是 8 的补数。

这是因为

106×98=（100+6）（100－2）

$=100^2$+100×6－100×2－6×2

=（100+6－2）×100－6×2

=（106－2－1）×100+100－6×2。

例 6　93×107。

解：93×107=99　51

93+7－1　100－7×7

(93+7－1)×100+100－7×7

例 6 中，93×107=107×93，所以例 6 和例 5 这两种情况是一致的。

由此看来，三种情况应有三种法则。

法则 1：当两个乘数都比 100 小的时候，它们的积可分为两部分来求，前面两位数是第一个乘数与第二个乘数个位数字的补数之差，后面两位数的两个乘数个位数字补数之</PGN0060.TXT/PGN>积。

法则 2：当两个乘数都比 100 大的时候，它们的积可分为两部分来求，前面三位数是第一个乘数与第二个乘数个位数字之和，后面两位数是两个乘数个位数字之积。

法则 3：当一个乘数超过 100，一个乘数不足 100 的时候，它们的积可分为两部分来求，前面三位数是大乘数减去小乘数个位的补数再减去 1，后面的两位数是 100 减去大乘数的个位数和小乘数个位数的补数之积。

用文字表示法则往往是罗唆的，不如用字母简明。

设 a、b 是小于 10 的自然数，则

第一种情况是：

(100－a)(100－b)</PGN0061.TXT/PGN>

$=100^2-100a-100b+ab$

$=(100-a-b)\times 100+ab$。

其中，100－a 是第一个乘数，a、b 分别是第一、二个乘数个位数字的补数。

第二种情况是：

$(100+a)(100+b)$

$=100^2+100a+100b+ab$

$=(100+a+b)\times 100+ab$。

其中，100+a 是第一个乘数，a、b 分别是第一、二个乘数的个位数字。

第三种情况是：

$(100+a)(100-b)$

$=100^2+100a-100b-ab$

$=(100+a-b)-ab$。

注意：第三种情况当然可以变形为

$(100+a)(100-b)$

$=(100+a-b-1)\times 100+100-ab$。

其中，100+a 是第一个乘数，a、b 分别是第一个乘数的个位数和第二个乘数个位数字的补数。

在以上三种情况的讨论中，应用了初中的知识，比如，有理数的运算和二项式相乘。看不懂的同学可暂时不看。

试一试

计算下列各式：

97×97 101×103　103×97

99×96 105×106　102×98

“首同尾 25”自相乘

末尾是 25 的三位数的平方，遵循以下法则：相乘积的末三位数一定是 625，与 625 对接的前面的数（两位或三位数）是由原三位数百位和个位数字组成的两位数与百位数字的积。

比如，125^2，725^2。

$$\begin{array}{lcc} 125^2 = & 15 & 625 \\ & \uparrow & \uparrow \\ & 15\times 1 & 25^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcc} 725^2 = & 525 & 625 \\ & \uparrow & \uparrow \\ & 75\times 7 & 25^2 \end{array}$$

</PGN0062.TXT/PGN>

这是因为

$125^2=（100+25）^2$

$=100^2+2\times100\times25+75^2$

$=10000+5000+25^2$

$=（10+5）\times1000+25^2$

$=\underline{15\times1}\times1000+\underline{\underline{625}}$

$=15625$，

$725^2=（700+25）^2$

$=700^2+2\times700\times25+25^2$

$=490000+35000+25^2$

$=（70+5）\times7000+25^2$

$=\underline{75\times7}\times1000+\underline{\underline{625}}$

$=52625$。

一般地说，若一个三位数的百位数字是 a，十位数字是 2，个位数字是 5，则

$(100a+25)^2$

$=10000a^2+a\times100a\times25+25^2$

$=10000a^2+5000a+25^2$

$=\underline{(10a+5)\times a}\times1000+\underline{\underline{625}}$。

其中，$(10a+5)\times a$ 就是乘积的前半部分；625 就是乘积后半部分；前半部分乘以 1000 再加后半部分，正好把</PGN0063.TXT/PGN>两部分对接在一起了。

试一试

计算下列各式：

225^2　325^2　425^2　525^2

625^2　825^2　925^2

“首同尾 75”自相乘

末尾是 75 的三位数的平方，遵循以下法则：相乘积的末三位数仍为 625，与 625 对接的前面的数（两位或三位数）是由原三位数百位和个位数字组成的两位数与百位数字加 1 的积。

比如，375^2，875^2。

$375^2=140\quad 625$

↑

$35\times(3+1)$

$875^2=765\quad 625$

↑

$85\times(8+1)$

这个法则的推导过程比较复杂，只能用初中的知识才能说清楚。下面，我们把推导过程写出来，一方面是为了从理论上说清法则的正确性；另一方面是为了前后知识的连贯、完整。

一般地说，若一个三位数的百位数字是 a，十位数字是 7，个位数字是 5，则</PGN0064.TXT/PGN>

$(100a+75)^2$

$=10000a^2+2\times100a\times75+75^2$

$=10000a^2+15000a+5625$

$=(10a^2+15a+b)\times1000+625$

$=\underline{(10a+5)(a+1)}\times1000+\underline{\underline{625}}$。

其中，(10a+b)(a+1)就是乘积的前半部分；625 就是乘积的后半部分；前半部分乘以 1000 再加后半部分，正好把两部分对接在一起了。

试一试

计算下列各式：

175^2　275^2　475^2　575^2

675^2　775^2　975^2

“以加代乘”

当乘数为 1.5 或 15 时，可以以加法代替乘法。具体办法是：当乘数为 1.5 时，可用被乘数加上它的一半，即为积；当乘数为 15 时，可用被乘数加上它的一半，再乘以 10，即为积。

例 1　计算：

(1)246×1.5　　(2)421×1.5

(3)472×15　　(4)365×15

解：(1)246×1.5=246+123=369；

(2)421×1.5=421+210.5=631.5；</PGN0065.TXT/PGN>

$$(3)472\times15=\left(472+\frac{472}{2}\right)\times10=(472+236)\times10$$
$$=708\times10=7080$$
$$(4)365\times15=\left(365+\frac{365}{2}\right)\times10=(365+182.5)\times10$$
$$=547.5\times10=5475$$

以(1)、(3)为例。这是因为

$$246\times1.5=246\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=246+\frac{246}{2},$$
$$472\times15=472\times1.5\times10=472\left(1+\frac{1}{2}\right)\times10$$
$$=\left(472+\frac{472}{2}\right)\times10$$

当乘数为 1.25 或 125 时，也可以以加法代替乘法。具体办法是：当乘数为 1.25 时，可用被乘数加上它的四分之一，即为积；当乘数为 125 时，可用被乘数加上它的四分之一，再乘以 100，即为积。

例 2　计算：

(1)336×1.25　　　(2)462×1.25
(3)132×125　　　(4)837×125

解：$(1)336\times1.25=336+\frac{336}{4}=336+84=420$；

$(2)462\times1.25=462+\frac{462}{4}=462+115.5=577.5$；

$$(3)132\times125=(132+\frac{132}{4})\times100=(132+33)\times100$$
$$=165\times100=16500;$$
$$(4)837\times125=\left(837+\frac{837}{4}\right)\times100=(837+209.25)\times100$$
$$=1045.25\times100=104625。$$

以(1)、(3)为例。这是因为

$$336\times1.25=336\times\left(1+\frac{1}{4}\right)=336+\frac{336}{4};$$
$$132\times125=132\times1.25\times100$$
$$=132\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times100$$
$$=\left(132+\frac{132}{4}\right)\times100。$$

试一试

计算下列各题：

128×1.5　　547×1.5　　7864×1.5
234×15　　469×15　　6432×15
124×1.25　　227×1.25　　2864×1.25
326×125　　463×125　　1648×125

“以除代乘”

当乘数为 5、25、125 时，都可以用除法代替乘法。具</PGN0067.TXT/PGN>体办法是：

1．用 5 去乘一个数时，如果这个数是偶数时，那么可将这个数先除以 2，再扩大 10 倍，即为积；如果这个数是奇数时，那么可将这个数先扩大 10 倍，再除以 2，即为积。

2．用 25 去乘一个数时，可将这个数先除以 4，然后再将所得的商向右移两位小数点，即为积。

3．用 125 去乘一个数时，可将这个数先除以 8，然后再将所得的商向右移动三位小数点，即为积。

例 1　计算：

(1)84×5；(2)437×5。

解：$(1)84\times5=\frac{84}{2}\times10=42\times10=420$；

$(2)437\times5=437\times10\div2=4370\div2=2185$。

这是因为

$84\times5=84\times\frac{10}{2}=\frac{84}{2}\times10$，

$437\times5=437\times\frac{10}{2}=437\times10\div2$。

显然，第一题的被乘数是偶数，先除以 2，再扩大 10 倍，这样计算比较好些。第二题的被乘数是奇数，先扩大 10 倍，再除以 2，这样计算比较好些。

例 2　计算：

(1)412×25；(2)321×25。

解：$(1)412\times25=\frac{412}{4}\times100=103\times100=10300$；

$(2)321\times25=\frac{321}{4}\times100=8025\times100=8025$。

这是因为

$412\times25=412\times\frac{100}{4}=\frac{412}{4}\times100$，

$321\times25=321\times\frac{100}{4}=\frac{321}{4}\times100$。

例 3　计算：

(1)464×125；(2)817×125。

解：$(1)464\times125=\frac{464}{8}\times1000=58000$；

$(2)817\times125=\frac{817}{8}\times1000=102125$。

这是因为

$464\times125=464\times\frac{1000}{4}=\frac{464}{8}\times1000$，

$817\times125=817\times\frac{1000}{8}=\frac{817}{8}\times1000$。

试一试

计算下列各题：

96×5	826×5	971×5
84×25	124×25	325×25
168×125	864×125	321×125

</PGN0069.TXT/PGN>

巧妙的试商法

应该说一位数除法都可以用撞商的办法去试商，所有巧妙的方法也不见得巧多少。这里着重研究有代表性的两位数除法。

首位试商法

首位试商法是一种基本的方法。所谓首位是指除数的首位。

1．当除数的个位是 1、2、3 时，可先用四舍五入法后再用首位试商法进行试商。比如，除数是 51、72、93，可分别看作 50、70、90 去试商。因此，这种方法又叫“去尾法”。

当除数前两位够除时，比如，744÷31，除数取首位 3，被除数取 7 进行试商，显然商 2，商的首位写在被除数的十位上。具体过程是：

$$\begin{array}{r} 2 \\ 31\overline{)744} \\ \underline{62} \\ 124 \end{array}$$

当被除数前两位不够除时，就取三位来试商，比如，1218÷42，除数取 4，被除数取 12 来试商，估计商 3。但是，这时要验证一下，3 与 42 的积是否大于被除数 121，若大于 121，则应改商 2，商的首位写在被除数的十位数字</PGN0070.TXT/PGN>上。具体过程是：

$$\begin{array}{r} 2 \\ 42\overline{)1218} \\ \underline{84} \\ 378 \end{array}$$

以上，我们仅仅说明这类问题求商的首位及定位的方法，其实，以后再除的方法依旧，无非是陆续除得的商，挨位写下去就是了。上述两题完整的做法如下：

$$\begin{array}{r} 24 \\ 31\overline{)744} \\ \underline{62} \\ 124 \\ \underline{124} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 29 \\ 42\overline{)1218} \\ \underline{84} \\ 378 \\ \underline{378} \\ 0 \end{array}$$

2．当除数的个位是 7、8、9 时，仍先用四舍五入法，再用首位试商法进行试商。比如，除数是 47、68、89，可分别看作 50、70、90 去试商。因此，这种方法又叫“进一法”。

当被除数的前两位够除时，比如，846÷47，把 47 看作 50，除数取首位 5，被除数取 8 进行试商，显然商 1。商的首位写在被除数的十位上。具体过程是：

$$\begin{array}{r} 1 \\ 47\overline{)846} \\ \underline{47} \\ 376 \end{array}$$

当被除数前两位不够除时，就取三位来试商，比如，2262÷78，把 78 看作 80，除数取首位 8，被除数取 22 来试</PGN0071.TXT/PGN>商，估计商 2。但是，这时要验证一下，2 与 78 的积是否大于被除数 226，若大于 226，则应改商 1，商的首位写在被除数的十位数上。具体过程是：

$$\begin{array}{r} 2 \\ 78\overline{)2262} \\ \underline{156} \\ 702 \end{array}$$

以上两题的完整过程是：

$$\begin{array}{r} 18 \\ 47\overline{)846} \\ \underline{47} \\ 376 \\ \underline{376} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 29 \\ 78\overline{)2262} \\ \underline{156} \\ 702 \\ \underline{702} \\ 0 \end{array}$$

以上两种情况都是除数接近整十数的情况。

3．当除数的个位是 4、5、6 时，仍可以按首位试商法，但是往往要试商多次。这时，最好的办法是一律按末尾是 5 的情况去试商。这种方法要熟记 15、25、35……95 乘以 2 至 9 的积。比如，1224÷36，把 36 看作 35，而 35×3=105，显然商 3。全过程是：

$$\begin{array}{r} 34 \\ 36\overline{)1224} \\ \underline{108} \\ 144 \\ \underline{144} \\ 0 \end{array}$$

</PGN0072.TXT/PGN>

“商 5 法”

两位数作除数的除法，什么时候商 5 呢？

1．当一次能除尽的时候，可用“商 5 法”：当除数（两位数）10 倍的一半与被除数相等（或相近），可以直接试商“5”。

例 1　计算：(1)70÷14；(2)125÷25。

解：(1)

$$\begin{array}{r} 5 \\ 14\overline{)70} \\ \underline{70} \\ 0 \end{array}$$

14 的 10 倍是 140，它的一半正好是 70，所以直接商 5。

(2)
$$\begin{array}{r} 5 \\ 25\overline{)125} \\ \underline{125} \\ 0 \end{array}$$

25 的 10 倍数是 250，它的一半正好是 125，所以直接商 5。

上述办法对一次可以除尽的题是有效的，但是对一次除不尽的题，在表述上就显得不够完善了。

2．当一次不能除尽的时候，可用“无除半商 5”：“无除”是指被除数的前两位不够除；“半商 5”是指若被除数的前两位恰好等于（或接近）除数的一半，则可以直接商 5。

例 2　计算：(1)1248÷24；(2)2385÷45。

分析：(1)当被除数的前两位 12 不够除时，就取前三位 124 来试商。因为被除数的前两位 12 正好等于除数 24 的</PGN0073.TXT/PGN>一半，所以可以直接商 5。

(2)当被除数的前两位 23 不够除时，就取前三位来试商。因为被除数的前两位 23 接近除数 45 的一半，所以可以直接商 5。

解：(1)
$$\begin{array}{r} 52 \\ 24\overline{)1248} \\ \underline{120} \\ 48 \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$$
(2)
$$\begin{array}{r} 53 \\ 45\overline{)2385} \\ \underline{225} \\ 135 \\ \underline{135} \\ 0 \end{array}$$

这种试商的方法是针对一种特殊情况的：

“同头”是指被除数和除数的最高位的数字相同；“无除”仍指被除数前两位不够除。在这时，商定在被除数从前数第三位数字上边，直接商 8 或 9。

这样一来，对这种特殊除法的试商速度将大大加快。

例 3　计算：(1)5742÷58；(2)4172÷48。

分析：因为这两道题的被除数和除数的最高数位的数字相同，并且被除数的前两位不够除，所以都可以用“同头无除商 8、9”。至于到底商 9 还是商 8，就要试商了。</PGN0074.TXT/PGN>

解：(1)
$$\begin{array}{r} 99 \\ 58\overline{)5742} \\ \underline{522} \\ 522 \\ \underline{522} \\ 0 \end{array}$$
(2)
$$\begin{array}{r} 87 \\ 48\overline{)4176} \\ \underline{384} \\ 336 \\ \underline{336} \\ 0 \end{array}$$

“商 9 法”

试商 9 的方法很多，但有时不能一次完成，有没有一次定商为 9 的方法呢？有。我们以除数为两位数的除法为例。具体做法是：两位数除多位数，当被除数的前两位数字临时组成的数小于除数，且前三位数字临时组成的数与除数之和大于或等于除数的 10 倍时，可以一次定商为 9。

一般地说，假设被除数为 m，除数为 n，只有当 $9n \le m < 10n$ 时，n 除 m 的商才能是 9。同样地，$10n \le m+n < 11n$。这就是我们上述做法的根据。

例 4　下列哪些算式可以一次定商为 9

(1) $31\overline{)290}$　(2) $21\overline{)180}$　(3) $54\overline{)486}$

(4) $64\overline{)596}$　(5) $67\overline{)590}$　(6) $76\overline{)684}$

解：(1)$290+31=321>31\times10$

(2)$180+21=201<21\times10$

(3)$486+54=540=54\times10$

(4)$596+64=660>64\times10$

(5)$590+67=657<67\times10$

(6)$684+76=760=76\times10$</PGN0075.TXT/PGN>

根据我们总结的法则，一次定商为 9 的是(1)、(3)、(4)、(6)。

例5　计算：(1)　$49\overline{)4508}$　(2) $72\overline{)6480}$

分析：对于被除数不是三位数时，应先考虑前三位被两位数除的情况。

解：(1)由于 $450+49=499>49\times10$，所以，第一次试商，可以定商为 9。

$$\begin{array}{r}
92\\
49\overline{)4508}\\
441\\
\hline
98\\
98\\
\hline
0
\end{array}$$

(2)由于 $648+72=720=72\times10$，所以，第一次试商时，可以一次定商为 9。

$$\begin{array}{r}
90\\
72\overline{)6480}\\
648\\
\hline
0
\end{array}$$

试一试

下列除式中哪些除式一定商 9？

(1)　$38\overline{)346}$　(2)　$67\overline{)601}$　(3)　$43\overline{)389}$

(4)　$26\overline{)225}$　(5)　$55\overline{)514}$　(6)　$88\overline{)803}$

(7)　$47\overline{)1371}$　(8)　$64\overline{)6272}$　(9)　$91\overline{)8372}$

</PGN0070.TXT/PGN>

“以减代除”

当除数为 1.5 或 15 时，可以用减法代替除法。具体办法是：当除数为 1.5 时，从被除数里减去它的三分之一，即为商；当除数为 15 时，从

被除数里减去它的三分之一，再除以 10，即为商。

比如，(1)1875÷1.5；(2)4890÷15。

解：$(1)1875\div1.5=1875-\frac{1875}{3}=1875-625=1250$；

$$
\begin{aligned}
(2)4890\div15&=\left(4890-\frac{4890}{3}\right)\div10\\
&=\left(4890-1630\right)\div10\\
&=3260\div10=326。
\end{aligned}
$$

这是因为

$1875\div1.5=1875\times\frac{2}{3}=1875\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=1875-\frac{1875}{3}$，

$$
\begin{aligned}
4890\div15&=4890\div1.5\div10=4890\times\frac{2}{3}\div10\\
&=4890\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\div10\\
&=\left(4890-\frac{4890}{3}\right)\div10。
\end{aligned}
$$

</PGN0077.TXT/PGN>

这里应指出的是，当被除数不能被 3 整除时，大不必沿用此法，否则画蛇添足。

其实，以上两道题还有另外的简算方法。具体法则是：当除数为 1.5 时，被除数乘以 2 再除以 3，即为商；当除数为 15 时，被除数乘以 2 再除以 30，即为商。上述两题可按如下方法：

1875÷1.5=1875×2÷3=3750÷3=1250，

4890÷15=4890×2÷30=9780÷30=326。

这是因为

1875÷1.5=（1875×2）÷（1.5×2），

4890÷15=（4890×2）÷（15×2）。

这就是说，采用简算不必拘泥统一的套路，你习惯用什么方法就用什么方法，决不能削足适履。

试一试

计算下列各式：

453÷1.5　　639÷1.5　　3726÷1.5

43125÷15　　36240÷15　　83421÷15

“以乘代除”

当除数为 5、25、125 时，都可以用乘法代替除法。具体办法是：用 5 去除一个数时，将这个数乘以 2 后，向左移一位小数点，即为商；用 25 去除一个数时，将这个数乘以 4</PGN0078.TXT/PGN>后，向左移两位小数点，即为商；用 125 去除一个数时，将这个数乘以 8 后，向左移三位小数点，即为商。

例 1　计算：(1)76÷5　　(2)375÷5

(3)2115÷25　　(4)10800÷125

解：(1)76÷5=76×2÷10=152÷10=15.2；

(2)375÷5=375×2÷10=750÷10=75；

(3)2115÷25=（2115×4）÷100=8460÷100=84.6；

(4)10800÷125=（10800×8）÷1000=86400÷1000=86.4。

这是因为

76÷5=（76×2）÷（5×2）=76×2÷10，

2115÷25=（2115×4）÷100=23500÷100=235。

例 2　计算：5875÷25

解：按上面的作法，本题的计算过程是：

5875÷25=（5875×4）÷25=235000÷100=235。

这道题有没有更简单的方法呢？有。下面我们对除式进行恒等变形：

5875÷25=（5800+75）÷25

=（58×100+75）÷25

=58×100÷25+75÷25

=58×4+3

=232+3

=235

不难发现，当被除数的末尾两位数是 25 的倍数时，可以</PGN0079.TXT/PGN>去掉被除数的末尾两位数，乘以 4，再加上末尾两位数除以 25 的商，即为原除式的商。

例 3　计算：(1)67500÷25　　(2)3150÷25

(3)8225÷25　　(4)6175÷25

解：(1)67500÷25=675×4+0÷25

=2700+0

=2700；

(2)3150÷25=31×4+50÷25

=124+2

=126；

(3)8225÷25=82×4+25÷25

=328+1

=329；

(4)6175÷25=61×4+75÷25

=244+3

=247。

试一试

计算下列各式：

235÷25　　1374÷25　　7514÷25

1425÷25　　6850÷25　　3775÷25

426÷125　245÷125　8125÷125

</PGN0080.TXT/PGN>

弃九验算法（二）

弃九法不仅可以验算多位数加、减法，也可以验算乘、除法。

1．乘法题

两个多位数相乘的结果是否正确，仍可以用弃九法。具体方法是：先求出两个乘数的去九数，然后把它们相乘。如果这个积的去九数与原来计算的乘积的去九数相等，那么原来的计算是正确的。否则，原来的计算就是错误的。

例 1　判断以下运算的结果是否正确：

(1)2467×429=1058343；

(2)8459×376=3180584。

解：(1)　$2467\times429=1058343$

去九数　$\underbrace{1 \times 6}_{}$

去九数　$6 = 6$

由于最后两个去九数相等，所以原计算结果是正确的。

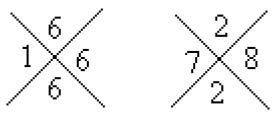
(2)　$8459\times376=3180584$

去九数　$\underbrace{8 \times 7}_{56}$

去九数　$2 = 2$

同样地，这道题的原计算结果也是正确的。</PGN0081.TXT/PGN>

为了便于观察，上述两题可以写成下面的形式：



其中，左边为第一个乘数的去九数，右边为第二个乘数的去九数，上边为原乘式积的去九数，下边为左右两数积的去九数。

2．除法题

我们知道，除数×商=被除数。因此，验算除法可以仍用验算乘法的办法进行。另外，有余数的除法也能用弃九法，这是因为

除数×商+余数=被除数。

例 2　判断以下运算的结果是否正确。

(1)229026÷931=246；

(2)162621÷467=348……105。

(1)　$229026\div931=246$

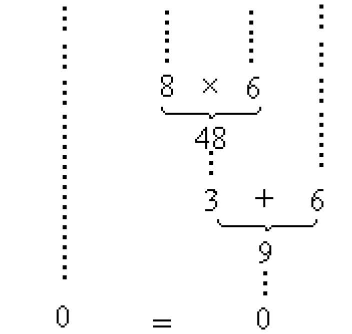
$\underbrace{4 \times 3}_{12}$

$3 = 3$

所以，一般地说，这道题的原计算结果是正确的。

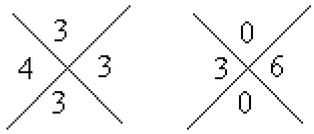
</PGN0082.TXT/PGN>

(2)　162621÷467=348…105



所以，同样地，一般地说，这道题的计算结果也是正确的。

当然，上面的做法也可以写成简单形式：



(1)　(2)

但是，这两个叉式的意义不同。

(1)式的左边为除数的去九数，右边为商的去九数，上边为原被除数的去九数，下边为左右两数积的去九数。

(2)式的左边为除数的去九数与商的去九数积的去九数，右边为余数的去九数，上边为被除数的去九数，下边为左右两数和的去九数。

应该说，有余数的除法没有完整的简单表达方式。

当然，弃九法对乘除法也不是万灵的。这里就不再赘述了。

</PGN0083.TXT/PGN>

巧用恒等变形

恒等变形是小学数学中重要的思想方法。恒等变形常常需要利用我们学过的有关加、减、乘、除的性质。它是一种有目的性的数学变换。下面几个例题就是用恒等变形的方法进行简算的实例。

例 1　计算：1651+79。

分析：在做加法时，常常用这样一种恒等变形：一个加数增加一个数，另一个加数减少同一个数，它们的和不变。这个题可以从被加数中取出 21 补在加数上，使加数变为 100，从而达到简算的目的。

解：1651+79

=（1651－21）+（78+21）

=1630+100

=1730。

例 2　计算：59.7－9.9。

分析：在做减法时，常常利用这样一种恒等变形：被减数、减数增加同一个加数，差不变。这道题可以让减数增加 0.1，变为 10。为了恒等，必须使被减数也增加同一个 0.1。

解：59.7－9.9

=（59.7+0.1）－（9.9+0.1）

=59.8－10

=49.8。</PGN0084.TXT/PGN>

例 3　计算：5.84×1.25。

分析：在做乘法时，常常利用这样一种恒等变形：一个因数扩大若干倍，另一个因数同时缩小相同的倍数，积不变。这个题可让被乘数缩小 8 倍，乘数同时扩大 8 倍。这不是盲目的，因为我们熟知：1.25×8=10。

解：5.84×1.25

=（5.84÷8）×（1.25×）

=0.73×10

=7.3。

例 4　计算：9.7÷2.5。

分析：在做除法时，常常利用这样一种恒等变形：被除数、除数都同时扩大相同的倍数，商不变。因为大家熟知：2.5×4=10，所以，我们很自然地想到，使原除式中被除数和除数都同时扩大 4 倍。

解：9.7÷2.5

=（9.7×4）÷（2.5×4）

=38.8÷10

=3.88。

试一试

计算下列各式：

(1)2582+178　　　　　　(2)67.86－9.93

(3)6.48×12.5　　　　　　</PGN0085.TXT/PGN>(4)4.61÷0.25

(5)0.0125×140+12.5×0.25+1.25×6.1

巧用运算规律

在整数四则运算中，常常通过巧妙地利用交换律、结合律、分配律，达到简算的目的。在利用这些算律时，头脑一定要灵活，目的性要非常明确。

例 1　计算：54×88。

分析：这个乘积中，54 能分解出因数 9，88 能分解出因数 11，因而乘积中可出现因数 99，99=100－1。在求积过程中，尽量凑成 100，这样利于简算。

解：54×88

=6×9×11×8

=48×99

=48×（100－1）

=4800－48

=4752。

例 2　计算：125×71。

分析：这个乘积中有 125，要是出现 8，就会凑成 1000，这有利于简

算。如何使因数出现 8 呢？由于 71=72－1，而 72=8×9，问题解决了。

解：125×71

=125×（72－1）</PGN0086.TXT/PGN>

=125×8×9－125

=1000×9－125

=9000－125

=8875。

例 3　计算：6666×3333。

分析：这个乘积中有 3333，要是把它扩大 3 倍，就会出现 9999，而 9999=10000－1。这样就凑成了 10000，有利于简算。

解：6666×3333

=（6666÷3）×（3333×3）

=2222×9999

=2222×（10000－1）

=22220000－2222

=22217778。

例 4　计算：1999+999×999。

分析：999×999 可以认为 999 个 999，再多 1 个 999，就会凑成 1000 个 999 了。沿着这种思路去想，有利于简算。

解：1999+999×999

=1000+999+999×999

=1000+999×1000

=1000（1+999）

=1000000。

例 5　计算：11.6×23－46×0.8。

</PGN0087.TXT/PGN>

分析：这个题中，被减数中有因数 23，减数中有 46，而 46=23×2，因此可考虑提取公因数 23。这样可以使运算简化。

解：11.6×23－46×0.8

=11.6×23－23×2×0.8

=23（11.6－1.6）

=23×10

=230。

上述的例子还可以举出不少，事实上，仅举以上几个例子就足够了。这些做法的共同点：一是应用了算律；二是机敏地创造机会，使算式中出现 10、100、1000、10000……

试一试

计算下列各式：

(1)63×77　　　　(2)375×55

(3)462×333　　　　(4)5.6×0.125+10.4÷8

(5)0.75×0.125×6×0.8

(6)12.5×32×2.5

(7)2.01×18.5

(8)0.67×2.8+6.2×0.67+0.67</PGN0088.TXT/PGN>

一拆为二

在分数加减法运算中，常常要把 1 个分数拆成两个分数的差或和。这样一来，把隐含的关系明朗了，其中有些分数可以互相抵消，从而大大简化了运算。

拆成两个分数相减

例1　计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$。

分析：这道题光是通分就要做一阵子了。有没有既迅速又正确的计算方法呢？

经过仔细观察，我们发现：每个分数的分母都是由两个连续的自然数和积所组成的。这样一来，上式可以改写为：

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}$。

在学习通分时，大家都知道：当两个分数的分母互质时，它们的公分母就是这两个分数的分母的乘积。有了这个经验，我们不难想到，把上面每一个分数拆成两个：

$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，

$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，

</PGN0089.TXT/PGN>

$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，

……………………

$\frac{1}{9\times10}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$。

解：$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$

$=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{7\times 8}+\frac{1}{8\times 9}$

$+\frac{1}{9\times 10}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

$-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$

$=1-\frac{1}{10}$

$=\frac{9}{10}$。

例2　**计算：**$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$。

分析：根据上题的经验，本题的分母也可以变成两个自然数的积，上式可以变为：

$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\frac{1}{9\times 11}$。</PGN0090.TXT/PGN>

但是，每个分母中的两个自然数不是连续的，都相差 2。我们仍用上题的方法尝试一下：

$\frac{1}{1\times 3}\neq 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

$\frac{1}{3\times 5}\neq \frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$，

$\frac{1}{5\times 7}\neq \frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$，

$\frac{1}{7\times 9}\neq \frac{1}{7}-\frac{1}{9}=\frac{2}{63}$，

$\frac{1}{9\times 11}\neq \frac{1}{9}-\frac{1}{11}=\frac{2}{99}$。

不难发现，为了使上面式子成为等式，右边应乘以$\frac{1}{2}$**，所以**

$$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3}),$$

$$\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}),$$

$$\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}),$$

$$\frac{1}{7\times9}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}),$$

$$\frac{1}{9\times11}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{9}-\frac{1}{11})。$$

</PGN0091.TXT/PGN>

解：$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$

$$=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times11}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{11})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{11}$$

$$=\frac{5}{11}。$$

拆成两个分数相加

例3　计算：$1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}$。

分析：根据我们上面做题的经验，本题仍从分母上想，不难发现，原式的分母仍然可以看成两个自然数的积。上式可改为：

$$\frac{3}{1\times2}-\frac{5}{2\times3}+\frac{7}{3\times4}-\frac{9}{4\times5}+\frac{11}{5\times6}-\frac{13}{6\times7}。$$

但是，这时每个分数不能拆成两个分数的差，只能拆成两个分数的和，即

$$(1+\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})-(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})-(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})。$$

解：$1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}$

$=\frac{3}{1\times2}-\frac{5}{2\times3}+\frac{7}{3\times4}-\frac{9}{4\times5}+\frac{11}{5\times6}-\frac{13}{6\times7}$

$=(1+\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})-(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})-(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$

$=1-\frac{1}{7}$

$=\frac{6}{7}$。

例4　**计算：**$1\frac{1}{3}-\frac{8}{15}+\frac{12}{35}-\frac{16}{63}+\frac{20}{99}$。

解：$1\frac{1}{3}-\frac{8}{15}+\frac{12}{35}-\frac{16}{63}+\frac{20}{99}$

$=(1+\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})-(\frac{1}{7}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{11})$

$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$

$=1\frac{1}{11}$。

试一试

计算下列各题：

1．$\frac{1}{12\times13}+\frac{1}{13\times14}+\frac{1}{14\times15}+\frac{1}{15\times16}+\frac{1}{16\times17}+\frac{1}{17\times18}$
$+\frac{1}{18\times19}+\frac{1}{19\times20}$

2．$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{98\times100}$

3．$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{97\times100}$

4．$\frac{3}{1\times2}-\frac{5}{2\times3}+\frac{7}{3\times4}+\cdots+\frac{199}{99\times100}$

5． $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3\cdots+99+100}$

奇妙的单位分数

所谓单位分数，就是分子为 1 的分数。上节中例 1、例 2</PGN0094.TXT/PGN>中的加数都是单位分数。在做单位分数加法时，我们悟出一个道理：当两个单位分数的分母是连续的两个自然数时，它们的差等于它们的积：

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}$$

根据这种特殊的关系，我们可以把有关运算的过程简化。

例1　**计算：**$(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})\times1\frac{2}{5}$

解：$(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})\times1\frac{2}{5}$

$=\frac{1}{\underset{1}{\cancel{7}}}\times\frac{1}{8}\times\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{5}$

$=\frac{1}{40}$。

例2　**计算：**$1+\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

解：$1+\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

$=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

$=1$。

例3　**计算：**（$\frac{1}{12}-\frac{1}{13}$）　$+1\frac{1}{12}+\frac{1}{20}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

解：$(\frac{1}{12}-\frac{1}{13})\div1\frac{1}{12}+\frac{1}{20}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

$=\frac{1}{12}\times\frac{1}{13}\times\frac{12}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

$=\frac{1}{169}$。

如果你想编一道题，让它的最后结果是某个单位分数，那么可以把上述公式变形：

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}。$$

例如：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$$

要是你有兴趣，可以一直写下去。

试一试

计算下列各题：

1．$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\div(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$

2．$(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\times 274$ </PGN0096.TXT/PGN>

3．$(\frac{1}{17}-\frac{1}{18})\times 1\frac{2}{15}\div(\frac{1}{18}-\frac{1}{19})$

先借后还

借东西要还，既是做人的基本品德，又是数学中的重要的解题思想。

例1 **计算：**$\frac{7}{16}+\frac{5}{16}+\frac{17}{32}+\frac{3}{16}$

分析：本题的一般做法是先通分，再相加。这样做势必影响做题速度。如果从凑 1 着眼，那么很快就能找到一种“先借后还”的解题方法。

解：$\frac{7}{16}+\frac{5}{16}+\frac{17}{32}+\frac{3}{16}$

$=(\frac{7}{16}+\frac{5}{16}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16})+\frac{17}{32}-\frac{1}{16}$

$=1+\frac{17}{32}-\frac{1}{16}$

$=1\frac{15}{32}$。

例2 **计算：**$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$。

分析：本题仍然可以采用“先借后还”的办法。我们把原式加上 $\frac{1}{64}$ **会得多少呢？** </PGN0097.TXT/PGN>

解：∵ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$=1$，

∴ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$

$=1-\frac{1}{64}$

$=\frac{63}{64}$。

以上单位分数相加得 1 的过程可以心算，解题时可直接写出：

原式 $=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$。

</PGN0098.TXT/PGN>

试一试

计算下列各题：

1．$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$

2．$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$

“个数折半”法

1．同分母的所有真分数相加

求同分母的所有真分数之和，有一种特殊的方法叫个数折半法。具体法则是：同分母的所有真分数相加，只要用这些分数的个数除以 2 就能得出结果。

当分数的个数是偶数时，比如

$(1)\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{4}{2}=2$；

$(2)\frac{1}{11}+\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{4}{11}+\frac{5}{11}+\frac{6}{11}+\frac{7}{11}+\frac{8}{11}+\frac{9}{11}+\frac{10}{11}=\frac{10}{2}=5$。

当分数的个数是奇数时，比如

$(1)\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$；

</PGN0099.

$(2)\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$.

TXT/PGN>

以上例子说明，上述法则也可以叙述为：同分母的所有真分数相加，只要用最后一个分数的分子除以 2 就得出结果。

2．分母为偶数、所有分子为奇数的真分数相加

求分母为偶数、所有分子为奇数的真分数之和的方法仍是个数折半法。具体法则是：分母为偶数、所有分子为奇数的同分母真分数相加，只要用这些分数的个数除以 2 就能得出结果。

比如，$(1)\frac{1}{6}+\frac{3}{6}+\frac{5}{6}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$；

$(2)\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{4}{2}=2$;

$(3)\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{5}{10}+\frac{7}{10}+\frac{9}{10}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$。

3．同分母的所有最简真分数（既约分数）相加

求同分母的所有最简真分数之和的方法还是个数折半法。具体法则是：同分母的所有最简真分数相加，只要用这些分数个数除以 2 就能得出结果。

比如，$(1)\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{2}{2}=1$;

$(2)\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{7}{10}+\frac{9}{10}=\frac{4}{2}=2$；

$(3)\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{11}{12}=\frac{4}{2}=2$。

试一试

计算下列各题。

1．$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}$

2．$\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{5}{12}+\frac{6}{12}+\frac{7}{12}+\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}+\frac{11}{12}$

3．$\frac{1}{13}+\frac{2}{13}+\frac{3}{13}+\frac{4}{13}+\frac{5}{13}+\frac{6}{13}+\frac{7}{13}+\frac{8}{13}+\frac{9}{13}+\frac{10}{13}+\frac{11}{13}+\frac{12}{13}$

4．$\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{4}{16}+\frac{5}{16}+\frac{6}{16}+\frac{7}{16}+\frac{8}{16}+\frac{9}{16}+\frac{10}{16}+\frac{11}{16}+\frac{12}{16}$

$+\frac{13}{16}+\frac{14}{16}+\frac{15}{16}$

5．$\frac{1}{9}+\frac{3}{9}+\frac{5}{9}+\frac{7}{9}$

6．$\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{9}{12}+\frac{11}{12}$

7．$\frac{1}{13}+\frac{3}{13}+\frac{5}{13}+\frac{7}{13}+\frac{9}{13}+\frac{11}{13}$

8．$\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{5}{16}+\frac{7}{16}+\frac{9}{16}+\frac{11}{16}+\frac{13}{16}+\frac{15}{16}$

9．$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}$

10．$\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{11}{12}$

巧算带分数减法

1．减数凑整法

如果把带分数减去带分数转化为带分数减去整数，那么这时的减法便得到了简化。

为了达到这个目的，我们可以运用“被减数、减数同时增加或减少相同的数，它们的差不变”的性质。

比如，$(1)4-2\frac{2}{5}$; $(2)6\frac{1}{4}-3\frac{6}{5}$。

$$(1)4-2\frac{2}{5}=(4+\frac{3}{5})-(2\frac{2}{5}+\frac{3}{5})=4\frac{3}{5}-3=1\frac{3}{5};$$

$$(2)6\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}=6\frac{3}{12}-3\frac{10}{12}=(6\frac{3}{12}+\frac{2}{12})-(3\frac{10}{12}+\frac{2}{12})$$

$$=6\frac{5}{12}-4=2\frac{5}{12}。$$

这里，关键性的一步可以通过心算来进行，上述过程可以简化：

$(1)4-2\frac{2}{5}=4\frac{3}{5}-3=1\frac{3}{5}$；

</PGN000102.TXT/PGN>

$(2)6\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}=6\frac{3}{12}-3\frac{10}{12}=6\frac{5}{12}-4=2\frac{5}{12}$。

按照这种思路，倒不一定是做减法，某些加法也可以让一个加数变为整数来达到简化运算的目的。

比如，$9\frac{14}{15}+3\frac{1}{5}=8\frac{14}{15}+\frac{1}{15}+3\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=9+3\frac{1}{5}-\frac{1}{15}$

$=12\frac{3}{15}-\frac{1}{15}=12\frac{2}{15}$。

2．交换位置法

当两个带分数相减时，如果被减数的真分数小于减数的真分数，那么可用整数部分的差减去分数部分的差。

比如，$(1)3\frac{2}{9}-2\frac{5}{9}$；$(2)4\frac{1}{6}-2\frac{2}{3}$。

$(1)3\frac{2}{9}-2\frac{5}{9}=(3-2)+(\frac{2}{9}-\frac{5}{9})=(3-2)-(\frac{5}{9}-\frac{2}{9})=1-\frac{3}{9}=\frac{2}{3}$；

$(2)4\frac{1}{6}-2\frac{2}{3}=(4-2)+(\frac{1}{6}-\frac{2}{3})=(4-2)-(\frac{2}{3}-\frac{1}{6})=2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$。

试一试

计算下列各题：</PGN000103.TXT/PGN>

$7-4\frac{5}{6}$　　$10-3\frac{7}{9}$　　$5-3\frac{1}{4}$

$4\frac{1}{3}-2\frac{11}{12}$　　$6\frac{1}{7}-4\frac{5}{14}$　　$8\frac{3}{13}-5\frac{1}{2}$

巧算带分数乘法

有一些特殊的两个带分数相乘，常常有一些特殊的巧算方法。

1．整数部分相同，分数部分的和是 1

两个带分数相乘，它们的整数部分相同，分数部分的和是 1，乘积也是一个带分数，整数部分是一个因数的整数部分乘以比它大 1 的数，分数部分是两个因数的分数部分的乘积。

例1　计算：$(1)6\frac{3}{5}\times 6\frac{2}{5}$；$(2)8\frac{3}{7}\times 8\frac{4}{7}$。

解：$(1)6\frac{3}{5}\times 6\frac{2}{5}=6\times(6+1)+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$

$$=42+\frac{6}{25}$$

$$=42\frac{6}{25}$$；

$(2)8\frac{3}{7}\times 8\frac{4}{7}=8\times(8+1)+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}$

$$=72+\frac{12}{49}$$

</PGN000104.TXT/PGN>

$$=72\frac{12}{49}$$。

这是因为

$$6\frac{3}{5}\times 6\frac{2}{5}=(6+\frac{3}{5})(6+\frac{2}{5})$$

$$=6^2+\frac{3}{5}\times 6+6\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$$

$$=6^2+6(\frac{3}{5}+\frac{2}{5})+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$$

$$=6^2+6+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$$

$$=6(6+1)+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5};$$

$$8\frac{3}{7}\times 8\frac{4}{7}=(8+\frac{3}{7})(8+\frac{4}{7})$$

$$=8^2+\frac{3}{7}\times 8+8\times\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}$$

$$=8^2+8(\frac{3}{7}+\frac{4}{7})+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}$$

$$=8^2+8+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}$$

$$=8(8+1)+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}$$。

</PGN000105.TXT/PGN>

2．整数部分相差 1，分数部分的和是 1

两个带分数相乘，它们的整数部分相差 1，分数部分的和是 1，乘积也是一个带分数，用较大的数的整数部分的平方减去它的分数部分的平

方，所得的差就是要求的乘积。

例2　计算：$(1)2\frac{3}{7}\times3\frac{4}{7}$；$(2)4\frac{1}{6}\times3\frac{5}{6}$。

解：$(1)2\frac{3}{7}\times3\frac{4}{7}=3^2-(\frac{4}{7})^2=9-\frac{16}{49}=8\frac{33}{49}$；

$(2)4\frac{1}{6}\times3\frac{5}{6}=4^2-(\frac{1}{6})^2=16-\frac{1}{36}=15\frac{35}{36}$。

这是因为

$$2\frac{3}{7}\times3\frac{4}{7}=(3-\frac{4}{7})(3+\frac{4}{7})$$

$$=3^2-\frac{4}{7}\times3+3\times\frac{4}{7}-(\frac{4}{7})^2$$

$$=3^2-(\frac{4}{7})^2；$$

$$4\frac{1}{6}\times3\frac{5}{6}=(4+\frac{1}{6})(4-\frac{1}{6})$$

$$=4^2+\frac{1}{6}\times4-4\times\frac{1}{6}-(\frac{1}{6})^2$$

$$=4^2-(\frac{1}{6})^2。$$

注：一般地说，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。这个公式到初中一年级才能学到。</PGN000106.TXT/PGN>

3．整数部分是1，分子也是1，分母相差1

两个带分数相乘，它们的整数部分都是1，分子也都是1，分母相差1，乘积也是一个带分数。这个带分数的整数部分是1，分子是2，比较大的带分数的分母做分母。

例3　计算：

$(1)1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{3}$;　　$(2)1\frac{1}{3}\times1\frac{1}{4}$;　　$(3)1\frac{1}{4}\times1\frac{1}{5}$;

$(4)1\frac{1}{6}\times1\frac{1}{5}$;　　$(5)1\frac{1}{7}\times1\frac{1}{6}$;　　$(6)1\frac{1}{7}\times1\frac{1}{8}$。

解：$(1)1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{3}=1\frac{2}{2}=2$;

$(2)1\frac{1}{3}\times1\frac{1}{4}=1\frac{2}{3}$;

$(3)1\frac{1}{4}\times1\frac{1}{5}=1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}$；

$(4)1\frac{1}{6}\times1\frac{1}{5}=1\frac{2}{5}$；

$(5)1\frac{1}{7}\times1\frac{1}{6}=1\frac{2}{6}=1\frac{1}{3}$；

$(6)1\frac{1}{7}\times1\frac{1}{8}=1\frac{2}{7}$。

一般地说，当a为自然数时，$1\frac{1}{a}\times1\frac{1}{a+1}=1\frac{2}{a}$。

</PGN000107.TXT/PGN>

试一试

1．计算：

$(1)3\frac{1}{5}\times3\frac{4}{5}$　　$(2)2\frac{3}{8}\times2\frac{5}{8}$　　$(3)6\frac{8}{11}\times6\frac{3}{11}$

2．计算：

$(1)7\frac{1}{2}\times8\frac{1}{2}$　　$(2)6\frac{2}{3}\times5\frac{1}{3}$　　$(3)4\frac{5}{9}\times3\frac{4}{9}$

3．计算：

$(1)1\frac{1}{27}\times1\frac{1}{26}$　　$(2)1\frac{1}{79}\times1\frac{1}{80}$　　$(3)1\frac{1}{222}\times1\frac{1}{223}$

巧算两分数相除

分子、分母分别相除

分数的除法是用乘法定义的，即除以一个数等于乘以这个数的倒数。

但是，在个别情况下，分数除法仍可沿用整数除法的做法。这时，必须具备这样一个条件，被除数的分子、分母分别是除数分子、分母的倍数。具体做法是：用分子相除的商作分子，用分母相除的商作分母。

例1　计算

$(1)\frac{16}{25}\div8$　　$(2)\frac{27}{64}\div\frac{3}{4}$。

</PGN000108.TXT/PGN>

解：$(1)\frac{16}{25}\div8=\frac{16}{25}\div\frac{8}{1}=\frac{16\div8}{25\div1}=\frac{2}{25}$；

$(2)\frac{27}{64}\div\frac{3}{4}=\frac{27\div3}{64\div4}=\frac{9}{16}$。

这是因为

$$\frac{16}{25}\div 8=\frac{16}{25}\times\frac{1}{8}=\frac{16}{8}\times\frac{1}{25}=\frac{\frac{16}{8}}{\frac{25}{1}}=\frac{16\div 8}{25\div 1}。$$

$$\frac{27}{64}\div\frac{3}{4}=\frac{27}{64}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{3}\times\frac{4}{64}=\frac{\frac{27}{3}}{\frac{64}{4}}=\frac{27\div 3}{64\div 4}。$$

例 2　计算：

(1)$1\frac{1}{24}\div 4\frac{1}{6}$；(2)$1\frac{3}{32}\div 1\frac{1}{4}$。

解：(1)$1\frac{1}{24}\div 4\frac{1}{6}=\frac{25}{24}\div\frac{25}{6}=\frac{25\div 25}{24\div 6}=\frac{1}{4}$；

(2)$1\frac{3}{32}\div 1\frac{1}{4}=\frac{35}{32}\div\frac{5}{4}=\frac{35\div 5}{32\div 4}=\frac{7}{8}$。

这是因为

$$1\frac{1}{24}\div 4\frac{1}{6}=\frac{25}{24}\div\frac{25}{6}=\frac{25}{24}\times\frac{6}{25}=\frac{25}{25}\times\frac{6}{24}=\frac{\frac{25}{25}}{\frac{24}{6}}=\frac{25\div 25}{24\div 6},$$

</PGN000109.TXT/PGN>

$$1\frac{1}{32}\div 1\frac{1}{4}=\frac{35}{32}\div\frac{5}{4}=\frac{35}{32}\times\frac{4}{5}=\frac{35}{5}\times\frac{4}{32}=\frac{\frac{35}{5}}{\frac{32}{4}}=\frac{35\div 5}{32\div 4}。$$

分母相除一次得商

有一种特殊的分数除法，也不用颠倒相乘，只用分母相除，一次可得除式的商。这种带分数相除的题目中，被除数和除数的整数和分母调换了位置，而它们的分子相同。当然，把它们化成假分数时，分子仍然相同。根据分数除法计算法则，只要用原除数的分母除以被除数的分母就是所求的商。

例如，$(1)13\frac{5}{7}\div7\frac{5}{13}$；$(2)24\frac{7}{12}\div12\frac{7}{24}$。

$(1)13\frac{5}{7}\div7\frac{5}{13}=13\div7=1\frac{6}{7}$；

$(2)24\frac{7}{12}\div12\frac{7}{24}=24\div12=2$。

这是因为

$$13\frac{5}{7}\div7\frac{5}{13}=\frac{96}{7}\div\frac{96}{13}=\frac{\overset{1}{\cancel{96}}}{7}\times\frac{13}{\underset{1}{\cancel{96}}}=\frac{13}{7},$$

$$24\frac{7}{12}\div12\frac{7}{24}=\frac{295}{12}\div\frac{295}{24}=\frac{295}{12}\times\frac{24}{295}=\frac{24}{12}。$$

</PGN000110.TXT/PGN>

试一试

1．计算：

$(1)2\frac{1}{27}\div3\frac{2}{3}$　　$(2)15\frac{5}{8}\div6\frac{1}{4}$

$(3)100\frac{1}{10}\div2\frac{3}{5}$　　$(4)10\frac{1}{8}\div4\frac{1}{2}\div2\frac{1}{4}$

2．计算

$(1)9\frac{5}{7}\div7\frac{5}{9}$　　$(2)8\frac{3}{5}\div5\frac{3}{8}$

$(3)27\frac{1}{3}\div3\frac{1}{27}$　　$(4)11\frac{7}{10}\div10\frac{7}{11}$

</PGN000111.TXT/PGN>

巧解应用题

巧用倒推法

在分析应用题过程中有顺推法和倒推法。一般地说，从应用题的条件出发，一步一步向后推，直到解决问题，这种思考途径就是顺推法。反过来，从应用题的问题出发，一步一步倒着推理，逐步靠拢已知条件，直到解决问题，这种思考途径就是倒推法。

倒推法是一种很重要的数学思</PGN000112.TXT/PGN>

考方法，也是分析应用题时常用的方法。下面我们用这种方法解几道题。

例 1　光明小学六年级成立了三个课外兴趣小组,足球组的人数占参加总人数的 20%，参加无线电组和气象组人数之比是 3∶2，已知参加气象组的有 24 人，求参加兴趣小组的共多少人？

这道题用顺推法去思考，比较麻烦，很难理出头绪来。如果用逆推法进行分析，就能像剥笋壳一样，一层一层深入，直到解决问题。

首先，从 24 人出发进行逆向分析，由于无线电组、气象组人数之比是 3∶2，24 人相当于 2 份，可以求出 1 份的人数，无线电组占 3 份，用 1 份的人数乘以 3，就可得出无线电组的人数。在此基础上，可以找出两组人数之和，因为足球组人数占参加总人数的 20%，总人数为 1 倍量，所以无线电组与气象组的人数之和，相对应的必然是总人数的 1－20%=80%。

(1)1 份是多少人？

24÷2=12（人）；

(2)无线电组有多少人？

12×3=36（人）

(3)无线电组、气象组共多少人？

24+36=60（人）

(4)参加兴趣小组的共多少人？</PGN000113.TXT/PGN>

60÷(1－20%)=75（人）

综合算式：

(24+24÷2×3)÷(1－20%)

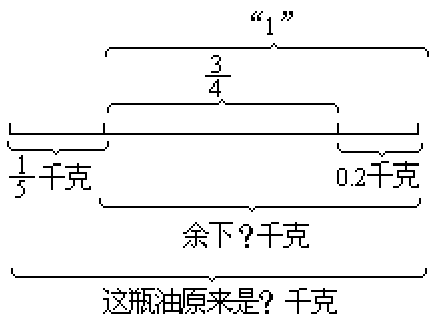
=60÷80%

=75（人）。

有时在使用倒推法分析应用题时，最好能借助图示。

例2　一瓶油吃去$\frac{1}{5}$千克，又吃去余下的$\frac{3}{4}$，瓶中还有油0.2千克，这瓶油原来是多少千克？

解答这类问题，在弄懂题意的前提下，从问题出发，用倒推法进行分析，这个逆向分析的顺序，可以用下面的线段图来表示：



由上图我们很容易得到下面结果：

(1)最后还剩下余下千克数的几分之几？

$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$；</PGN000114.TXT/PGN>

(2)余下的是多少千克？

$0.2\div\frac{1}{4}=0.8$（千克）；

(3)这瓶油原来是多少千克？

$\frac{1}{5}+0.8=1$（千克）。

综合算式：

$$\frac{1}{5}+0.2\div(1-\frac{3}{4})$$

$$=\frac{1}{5}+0.8$$

$$=1$$（千克）。

对于用倒推法来解的题目，也可以把分析的顺序倒过来，通过列方程来求解或验算。对上面例题，可把这瓶油原来的千克数设为 x，第一次吃去的是$\frac{1}{5}$千克，第二次吃去的千克数就是（$x-\frac{1}{5})\times\frac{3}{4}$，剩下的千克数已知，方程可以列出：

$$x-\frac{1}{5}-(x-\frac{1}{5})\times\frac{3}{4}=0.2。$$

解得　x=1。

例 3　王玲有一批书。他给第一个同学 1 本，又给余下的一半；接着给第二个同学 1 本，又给余下的一半；再给第三个同学 1 本，又给余下的一半；最后又给第四个同学 1 本，再加 15 本，手中还剩 8 本。问王玲原来有书多少本？</PGN000115.TXT/PGN>

分析：这道题如果用顺推法来分析解答，经较麻烦，甚至无从下手，我们采用倒推的方法，就比较巧妙了。我们可以这样倒过来想：

解：(1)先求没有给第四个同学时，手中有书：

8+15+1=24（本）

(2)再求没有给第三个同学时，手中有书：

$24\div\frac{1}{2}+1=49$（本）；

(3)然后求没有给第二个同学时，手中有书：

$49\div\frac{1}{2}+1=99$（本）；

(4)最后求没有给第一个同学时，手中有书：

$99\div\frac{1}{2}+1=199$（本）。

答：王玲原有书 199 本。

巧用“移多补少”法

求平均数应用题是小学数学中常见的一种典型应用题，一般的解答方法是：先求出总数量，再求出总份数，然后用总数量÷总份数。在一些求平均数的应用题中，也可以不用这种一般的方法，而根据题目条件的具体情况，采用“移多补少”的方法，解答起来十分简捷。

例 1　某工厂一个车间，第一天生产零件 386 个，第二天比第一天多生产 56 个，第三天比第一天少生产 26 个。在
</PGN000116.TXT/PGN>
三天中，平均每天生产多少个？

分析：这道题如果用求平均数应用题的一般方法去思考，必须先求出三天共做多少个零件，而这三天中，每天做的零件数只知道第一天的，还必须求出第二天、第三天的，这样就比较麻烦了。我们可以用“移多补少”的办法，把这道题巧妙地解答出来。

即，以第一天为标准，把第二天和第三天的差数相互抵消一下，得到：

386+(56－26)÷3=396（个）

答：这三天中，平均每天做零件 396 个。

例 2　某小学五年级一班第一组学生的身高分别为 151 厘米、152 厘米、150 厘米、149 厘米、153 厘米、151 厘米。求这组学生的身高平均数。

分析：因为在这道题中，已知的几个数字都接近 150，所以，我们就不必去把所有数加起来，可以用 150 为基数，采用“移多补少”法把这些数量的和写成：

(150+1)+(150+2)+(150+0)+(150－1)+(150+3)+(150+1)

求平均数无需把它们的和除以 6，只需简化一下，变成：

150+(1+2+0－1+3+1)÷6

=150+1=151（厘米）。

答：这组学生平均身高 151 厘米。

例 3　甲、乙两个工人，每人每天做零件 185 个，甲做了 5 天，每天做 203 个，乙每天做 170 个，乙做了多少天？</PGN000117.TXT/PGN>

分析：这一题乍看起来好像无法下手，其实，我们弄清求平均数问题的实质——“移多补少”，稍作分析，便能发现解题的窍门。

从条件上看，甲每天做的零件数高于两个人的平均数，那么，求两个人的平均数就是将甲的平均数的一部分移给乙，使他们的平均数就是两个人的平均工作量。

因为甲每天比乙每天多 203－185=18（个），所以 5 天共移给乙：18×5=90（个）；

又乙每天比平均数少 185－170=15（个），乙每天需补 15 个，乙就做了 90÷15=6（天）。

解：(203－185)×5÷(185－170)

=90÷15

=6（天）

答：乙做了 6 天。

巧用转化法

说明一个问题，往往有几种表达方式。在解答应用题时，为了更清楚明白地找到解题思路，我们不妨变换一种表达方式，可以得到意想不到的效果。

例 1　一条公路由甲、乙两队合修要 12 天可完成，现在由甲队修了 3 天后，再接着由乙队修了 1 天，共修好这条公路的 $\frac{3}{20}$，如果这条公路由甲队单独修要几天可以完成？</PGN000118.TXT/PGN>

分析：根据题意，必须把修好这条公路的总长度的工作量看作单位“1”，还要知道甲队工作效率，即可求出甲队完成这条公路的修建天数。但是，难求出甲队的工作效率，因此，假设甲队单独修要 x 天完成，用方程来解答。

$$[\frac{1}{12}-(\frac{3}{20}-\frac{1}{x}\times 3)]\times x=1。$$

但是，这个方程对小学生来讲，是无法解答的。我们就采用转化的方法来考虑：即把原题改为甲队修了 2 天后，与乙队合修 1 天，共修好这条公路的 $\frac{3}{20}$，这样可以求出甲队的工作效率，问题就迎刃而解了。

解：$1\div[(\frac{3}{20}-\frac{1}{12})\div 2]$

$=1\div[\frac{3}{20}\div 2]$

$=1\div\frac{1}{30}$

$=30$（天）

答：甲单独修这条公路要用 30 天。

有些应用题没有统一的比较对象，就需要已知条件之间的数量关系转化为同一的标准作比较的量，这就是运用转化的方法来考虑问题。

例 2　某中学共有学生 1450 人，如果新学期男生增加了他们本

身的 30%，女生减少了她们本身的 20%，这时女生人数是男生人数的一半，求原来这所中学男、女生各有多少人？</PGN000119.TXT/PGN>

分析：男生增加了他们本身的 30%，是把原来的男生人数看作单位“1”，增加后的男生是原来男生人数的 1+30%=130%。女生人数减少了她们本身的 20%，也就是说，减少后的女生人数是原来女生人数的：1－20%=80%。经过上面发生的变化，现在女生人数是男生人数的一半。这时的单位“1”已变为增加后男生人数。

从上面分析可以看出，这里有三个不同的单位“1”：男生人数增加是以原男生人数为单位“1”；女生人数减少是以原女生人数为单位“1”；新学期女生人数与男生人数比较，又是以新增加后的男生人数为单位“1”。所以 130%、80%、50%之间不能直接发生联系，需要转化为同一标准再作比较。

原来女生人数的 80%相当于原来男生人数的几分之几。

130%×50%=65%，

$65\% \div 80\% = \frac{13}{16}$。

通过转化，把全校男生人数看作单位“1”，那么女生人数相当于 $\frac{13}{16}$，全校总人数是 $1 + \frac{13}{16} = 1\frac{13}{16}$。根据题意，全校共有学生 1450 人，它与 $1\frac{13}{16}$ 是一组相对应的数量。

解：全校原有男生人数：

1450÷[(1+30%)×50%÷(1－20%)+1]

$= 1450 \div 1\frac{13}{16}$ </PGN000120.TXT/PGN>

=800（人）。

女生人数：

1450－800=650（人）。

答：这所中学原有男生 800 人，原有女生 650 人。

例 3　一根绳子先剪去全长的 $\frac{1}{4}$，又用去余下的 $\frac{2}{3}$，最后还剩下 9 米。这根绳子原有多少长？

分析：第一次剪去全长的 $\frac{1}{4}$，是用全长作单位“1”；第二次剪去余下的 $\frac{2}{3}$，用余下的长度作单位“1”。解这道题的关键是先要把单位“1”统一好。这样，必须把“又用去余下的 $\frac{2}{3}$ “转化成“又用去全长的几分之几”。

因为第一次剪去 $\frac{1}{4}$，余下 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$。

第二次剪去余下的$\frac{2}{3}$，也相当于全长的$\frac{3}{4}$的$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$。

通过转化，应用题变化成“第一次剪去全长的$\frac{1}{4}$，第二次剪去全长的$\frac{1}{2}$”。这样就可以找对量率的对应关系了。

解：$9\div[1-\frac{1}{4}-(1-\frac{1}{4})\times\frac{2}{3}]$

$=9\div[1-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}]$ </PGN000121.TXT/PGN>

$=9\div\frac{1}{4}$

$=36$（米）

答：这根绳子全长 36 米。

巧用整体“1”

在解答分数、百分数应用题的时候，往往要正确分析出题目中的整体“1”（也叫单位“1”），根据已知数或所求数与整体“1”的关系去解答有关问题。在分数、百分数应用题中，如果已知整体“1”的数量，要求与整体“1”有关的对应数量，就要用乘法去解；如果在分数应用题中，看作整体“1”的某个数量作为未知数，需要求出，就必须用除法。正确而巧妙地找出整体“1”、运用整体“1”，可以使某些应用题解答得巧妙简捷。

例 1　光明村计划修一条长 120 米的水渠，前 3 天修了 20%，照这样的速度，修完这条水渠还需要几天？

分析：这道题，如果按一般思路，我们要求出剩下多少米和每天修多少米，再求还需要几天，这里是把全水渠的长看作整体“1”。但是，如果我们把完成全水渠的天数看作整体“1”，先求出完成全水渠的天数，再求修完这条水渠还要几天，问题的解决就容易得多。即：

解：3÷20%－3=12（天）。

答：修完这条水渠还要 12 天。</PGN000122.TXT/PGN>

例 2　前进自行车厂原计划 14 天生产自行车 1680 辆,实行生产责任制后，每天比原计划多生产$\frac{2}{5}$，这样实际只要几天就能完成任务？

分析：解答这道题时，一般地都是把原计划生产的自行车辆数看作整体“1”，求出每天实际生产多少辆，再求实际要多少天能完成。但是，我们如果把工作效率看作整体“1”，解答就巧妙了。

解：(1)把原工作效率看作整体“1”，现在的工作效率就是：

$1+\frac{2}{5}=1\frac{2}{5}$；

(2)总工作量：1×14=14

(3)现在实际要几天？

$$1\times 14\div(1+\frac{2}{5})$$

$$=14\div 1\frac{2}{5}$$

$=10$（天）。

答：这样实际只要 10 天就能完成任务。

例 3　有一批水果，用 80 只大筐可以装完，如果改用 120 只小筐也可装完，已知每只大筐比每只小筐多装运 20 千克。这批水果共有多少千克？

分析：这道题并不是一般的分数应用题，但是，如果我们把这批水果总量作为整体“1”，则每只大筐可以装运这批水果总量的$\frac{1}{80}$，每只小筐可以装运这批水果总量的$\frac{1}{120}$。根据题意，可知这批水果总量的$(\frac{1}{80}-\frac{1}{120})$是20千克，这样，就可以求出这批水果的总量。

解：$20\div(\frac{1}{80}-\frac{1}{120})$

$$=20\div\frac{1}{240}$$

$=4800$（千克）。

答：这批水果总量共有 4800 千克。

例4　某车间加工一批零件，4天完成了应加工的总零件量的$\frac{2}{5}$，如果再加工 54 只，刚好完成这批零件的一半，按前 4 天的工作效率，加工这批零件需要几天可完成？

分析：我们如果把这批零件数看作整体“1”，根据题意可以这样解答。

解：$1\div(\frac{2}{5}\div 4)$

$=1\div\frac{1}{10}=10$（天）。

如果我们把完成这批零件需要的天数看作整体“1”，解答就更巧妙简捷了。

解：$4\div\frac{2}{5}$

=10（天）。

答：加工这批零件需要 10 天可以完成。

</PGN000124.TXT/PGN>

巧用假设法

由于一些应用题已知条件的数量关系不明显，为了使这些数量关系明朗化，可以对某些数量作些假设，从而找到解题途径。下面例子就是通过假设具体数来比较大小。

例 1　有编号分别为 1、2、3 的三只桶。1 号桶里的水比 3 号桶里的水多 20%，2 号桶里的水比 1 号桶里的水少 20%，问几号桶里的水最少？

因为条件中没有统一的比较对象，不能直接比较各桶里水的多少。这里，我们不妨假设已知某个桶里的水为具体数量，再进行比较。

根据条件，假设 1 号桶里的水重 30 千克，那么 2 号桶里的水重就是：30×(1－20%)=24（千克），3 号桶里的水重就是：30÷(1+20%)=25（千克），因为，30＞25＞24，所以 2 号桶的水最少。

这种假设某些量为具体数量的方法，简单、明白。但要注意，任意假设的数据应该简单，便于计算。

在解答应用题时，当遇到题目中要求两个或两个以上的未知数量时，可以假定其中一个未知数量为已知数量，或者假定两个未知数量相等，然后按照题里的已知条件进行推算，把假定的内容加以调整，从而得到正确答案。下面我们通过不同的假设方法来解一道邮票问题。

例 2　买来 4 分和 8 分邮票共 50 张，总值 3 元 4 角。
</PGN000125.TXT/PGN>求 4 分邮票、8 分邮票各多少张？

假设 1　设买来的 8 分邮票为 50 张，那么它的价值应该是：0.08×50=4（元）。而原来 50 张邮票的价值是 3.4 元，这样，50 张 8 分邮票的价值比原来 50 张邮票的价值多了(4－3.4)元。多出部分是将 4 分邮票看成 8 分邮票多算的部分。因为每张 4 分邮票看成 8 分邮票多算了(8－4)分。根据多付的总价与每一张邮票多付的钱就可以算出 4 分邮票有多少张了。

综合算式：

(0.08×50－3.4)÷(0.08－0.04)
=(4－3.4)÷0.04
=0.6÷0.04
=15（张）……4 分邮票
50－15=35（张）……8 分邮票。

假设 2　设买来的 50 张邮票都是 4 分的，那么 50 张的总价是 0.04×50=2（元）。它比实际支付的价格少付了(3.4－2)元。因为每张 4 分邮票要比每张 8 分邮票少付(0.08－0.04)元。根据少付的(3.4－2)元与每张少付的(0.08－0.04)元，可以算出 8 分邮票的张数。

综合算式：

(3.4－0.04×50)÷(0.08－0.04)
=(3.4－2)÷0.04
=1.4÷0.04
=35（张）……8 分邮票的张数。</PGN000126.TXT/PGN>

假设 3　设买来的 4 分邮票和 8 分的张数相等，各 25 张。那么 0.08×25=2(元)是买 8 分邮票的总价，0.04×25=1（元）是买 4 分邮票的总价。两种邮票共付了（2+1）元。比原来总值少付了 3.4－3=0.4（元）。为什么会少 0.4 元呢？因为 4 分邮票设有 25 张，如果把一张 4 分邮票换成一张 8 分邮票，就要多付 0.04 元。现在少了 0.4 元，算出多少张 4 分去换成 8 分邮票，0.4÷0.04=10（张）。假设 4 分邮票 25 张，其中 10

张去换 8 分邮票，实际 4 分邮票是 25－10=15（张）。假设 8 分邮票 25 张，又有 10 张 4 分邮票换成 8 分，所以 8 分邮票实际有 25+10=35 张。

综合算式

25－[3.4－（0.08×25+0.04×25）]÷（0.08－0.04）

=25－[3.4－3]÷0.04

=25－0.4÷0.04

=25－10

=15（张）……4 分邮票张数。

假设 4　设邮票数为某一具体数，如设 8 分邮票有 30 张，那么 4 分邮票就有 20 张，30 张邮票的价值是 0.08×30=2.4（元），20 张 4 分邮票的价值是 0.04×20=0.8（元），50 张邮票的价值是 2.4+0.8=3.2（元），比实际少付 3.4－3.2=0.2（元），这些钱是因为多算了 4 分邮票而造成的，所以用它去换 8 分邮票。0.2÷0.04=5（张），30+5=35（张）是 8 分邮票，20－5=15（张）是 4 分邮票。

以上我们对一道题使用了四种假设方法，目的是让读者</PGN000127.TXT/PGN>了解假设法是很灵活的。在一般情况下，前两种方法比较简便。

最后，我们要提到的是，假设法如果能同单位“1”法结合起来，往往可以找到简便有趣的解答方法。不妨举下例试一试。

例 3　某厂生产 12500 件刀具，原计划 25 天完成，工作 5 天后，改进了技术，工作效率为原来的 4 倍。这批刀具可以提前几天完成？

此题若按一般解法列式计算，需要五步算式。如果采用假设法和单位“1”法合用，可设原计划每天的工效为“1”，那么，先工作 5 天的工作量就是 5。

工作 5 天后剩余的工作量就是 25－5=20。

改进技术后每天的工作量就是 4。

改进技术后完成剩余工作量的时间是

（25－5）÷4=5（天）。

根据以上假设，这道题可以列成很简单的式子：

25－（25－5）÷4－5

=25－5－5

=15（天）。

巧用对应法

在解分数应用题的时候，要善于寻找数量和分率（几分之几）的对应关系。找对应关系的思考方法，就叫对应法。</PGN000128.TXT/PGN>这种方法对解决结构复杂、条件变化大的分数、百分数应用题十分有效。

例 1　学校买了一批图书，放在两个书柜中，其中第一柜的本数占这批图书的 58%，如果从第一柜中取出 16 本，放入第二柜内，这时两个书柜的书各占这批图书的 50%，这批图书共多少本？

我们可以这样来分析：

第一柜中的图书从原来占这批图书的 58%变成 50%，是由于取出了 16 本的缘故。两个百分数之差正好与 16 本相对应，利用这个“量”、“率”

之间的对应关系，可以比较简便地求出这批图书的本数。

解：(1)第一柜比原来减少了这批图书的百分之几？

58%－50%=8%；

(2)这批图书共多少本？

16÷8%=200（本）。

综合算式：

16÷（58%－50%）

=16÷8%

=200（本）。

答：这批图书共 200 本。

在解分数、百分数应用题时，如果能够把思路集中在“量”与“率”的对应关系上，可以寻求出最简捷的解法，请看下面一例。

例 2 煤矿 6 月份（按 30 天计算）计划采煤 36000 吨，</PGN000129.TXT/PGN>前 4 天完成

计划的$\frac{1}{6}$，照这样计算，可以提前几天完成任务？

按照常规的思路，求提前几天完成任务，就是计划的天数减去实际的天数。由于题目中的条件已经给了计划的天数，思考的焦点就集中在寻求实际用了多少天。用这种方法解题要用四个步骤。此外，如果我们不使用 36000 吨这个具体数量，直接从“率”上也可以求出实际用了多少天。也就是说，如果把采煤总量看成 1 倍量，那么前 4 天完成了采煤总量的几分之几呢？用这种思路，解题可简化为三个步骤。

如果我们能注意题目中“量”与“率”的对应关系，就可以得到更为巧妙简捷的解法。

已知前4天完成计划的$\frac{1}{6}$，这实际的4天与计划的$\frac{1}{6}$直接对应，用

$4\div\frac{1}{6}$就可以求出实际需用的天数。只须两个步骤即可完成。

解：(1)完成计划实际用了多少天？

$4\div\frac{1}{6}=24$（天）；

(2)提前几天完成任务？

30－24=6（天）

综合算式：

$30-4\div\frac{1}{6}$

$=30-24$

$=6$（天）。

</PGN000130.TXT/PGN>

答：提前 6 天完成任务。

在分数、百分数的应用题里，数量和分率的对应关系明显，解题就容易；数量和分率的对应关系隐蔽，解题就比较困难。下面举两道较难一点的题目。

例 3 胜利电扇厂一年内生产电扇 18000 台。实际头两个月就生产

了$\frac{1}{5}$。照这样计算，可以提前几个月完成生产任务？

分析：我们按照一般的思考方法，要先求出还剩多少台和实际每月生产多少台，再求实际需要几个月，等等。如果我们把实际完成计划生产的台数所用的时间看作单位“1”，那么2个月所对应的分率是$\frac{1}{5}$，用对应的方法来考虑，可以先求出实际用多少月，再求提前几个月。

解：$12-2\div\frac{1}{5}$

=12－10

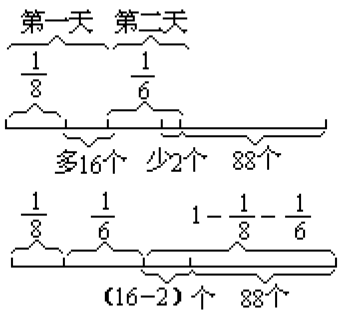
=2（个）。

答：可以提前 2 个月完成任务。

例4 某车间要加工一批零件，第一天做了全部零件数的$\frac{1}{8}$还多16个，第二天做了全部零件数的$\frac{1}{6}$少2个，还剩88个。这批零件一共有多少个？

分析：要解答这道题，我们用对应的方法去思考，把零
</PGN000131.TXT/PGN>

件总数看作单位“1”，我们必须找出 16 个、2 个、88 个与零件总数的对应分率。我们可以先画一个图来看一下，找一找它们的对应关系：



从图中可以看出，当零件总数是单位“1”时，（16－2+88）个零件对应的分率就是（$1-\frac{1}{8}-\frac{1}{6}$）

那么，根据这个对应关系，问题就好解了。

解：（$16-2+88$）$\div(1-\frac{1}{8}-\frac{1}{6})$

$=102\div\frac{17}{24}$

$=144$（个）。

答：这批零件一共有 144 个。

巧换角度解题

在解答一般复合应用题的时候，我们如果能从不同的角
</PGN000132.TXT/PGN>

度去思考，不仅可以找到多种解答方法，而且还能从中找到一种比较简便或巧妙的解答方法。

例 1　光明电影院放映两部国情教育资料影片。第一部长 1050 米，放映了 35 分钟，第二部长 1350 米，要比第一部多放映多少分钟？

分析：解答这道题，我们可以从几个不同的角度去思考：

(1)从每分钟能放映几米影片去思考：

1350÷(1050÷35)－35，

（1350－1050）÷（1050÷35）；

(2)从每米影片需要放映的时间去思考：

（35÷1050）×1350－35，

（35÷1050）×（1350－1050）；

(3)从两部影片长度的倍数去思考：

35×（1350÷1050）－35，

35×[（1350÷1050）－1]，

35×[（1350－1050）÷1050]，

……………………………………

我们根据以上几种不同角度的思考中，可以选择你认为最简便最巧妙的解法。

当然，经过思考后，可以选择第一种思考角度去解答。即

先求出每分钟能放映多少米：

1050÷35=30（米）；</PGN000133.TXT/PGN>

再求第二部要用多少分钟：

1350÷30=45（分）；

然后求第二部要比第一部多放多少分钟：

45－35=10（分）

答：第二部比第一部多 10 分钟。

例 2　小王要做 56 个零件，他每天做 7 个，已经做了 5 天。照这样计算，剩下的零件还要做几天？

分析：按照一般的思考角度，我们可以先求剩下的零件，再求还要做的天数。如果我们换一个角度，先求一共需要做的天数，再求还要做的天数，解答起来既简便又很巧妙。

即

先求一共要做多少天：

56÷7=8（天）；

再求还要做的天数：

8－5=3（天）。

综合算式：56÷7－5=3 天。

答：剩下的还要 3 天完成。

例3 某车间有职工240人，其中女职工人数占$\frac{7}{12}$，后来又调来几名女职工，这样女职工人数占总数的$\frac{3}{5}$，问调来几名女职工？

分析：这道题，用一般的方法去思考，抓住“女职工人数”这个

方面去想，这在小学数学知识范围内求解是有困难的，似乎无法可解。我们只要换一个角度去思考，从“男职工人</PGN000134.TXT/PGN>

数”这个方面去想。因为男职

工人数没有变，根据男职工人数原来占总数的（$1-\frac{7}{12}$）$\frac{5}{12}$，后来由于调来了几名女职工，男职工占总数的（$1-\frac{3}{5}$）$\frac{2}{5}$。这样，可以求出后来的总人数，再求女职工调来的人数。

$240\times\frac{5}{12}\div\frac{2}{5}=250$(名)………后来的职工总数，

$250-240=10$（名）………调来的女职工数。

答：调来女职工 10 名。

巧用消元法

在一些稍复杂的应用题中，有时会出现两个并列的未知数，又不能逐一求出，这样，就给解题带来了困难。根据题目的特点，我们可以采用先消去一个未知数的方法，然后再把题目变成只有一个未知数，等求出这个未知数后，再求另一个未知数。这种方法，我们叫“消元法”或叫“消去法”。它能使复杂的应用题，较巧妙地解答出来。

例 1　王明买 3 支铅笔和 2 本作业本，共付 0.99 元，李文买了同样的 5 支铅笔和 2 本作业本，共付 1.49 元。问一支铅笔和一本作业本各多少元？

分析：这道题里，既要求一支铅笔的价钱，又要求一本作业本的价钱，一下求出来是不可能的。我们根据条件，设法把其中一个未知数去掉。</PGN000135.TXT/PGN>

3 支铅笔	2 本作业本	共 0.99 元
5 支铅笔	2 本作业本	共 1.49 元

我们把“2 本作业本”消去，就得“2 支铅笔”的价是（1.49－0.99）=0.5 元，那么一支铅笔的价格就是：0.5÷2=0.25 元。

解：（1.49－0.99）÷（5－3）

=0.5÷2

=0.25（元）………铅笔单价，

（0.99－0.25×3）÷2

=0.24÷2

=0.12（元）………作业本单价。

答：每支铅笔 0.25 元，每本作业本 0.12 元。

例2　$3\frac{1}{2}$升油和5.5升奶共重8.99千克，7升油和5升奶共重$11\frac{4}{5}$千克。求一升油和一升奶各重多少千克？

我们可以用消元法，设法消去一个未知数。

但是，在这题中，没有一个条件数量相同，因此，我们必须先把一个条件变化一下，再进行消元。

①$3\frac{1}{2}$升油　5.5升奶　共重8.99千克

②7升油　5升奶　共重$11\frac{4}{5}$千克

先把①组各数乘以 2，得到：

①7 升油 11 升奶 共 17.98 千克</PGN000136.TXT/PGN>

②7 升油　5 升奶　共 11.8 千克

再把①减去②得到对应的数值：

6 升奶　共 6.18 千克

也就是 6 升奶重 6.18 千克，那么 1 升奶重多少千克，就是用 6.18÷6=1.03（千克）。

把每升奶 1.03 千克代入一组算式，就可以得到每升油多少千克。

$(8.99-1.03\times5.5)\div3\frac{1}{2}=0.95$千克。

答：每升油 0.95 千克，每升奶 1.03 千克。

例3　饲养场里，鸡的只数的$\frac{2}{5}$与鸭的只数的$\frac{3}{4}$之和是10000只，鸡的只数的$\frac{3}{4}$与鸭的只数的$\frac{2}{5}$之和是10700只。饲养场里的鸡、鸭各多少只？

分析：这道题，可以用和差问题来解答，但是思路比较复杂，我们不妨也用消元法来试试。因为$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{23}{20}$。所以鸡的$\frac{23}{20}$与鸭的$\frac{23}{20}$之和是$10000+10700=20700$只。这样，可以知道鸡的$\frac{1}{20}$与鸭的$\frac{1}{20}$之和是900只。因此，推理可得到鸡的$\frac{2}{5}$与鸭的$\frac{2}{5}$之和是7200只。

又因为鸡的$\frac{3}{4}$与鸭的$\frac{2}{5}$之和是10700只，这样鸭的$\frac{2}{5}$消去后，得鸡的（$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$）是3500只。

然后，用分数应用题来解答：

$(10700-7200)\div(\frac{3}{4}-\frac{2}{5})$

$=3500\div\frac{7}{20}$

$=1000$（只）………（鸡的只数），

$(10000-10000\times\frac{2}{5})\div\frac{3}{4}$

$=6000\div\frac{3}{4}$

$=8000$（只）………（鸭的只数）。

答：鸡有 10000 只，鸭有 8000 只。

例 4　1 条毛巾的价钱等于 4 条肥皂的价钱。招待所买来 36 块肥皂

和 72 条毛巾共用去 226.8 元。求 1 块肥皂和 1 条毛巾的单价。

分析：为了能找出已知条件之间的相依关系，我们将已知条件作些整理：

1 块肥皂的价钱=1 条毛巾价钱的 $\frac{1}{4}$，

1 条毛巾的价钱=1 块肥皂价钱×4。

已知买 36 块肥皂的价钱+72 条毛巾的价钱=2268 元，

所以上述关系可以写成

36 块肥皂的价钱+（72×4）块肥皂的价钱=226.8 元，或写成 </PGN000138.TXT/PGN>

$\frac{36}{4}$ 条毛巾的价钱+72 条毛巾的价钱=226.8 元。

无论选择哪一种数量间关系，都能求 1 条毛巾和 1 块肥皂的价钱。

解：(1)都折合为肥皂：

36+72×4=36+288=324（块）；

(2)每块肥皂的价钱：

226.8÷324=0.7（元）；

(3)每条毛巾的价钱：

0.7×4=2.8（元）。

另解：(1)都折合为毛巾：

$\frac{36}{4}+72=9+72=81$（条）；

(2)每条毛巾的价钱：

226.8÷81=2.8（元）；

(3)每条肥皂的价钱：

2.8÷4=0.7（元）。

答：每条毛巾价 2.8 元，每块肥皂的价钱是 0.7 元。

以上例子中，每个题都有两个未知数，其实这种方法也可以用于以上未知数的情况。

例 5　10 个李子的重量与 3 个苹果加 2 个梨的重量相等，3 个李子加半个苹果等于 1 个梨重。问多少个李子等于 1 个梨重？

根据题意，李子、苹果、梨的重量之间有以下的关系：

10 个李子的重量=3 个苹果的重量+2 个梨的重量，(1)</PGN000139.TXT/PGN>

3 个李子的重量+半个苹果的重量=1 个梨的重量。(2)

这里，我们用比较法的思路将(2)扩大 2 倍即有：

6 个李子的重量+1 个苹果的重量=2 个梨的重量。(3)

由(1)、(3)消去“梨”，得

10 个李子的重量=3 个苹果的重量+6 个李子的重量+1 个苹果的重量，

即　10 个李子的重量=6 个李子的重量+4 个苹果的重量。

所以（上式两边各减去 6 个李子的重量）

4 个李子的重量=4 个苹果的重量，

即

1 个李子的重量=1 个苹果的重量。

这样，(3)就变为

7 个李子的重量=2 个梨的重量，

即 $3\frac{1}{2}$个李子的重量$=1$个梨的重量。

答：3 个半李子的重量等于 1 个梨的重量。

总之，利用各种关系式进行比较，可以把未知数一个一个地减少，直到只剩下一个未知数。

巧用比例解题

用比例方法解答应用题是一种较特殊的方法。某些一般应用题或分数、百分数应用题，如果用比例方法去思考，有时也是一种简捷的方法。</PGN000140.TXT/PGN>

当然，运用比例方法解题时，要考虑到具体题目的特殊情况，不简便的话就不必硬用。

用比例方法来解，包括运用按比例分配法、比例法和运用正反比例法等几种。

例 1　有两筐同样重的桔子，如果从第一筐中取出 15 千克放入第二筐，这时第一筐桔子的重量是第二筐的$\frac{3}{5}$，原来每筐桔子重多少千克？

分析：这是一道较复杂的分数应用题，我们可以用按比例分配的思路去考虑：第一筐和第二筐总份数为（5+3），从第一筐取出 15 千克给第二筐后，第一筐为$\frac{3}{8}$，第二筐为$\frac{5}{8}$，它们的差是（$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$），因此，可得到解答方法：

$15\div$（$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$）$=60$（千克）。

答：原来每筐桔子为 60 千克。

例2　一袋水泥重25千克，用去$\frac{4}{5}$，用去多少千克？

分析：这是一道简单的分数应用题，我们也可以用比的方法去思考：把用去$\frac{4}{5}$看作，用去数量与总数量的比是4∶5，那么设用去数量为x千克，得到∶4∶5＝x∶25。

解：4∶5=x∶25

5x=4×25

x=20。</PGN000141.TXT/PGN>

答：用去 20 千克。

例3　一根绳子的$\frac{2}{15}$比这根绳子的$\frac{2}{5}$短3.5米，这根绳子长多少米？

分析：因为3.5米是全长的$\frac{2}{5}$与$\frac{2}{15}$的差，所以3.5米相当于全长的（$\frac{2}{5}-\frac{2}{15}$），即$\frac{4}{15}$，也就是3.5米与全长的比是4∶15，那么，设全长为x米。得到：

解：4∶15=3.5∶x，

4x=15×3.5，

x=13.125。

答：这根绳子长 13.125 米。

例 4　一批零件，单独一个人加工，甲要 20 小时，乙要 30 小时，现甲、乙共同加工，完成任务时，甲比乙多加工 180 个零件，这批零件共有多少只？

分析：这是一道较复杂的工程问题，我们也可以用比例的思路去思考：根据他们加工时间相同，加工效率与加工零件数成正比例来研究其数量关系，同时用加工零件数的差额为单位“1”。

工作效率之比：

$\frac{1}{20}$∶$\frac{1}{30}=3$∶2，则

工作总量之比也是 3∶2。

解：$180\times\frac{3+2}{3-2}$

</PGN000142.TXT/PGN>

=900（只）。

答：这批零件共有 900 只。

例 5　一列火车从上海开往天津，行了全程的 60%，距离天津还有 538 千米，这列火车行了多少千米？

分析：这是一道行程问题，同时也涉及到百分数问题，我们用比例方法来思考，解答也很巧妙。

行了的路程∶还剩下的路程

=60%∶（1－60%）

=3∶2。

解：设这列火车行了 x 千米，得到

x∶538=3∶2，

2x=538×3，

x=807。

答：这列火车行了 807 千米。

巧用替换法

在解一些应用题时，已给条件中常常出现两种或更多不同属性的量，同时我们已知不同量之间存在着换算关系。这样，如果暂时用其中一种量来替换另一种量，那么分析起来就比较容易了。这种应用替换思路来解题的方法称为替换法。

例1　建筑工地用5辆大车和4辆小车一次共运来砂子$42\frac{1}{2}$吨，每辆大车比每辆小车多运4吨，求每辆大车和每辆 < /PGN000143.TXT / PGN >
小车各运多少吨？

分析：此题虽然有大、小汽车的辆数和共运来砂子的吨数，但是，由于大、小汽车每辆运的吨数并不一样，就需要用替换法的思路进行分析。如果把 4 辆小车替换成大车，那么每辆小车比每辆大车少运 4 吨；如果每辆小车增加 4 吨，那么小车就和大车运得同样多了，4 辆小车就增加（$4\times4=$）16吨。当共运的吨数增加16吨时，将是（$42\frac{1}{2}+16=$）$58\frac{1}{2}$吨，这时4辆小车也替换成大车，共是（$5+4$）9辆大车。至此，可以先求出每辆大车运的吨数，然后再求出每辆小车运的吨数。

解：(1)每辆大车运多少吨？

$$(42\frac{1}{2}+4\times4)\div(5+4)$$
$$=58\frac{1}{2}\div6$$
$$=6\frac{1}{2}$$（吨）；

(2)每辆小车运多少吨？

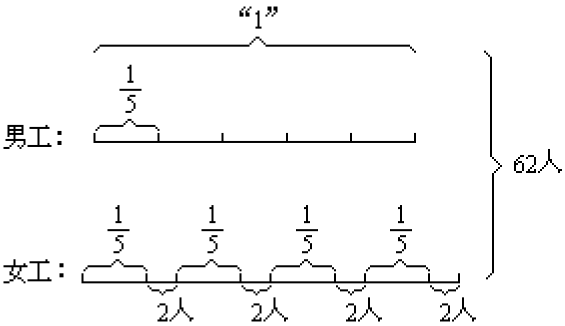
$$6\frac{1}{2}-4=2\frac{1}{2}$$（吨）。

答：每辆大车运$6\frac{1}{2}$吨；每辆小车运$2\frac{1}{2}$吨。

我们知道，任何好方法也都有它的局限性，有时，在解一道题的过程中，往往要用几种方法相互配合。下面，我们用图解法来配合替换法解一道题。</PGN000144.TXT/PGN>

例2　某车间男工、女工共62人，男工人数的$\frac{1}{5}$比女工人数的$\frac{1}{4}$少2人，求男、女工各是多少人？

分析：从条件中看到，$\frac{1}{5}$是以男工人数为1倍量，$\frac{1}{4}$是以女工人数为1倍量，为能找出男、女工人数间的替换关系，我们画出下图：



由上图可以看到，只有把女工人数的$\frac{1}{4}$用男工人数的$\frac{1}{5}$和2人来替换，

才能统一成一个 1 倍量。替换后，以男工人数做为 1 倍量。由图显示，女工人数是男工人数的（$\frac{1}{5}\times 4=$）$\frac{4}{5}$还多（$2\times 4=$）8人。如果从62人中减去8人，这时女工人数正好是男工人数的$\frac{4}{5}$，用和倍问题解题的条件已经具备。

</PGN000145.TXT/PGN>

解：(1)男工是多少人？

$$[62-2\times(1\div\frac{1}{4})]\div[1+\frac{1}{5}\times(1\div\frac{1}{4})]$$
$$=[62-8]\div[1+\frac{4}{5}]$$
$$=54\div 1\frac{4}{5}$$
$$=30(\text{人})。$$

(2)女工是多少人？

62－30=32（人）。

答：男工是 30 人，女工是 32 人。

最后，我们再来看一看对两个以上量如何使用替换法。

例3　买$1\frac{1}{2}$千克奶糖的钱和买$2\frac{2}{5}$千克水果糖的钱相等，买2千克巧克力的钱与买3千克奶糖的钱相等，买$4\frac{1}{2}$千克巧克力的钱，可买水果糖多少千克？

这道题的条件中，没有具体的钱数，只能用替换的方法求解。在替换时，还应当注意到，巧克力与水果糖并不能直接替换，要通过奶糖这个中间“媒介”进行。

分析：奶糖的千克数在题目中出现两次：一次与水果糖比，一次与巧克力比。这样，我们可以通过替换法把巧克力与水果糖进行比较。先看3千克奶糖是$1\frac{1}{2}$千克奶糖的几倍，再把3千克奶糖按价格换成水果糖。由于 3 千克奶糖与 2 千克巧克力价钱相等，所以，把它换成的水果糖除以2就</PGN000146.TXT/PGN>是1千克巧克力换成水果糖的千克数，再乘以$4\frac{1}{2}$就是最后问题的答案了。

解：(1)3千克奶糖是$1\frac{1}{2}$千克奶糖的多少倍？

$$3\div 1\frac{1}{2}=2\text{（倍）；}$$

(2)3 千克奶糖可换水果糖多少千克？

$$2\frac{2}{5}\times 2=4\frac{4}{2}(\text{千克})\text{；}$$

(3)1 千克巧克力钱可买水果糖多少千克？

$4\frac{4}{5}\div 2=2\frac{2}{5}$(千克)；

(4)$4\frac{1}{2}$千克巧克力钱可买水果糖多少千克？

$2\frac{2}{5}\times 4\frac{1}{2}=10\frac{4}{5}$（千克）。

综合算式：

$2\frac{2}{5}\times(3\div 1\frac{1}{2})\div 2\times 4$

$=10\frac{4}{5}$（千克）。

答：$4\frac{1}{2}$千克巧克力可买水果糖$10\frac{4}{5}$千克。

巧用等量关系

有一些应用题，已知条件的关系比较复杂。这时，如果</PGN000147.TXT/PGN>我们能从这些较复杂的关系里找到一种最合适的等量关系，常可使问题获得简捷的解决。这种力求寻找最佳等量关系的思路就称为“等量关系法”。

例 1　小明和小华看同一本故事书，小明比小华每天多看 5 页，小华中途因病休息 3 天，8 天后小明看的页数正好是小华看的页数的 2 倍，求这时小明和小华各看了多少页？

为了清楚起见，我们将题目中的条件和问题再归纳一下。

条件：(1)小明每天比小华多看 5 页；

(2)小华因病休息 3 天；

(3)8 天后小明看的页数是小华的 2 倍。

问题：小明和小华 8 天后各看了多少页？

由上述条件，我们得到两组等量关系：

小明每天看的页数－小华每天看的页数=5，　　(1)

小明 8 天看的页数=小华 8 天后看的页数×2。　(2)

设小明每天看书 x 页，则小华每天看书（x－5）页。

设小华每天看书 x 页，则小明每天看书（x+5）页。

在用未知数 x 列方程后，若使用等量关系(1)，显然，方程解起来比较烦琐，因为分数需要通分。于是我们选等量关系(2)来列方程。

解：设小华每天看书 x 页，则小明每天看书（x+5）页。于是有：

（x+5）×8=2×(8－3)x。

8x+40=10x，

2x=40，</PGN000148.TXT/PGN>

x=20。

于是，小明每天看书：20+5=25（页）；

8 天后小华看书：20×（8－3）=100（页）；

8 天后小明看书：25×8=200（页）。

答：8 天后小明看了 200 页，小华看了 100 页。

例 2　电视机厂有甲、乙两个装配车间，其中甲车间占两个车间

总人数的$\frac{11}{20}$，因工作需要，从甲车间调出36人到乙车间，这时两个车间人数正好相等，求甲、乙两个车间原来各有多少人？

条件：(1)甲车间占两个车间总人数的$\frac{11}{20}$；

(2)从甲车间调出 36 人到乙车间；

(3)这时两个车间人数正好相等。

问题：甲乙两个车间原来各有多少人？

由此，我们可以得到下面三组等量关系：

甲车间原来的人数－甲车间后来的人数=36，　　　(1)

甲车间原来人数－36=乙车间原有人数+36，　　　(2)

两个车间总人数 = 乙车间原有人数÷（$1-\frac{11}{20}$）。　(3)

（设两车间的总人数为单位“1”）

经过比较，显然利用等量关系(1)来列方程较为简捷。

解：设甲乙两车间共有 x 人，于是

$\frac{11}{20}x-\frac{1}{2}x=36$，</PGN000149.TXT/PGN>

$\frac{1}{20}x=36$，

x=720（人）。

这样，甲车间原有人数：$720\times\frac{11}{20}=396$（人）；

乙车间原有人数：720－396=324（人）。

答：甲车间原有 396 人，乙车间原有 324 人。

在利用等量关系列方程解题时，有时通过使用单位“1”法可找到最巧妙的解法。下面我们再看一道工程问题。

例 3　有一项工程，由甲独做，需 12 天完成，丙独做，需 20 天完成，由甲、乙、丙三人合做，需 5 天完成。如果这项工程由乙独做，还需几天完成？

条件：(1)一项工程，由甲独做 12 天完成；

(2)丙独做 20 天完成；

(3)甲乙丙合作 5 天完成。

由条件，我们首先易得到下面两组等量关系：

乙的工作效率=三人工作效率和－（甲+丙）的工作效率　　　(1)

乙的工作效率×工作时间=总工作量　　　(2)

然而，若我们通过巧用单位“1”的思路来看这道工程问题，还可以找到更好的方法。

分析：设乙单独做这项工程 x 天可以完成。如果把全工程看作单位

“1”，那么乙每天完成这项工程的$\frac{1}{x}$。根据题意，</PGN000150.TXT / PGN>

甲每天完成这项工程的$\frac{1}{12}$，丙每天完成这项工程的$\frac{1}{20}$。甲、乙、丙三人合作一天完成这项工程的（$\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{20}$）。他们合作5天完成这项工程：

5×（$\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{20}$）。

于是，我们可以找到下列等量关系：

$$5\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{\text{乙单独做工的天数}}+\frac{1}{20}\right)=1。$$

解：设乙单独做，需 x 天可以完成这项工程。

$5\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{20}\right)=1$，

$\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$，

$5+\frac{60}{x}+3=12$，

$\frac{60}{x}=4$，

$x=15$。

答：乙单独做这项工程 15 天可以完成。

巧用直觉思维

有一些应用题，由于题目的条件和结构比较特殊，常常不需要把所给的条件全部列在算式上，而是根据题目的特殊</PGN000151.TXT/PGN>性，一次或两次计算就能简单而巧妙地解答出来，我们称这种巧解法为“直觉思维”。

例 1　兄弟两人，从家到工厂，哥哥步行要 40 分钟，弟弟步行要 30 分钟。如果哥哥离家 5 分钟后，弟弟再出发，要走几分钟后，才能追上哥哥？

分析：这是一道比较特殊的追及应用题，如果用一般思维方法，我们可以先求出他们兄弟之间的速度差。即（$\frac{1}{30}-\frac{1}{40}$）$=\frac{1}{120}$。再去除哥哥先行的部分，即$\frac{5}{40}$，得到：

$$\frac{5}{40}\div\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{40}\right)=\frac{5}{40}\div\frac{1}{120}=15\text{（分）}$$

如果我们用直觉思维的方法，可以这样去想：

哥哥先离家 5 分钟，那么比弟弟晚到 5 分钟，追及时，应是弟弟在旅途中的中点，于是可以直接用 30÷2=15（分）。

答：弟弟 15 分钟可追上哥哥。

例 2　前进厂运来一堆煤，原计划每天烧 3 吨，可以烧 12 天，实际每天比原计划节省 0.6 吨，这样可比原计划多烧多少天？

分析：我们利用直觉思维来进行推想：实际每天节省煤 0.6 吨，相当

于实际每天烧煤吨数（$3-0.6$）的$\frac{1}{4}$。由于煤的总吨数一定，每天烧煤节约$\frac{1}{4}$，所以，可以烧的天数比原计划就多$\frac{1}{4}$。因此，可以用下列简单的算式就解答出这道题，即：</PGN000152.TXT/PGN>

$12\times\frac{1}{4}=3$（天）。

答：这样可比原计划多烧 3 天。

例 3　在一只底面半径是 30 厘米的圆柱形储水桶里，有一段半径是 10 厘米的圆柱形钢材浸在水中，当钢材从储水桶中取出时，桶里的水下降了 5 厘米，这段钢材有多长。

分析：如果把这道题当作一般的求体积应用题来解的话，必须要先求出这段钢材的体积，再根据半径为 10 厘米的钢材底面积，求出钢材的长。这样解法既麻烦，又属一般体积求法。我们如果用直觉思维去思考，就设想一下：钢材底面积与水面积的关系，然后再找出钢材长与水面下降部分的关系，就可以不用求体积，而直接求出钢材的长来。我们根据水面半径30厘米和钢材底面半径10厘米，看出它们的关系是：钢材底面半径是水面半径的$\frac{10}{30}$，即$\frac{1}{3}$。从而可知：钢材底面积是水面底面积的$\frac{1}{3^2}$即$\frac{1}{9}$。这样，我们可以得出钢材的长是水面下降部分的9倍。很快就找到了简捷而巧妙的解答方法。即：

5×9=45（厘米）。

答：这段钢材长 45 厘米。

巧用放缩法

在一些应用题中，由于条件和问题的特殊情况，仅从直</PGN000153.TXT/PGN>接给的已知条件中，不容易找到简捷的解题途径。这时候，我们不妨把某一个已知条件扩大或缩小一定的倍数，从而使他条件相应发生变化，由此找到简单的解答方法。

当然，什么情况下要扩大，什么情况下要缩小，这要看具体题目而定。下面，我们看几个例子。

例 1　10 千克砂糖的价钱相当 1.6 千克茶叶的价钱，如果 4 元钱可买 5 千克砂糖，那么 16 元钱可买多少千克茶叶？

分析：这道题我们如果按照一般解答思路去分析，必须先要求出 10 千克砂糖的价钱是多少，然后求出 1.6 千克茶叶的价钱，再求出每千克茶叶的价钱，从而求得 16 元钱可买多少茶叶。

我们如果用放缩的方法，把其中一个条件放大几倍来思考。我们将 4 元钱买 5 千克糖的这个条件放大 4 倍，可以知道 16 元钱可买 20 千克糖。又因为 10 千克砂糖与 1.6 千克茶叶的价钱相等，所以 20 千克砂糖价钱可买茶叶 1.6×2=3.2 千克。

解：1.6×（20÷10）

=1.6×2

=3.2（千克）。

答：16 元钱可以买 3.2 千克茶叶。

下面，我们再使用缩小的方法来解一道解。

例 2　把鸡和兔放在一起，共有 48 个头，114 只足，问鸡、兔各有几只。

分析：这是一道鸡兔同笼的典型问题，我们也用放缩法，</PGN000154.TXT/PGN>不妨把鸡和兔的足数缩小 2 倍，那么，鸡的足数和它的头数一样，而兔的足数是它的只数的 2 倍。所以，总的足数缩小 2 倍后，鸡和兔的总足数与它们的总只数相差数就是兔的只数。

解：114÷2－48=9（只）………兔的只数，

48－9=39（只）……………鸡的只数。

答：有鸡 39 只，兔 9 只。

下面，我们来看一道既采用放大的方法，又采用缩小的方法来解答的较复杂的应用题。

例 3　某工厂两个车间，甲车间每月的产值比乙车间多 5 万元，甲车间产值的 $\frac{2}{15}$ 等于乙车间的 $\frac{2}{3}$，问两个车间产值各是多少万元？

分析：这一道较复杂的分数应用题中，分数间的关系比较隐蔽，我们不妨先将“甲车间产值的 $\frac{2}{15}$ 等于乙车间产值的 $\frac{2}{3}$”这个条件的数量同时放大3倍，得到“甲车间产值的 $\frac{2}{5}$ 等于乙车间产值的2倍”。根据这个新的条件，我们再把这个条件的数量同时缩小2倍，于是，就得到了“甲车间产值的 $\frac{1}{5}$ 等于乙车间的产值。”根据这个条件，我们就可以清楚地看出“甲车间的产值比乙车间产值多5万元”也就是甲车间比乙车间多 $(1-\frac{1}{5})$，即 $\frac{4}{5}$。于是，甲车间的产值就可以求出来了。

</PGN000155.TXT/PGN>

解：$5\div(1-\frac{1}{5})$

$=5\div\frac{4}{5}$

$=6\frac{1}{4}$(万元)…………甲车间产值，

$6\frac{1}{4}-5=1\frac{1}{4}$（万元）………乙车间产值。

答：甲车间产值 6.25 万元，乙车间产值 1.25 万元。

巧用“份数”解题

在解一些分数应用题时，如果我们把分数问题变成份数问题，那么原题就变为在整数范围内对份数进行分配的问题了，从而使运算过程变得简捷而又明确。我们把这种方法称为“份数法”。下面通过一些例题来体会此方法的妙用。

例 1　维修一条下水道，甲、乙两队合修 10 天可完，两队合修 4 天后，余下的由乙队单独修还需 12 天，由乙队单独维修这条下水道需要多少天？

解：把 10 天的工作量，分成 10 份，甲、乙两队合修 4 天就是完成了 4 份，还剩下（10－4=）6 份。这 6 份乙队需要 12 天，完成 1 份需要（12÷6=）2 天，完成全部的 10 份，就需要 10 个 2 天。

综合算式：</PGN000156.TXT/PGN>

12÷（10－4）×10

=12÷6×10

=20（天）。

答：乙队单独修需要 20 天。

例2　某校绿化校园，买来树苗株数是原来校内树木株数的$\frac{7}{12}$，第一天种植买来树苗的$\frac{1}{7}$后，剩下的树苗比原有树木少180株。问原有树木多少株？

解：将原来校内树木株数平均分成 12 份，那么买来树苗株数就相当于 7 份，第一天种了 7 份中的 1 份，还剩 6 份，正好是原有树木株数的一半，这样就能很简单地求出原有树木数。

180×2=360（株）。

答：原有树木 360 株。

例3　某生产专业组今年小麦亩产375千克，比去年增产$\frac{1}{4}$，今年比去年每亩增产多少千克？

解：把去年小麦亩产量看作 4 份，则今年小麦亩产量比去年增加了 1 份，今年的亩产量相当于 5 份，所以，今年增加的亩产量相当于今年亩产量的$\frac{1}{5}$，即相当于375千克的$\frac{1}{5}$，由此可直接求出今年小麦增加的亩产量。

$375\times\frac{1}{1+4}=75$（千克）。

答：今年比去年每亩增产 75 千克。</PGN000157.TXT/PGN>

例4　有两筐苹果，已知第二筐苹果是第一筐的$\frac{9}{10}$，若从第一筐拿出10千克放入第二筐，则两筐苹果重量相等。这两筐苹果共重多少千克？

解：把第一筐苹果看作 10 份，第二筐苹果看作 9 份，那么，它们一共有 19 份，相差 1 份。由条件可知，两筐苹果相差 20 千克，即 1 份是 20 千克，所以两筐苹果一共有

20×19=380（千克）。

答：两筐苹果共重 380 千克。

以上几个例题使我们看到了利用“份数法”在解决分数应用题中的妙用。最后，我们再用此法解两道百分数应用题。

例 5　肥皂厂一个月计划生产 3200 箱肥皂，前 10 天完成 45%，按这样的速度，一个月（30 天）可超产百分之几？

解：把一个月分三份，每份 10 天。一个 10 天完成了计划的 45%，按这样的速度 3 个 10 天就完成了计划的 45%×3=135%，由此可知，一个月可超产 35%。

$$45\% \times \frac{30}{10} - 1 = 35\%。$$

答：一个月可超产 35%。

例 6　洗衣机厂一月份计划生产洗衣机 240 台，结果上半月完全月计划的 60%，下半月完成的和上半月同样多，这个月可超产多少台？

解：把一月份分成两份，每份为 15 天。这样，先求出</PGN000158.TXT/PGN>半个月超产的台数，然后再乘以 2 就可以求出一个月超产的台数。

综合算式：

240×（60%－50%）×2

=24×2

=48（台）。

答：这个月可超产 48 台。

巧用探源法

有些应用题是由两种或两种以上类型的应用题组合而成的；还有些应用题的已知条件与所求问题之间的关系比较隐蔽，使问题的难度增大。这些应用题，我们都把它们叫做复杂应用题。

任何复杂应用题都是在基本应用题的基础上发展起来的。在解题过程中，人们常常要从复杂关系和条件中探寻出隐蔽的基本问题和基本题型，最后找到解题的突破口。我们把这种解题方法叫做“探源法”。

例1　粮店卖出库存面粉的$\frac{12}{13}$后，又运进面粉3500千克，这时库存面粉千克数恰是原来的75%，每千克面粉0.37元，卖出的面粉值多少元？

这道题猛一看，关系比较复杂，使人一时无从入手。但是，若仔细分析一下，就会发现这是一道分数应用题和一般</PGN000159.TXT/PGN>应用题的复合题。

要求卖出的面粉共值多少元，现在已知道每千克面粉是 0.37 元，所以，只要再求出卖出多少千克，问题就解决了。

但是，怎么求卖出面粉的千克数呢？我们知道，解答分数应用题，关键要判断选哪个量为单位“1”，再找准量、率对应关系。

分析：根据卖出库存面粉的$\frac{12}{13}$，可以知道$\frac{12}{13}$是以原来面粉千克数为单位“1”，卖出$\frac{12}{13}$，还剩下原来面粉的$\frac{1}{13}$。通过运进面粉3500千克后，这时面粉千克数恰是原来的75%，可以知道，75%也是以原来面粉千克数为单位“1”，所以$75\%-\frac{1}{13}$得到的“分率”正好与3500千克相对应。于是，我们可以求出原来面粉的千克数，进而再求出卖出面粉的千克数，所求问题得解。

解：$1-\frac{12}{13}=\frac{1}{13}$

$75\%-\frac{1}{13}=\frac{35}{52}$，

$3500\div\frac{35}{52}=3500\times\frac{52}{35}=5200$（千克），

$5200\times\frac{12}{13}=4800$（千克），

</PGN000160.TXT/PGN>

0.37×4800=1776（元）。

答：卖出的面粉共值 1776 元。

例2 某工厂计划4天生产一批机器零件，第一天完成了总数的$\frac{3}{10}$，第二天完成了第一天的80%，后两天生产零件的比是3∶2，第四天生产了 1460 个，正好完成任务，这批零件有多少个？

这又是一道复杂应用题。我们经过对已知条件进行认真的分析和探寻后，就不难发现这是一道由分数应用题和比例分配应用题组成的复合题。

分析：根据“后两天生产零件的比是 3∶2，就可以求出第四天占后两天生产零件总数的$\frac{2}{5}$，又知第四天生产1460个，就可以求出后两天生产这批零件共有多少个：$1460\div\frac{2}{5}=3650$（个）。至此，要求这批零件的总数，就必须求出3650个所对应的分率。已知第一天完成总数的$\frac{3}{20}$，而第二天完成的是第一天的80%，也就是完成$\frac{3}{20}$的80%，那么第二天完成的就是总数的$\frac{3}{20}\times80\%=12\%$，这样3650个零件所对应的分率就是$1-\frac{3}{20}-12\%=73\%$。

解：3+2=5，

$1460\div\frac{2}{5}=1460\times\frac{5}{2}=3650$(个)，</PGN000161.TXT / PGN>

$\frac{3}{20}\times80\%=12\%$

$3650\div(1-\frac{3}{20}-12\%)=3650\div73\%$

=5000（个）。

答：这批零件共有 5000 个。

例 3　从甲地到乙地相距 270 千米，乘车和步行共用 6 小时，乘车的时间是步行的 2 倍，乘车的路程比步行多 210 千米，求乘车和步行每小时各行多少千米？

这道题不仔细看，可能觉得很容易。我们用探源法分析发现，这是一道由行程问题、和倍问题、和差问题三个典型问题复合而成的。根据题意，我们要想求乘车与步行每小时各行多少千米，就必须求出乘车与步行的时间和路程。从已知条件分析，求时间是个“和倍问题”、求路程是个“和差问题”，根据“和倍问题”与“和差问题”的解题规律，就很容易求出各自的时间和路程了。

解：(1)步行几小时？

6÷（2+1）=2（小时）。

(2)乘车用几小时？

2×2=4（小时）。

(3)步行多少千米？

（270－210）÷2=30（千米）。

(4)乘车行多少千米？

30+210=240（千米）。</PGN000162.TXT/PGN>

(5)乘车每小时行多少千米？

240÷4=60（千米）。

答：乘车每小时行 60 千米。

步行每小时行 15 千米。

巧用不变量

对于一些数量关系复杂多变的应用题，要善于从已知条件中找出不变量，用这种思路来寻找解题的突破口。这就是“不变量法”。

下面，让我们先用不变量法来解一道年龄问题。

例 1　今年小红 6 岁，她爸爸 33 岁，过几年小红的爸爸年龄正好是小红的 4 倍？

分析：今年小红的爸爸年龄比小红大“33－6=27（岁）”，由于每过一年小红和爸爸每人都增加一岁，所以若干年后小红的爸爸仍比小红大 27 岁，也就是小红与她爸爸的年龄差是不变量。所以解题时可抓住“年龄差”这个不变量来思考。

如果把几年后小红爸爸年龄看作单位“1”，那么小红年龄相当于她爸爸年龄的$\frac{1}{4}$，比她爸爸年龄少$\frac{3}{4}$，这个$\frac{3}{4}$对应的数就是27。

解：列综合算式：

$(33-6)\div(1-\frac{1}{4})-33$ < /PGN000163.TXT / PGN >

$=27\div\frac{3}{4}-33$

$=36-33$

$=3$（年）。

答：再过 3 年小红她爸爸年龄正好是小红的 4 倍。

细心的读者可能已经注意到了，上题在解题过程中采用了“单位 1”，关于这种方法，我们前边已经做了专门介绍。在利用不变量法解题时，设置“单位 1”是常常用到的方法。下面我们再看一道题。

例 2　有甲、乙两个车间，如果从甲车间调 18 人给乙车间，甲车间比乙车间少 3 人；如果从两个车间各调出 18 人，乙车间剩下人数是甲车间剩下人数的$\frac{5}{8}$，甲、乙两个车间原来各有多少人？

分析：从第一个条件中分析，“甲车间调 18 人给乙车间，甲车间比乙车间少 3 人”，可见甲车间比乙车间多 2 个 18 人又少 3 人，即（18×2－3=）33 人，这 33 人是两个车间人数之差（差量）。从第二个条件中分析，“两个车间各调出 18 人，乙车间剩下人数是甲车间剩下人数的$\frac{5}{8}$”，虽然两个车间前后人数都发生了变化，但是，由于调出的人数相等，所以这两个车间人数之差（33）始终未变。

解：设甲车间剩下人数为1倍量，当乙车间剩下人数是其$\frac{5}{8}$时，它们相差（$1-\frac{5}{8}=$）$\frac{3}{8}$。这$\frac{3}{8}$所对应的是33人，由 < /PGN000164.TXT / PGN >

此可求出甲车间剩下的人数

，这个人数加上调出的 18 人，就是甲车间原来的人数。

根据题目的第一个条件，甲车间原来人数减去 33 人，就是乙车间原来的人数。

(1) 甲车间比乙车间多多少人？

18×2-3=33（人）。

(2) 乙车间剩下人数比甲车间剩下人数少几分之几？

$1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$。

(3) 甲车间剩下多少人？

$33\div\frac{3}{8}=88$（人）。

(4) 甲车间原来有多少人？

88+18=106（人）

(5) 乙车间原来有多少人？

106－33=73（人）。

综合算式：

$(18\times 2-3)\div(1-\frac{5}{8})+18$

$=33\div\frac{3}{8}+18$

$=106$（人）………甲车间人数。

求乙车间人数的方法同(5)。

答：甲车间原来有 106 人，乙车间原来有 73 人。

有时，在应用不变量法解题时，从已知条件中不是一下</PGN000165.TXT/PGN>子能看出谁是“不变量”，这就需要我们认真审题，从有限的文字中发现“蛛丝马迹”，从而达到利用不变量法解题的目的。下面再看这样一道例题：

例3 职工子弟小学原有科技书、文艺书共630本，其中科技书占$\frac{1}{5}$，后来又买进一些科技书，这时科技书占这两种书的$\frac{3}{10}$，又买进科技书多少本？

分析：根据题目中的已知条件，原来的 630 本与增加后总本数都是 1 倍量，这两个不同的 1 倍量，为直接求出买进科技书的本数造成了困难。但是，如果读者细心地分析已知条件，不难发现，真正的不变量应该是文艺书的本数（分量），因此要从这里寻得解题的突破口。

文艺书占原来总本数的（$1-\frac{1}{5}=$）$\frac{4}{5}$，也占增加后总本数的（$1-\frac{3}{10}=$）$\frac{7}{10}$，这就说明原来总本数的$\frac{4}{5}$与增加后总本数的$\frac{7}{10}$相等。因此，用$\frac{4}{5}\div\frac{7}{10}$就是增加后总本数相当于原来总本数的$1\frac{1}{7}$倍，比原来的总本数多$\frac{1}{7}$，所多的$\frac{1}{7}$正好是又买进科技书的本数，用$630\times\frac{1}{7}$的结果，就是题目中所要求的答案。

解：(1)文艺书占原来总本数的几分之几？

$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$。

</PGN000166.TXT/PGN>

(2)文艺书占增加后总本数的几分之几？

$1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$。

(3)增加后总本数是原来总本数的几倍？

$\frac{4}{5}\div\frac{7}{10}=1\frac{1}{7}$(倍)。

(4)比原来总本数多几分之几？

$1\frac{1}{7}-1=\frac{1}{7}$。

(5)又买进科技书多少本？

$630\times\frac{1}{7}=90$(本)。

综合算式：

$$630\times\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)\div\left(1-\frac{3}{10}\right)-1\right]$$

$$=630\times\left[\frac{4}{5}\div\frac{7}{10}-1\right]$$

$$=90(\text{本})。$$

答：又买进科技书 90 本。

试一试

1.生物学家研究出一种奇怪的孢子，每个孢子每小时分裂成三个孢子，一小时后，这三个孢子中的每一个又分裂成三个，如此连续不断地进行下去。一天中午 12 时，生物学家在一个容器里放入一个孢子，到了晚上 12 时，孢子正好充满了容器。问在什么时候容器里正好装满三分之一？</PGN000167.TXT/PGN>

2.某仓库运出 5 批原料，第一批占库存总数的一半，第二批占余下总数的一半，以后每一批都运出前次剩下的一半。第五批运出后，剩下的原料全部分给甲、乙、丙三厂，甲厂得$\frac{1}{3}$，乙厂得$\frac{1}{2}$，丙厂得8吨。问最初仓库里有多少吨原料？

3.一年级植树 56 棵，比二年级少植 8 棵，三年级植树的棵数是二年级的 2 倍，三年级比一年级多植树多少棵？

4.甲、乙、丙三人参加储蓄了560元，乙储蓄的钱数是甲的$\frac{5}{7}$，乙储蓄的钱数比丙少 20%。乙、丙各储蓄多少元？

5.小学买了 3 本大字簿和 5 本作业文簿，共付 0.82 元，每本大簿比作文簿贵 0.06 元。两种簿本每本各多少元？

6.（据说此题是俄国文学家托尔斯泰喜欢的算题）一组割草人要把两块草地的草割完，大的那块草地比小的大一倍。上午，全体组员在大的一块草地里割了半天。下午将人数对半分开，一半留在大块继续割，到收工时大块已割完；另一半人到小块去割，收工时还剩一小块，需由 1 人再割 1 天才能割完，如果每人工效相等，这组割草人有多少人？

（提示：可根据题意用长方形来图解，算出还剩一小块是占大的一块草地的几分之几？）

7.将 3800 张纸订成 240 本练习本，140 本是厚的，其余是薄的。如果每本厚的比薄的多用 10 张纸，问厚、薄练</PGN000168.TXT/PGN>习本各用几张纸？

8.某车间有工人176人，其中男工人数的$\frac{1}{3}$比女工人数的$\frac{1}{4}$多12人，这个车间有男、女工各多少人？

9.松鼠采蘑菇，晴天每天采 20 个，雨天每天采 12 个，共采 112 个，

平均每天采 14 个，问雨天是多少天？

10.一个数是 5 个 2，3 个 3，2 个 5，1 个 7 的连乘积，这个数当然是许多约数是两位数，这些两位数的约数中，最大的是几？

11.五年级原有学生 42 人，男生和女生的比是 4∶3，后来又转来女生若干人，这时男生和女生的比是 6∶5，转来的女生有多少人？

12.东西两村相距 11 千米，甲、乙两人由东村去西村，甲每小时行 9 千米，乙每小时行 12 千米，当甲走出 1.5 千米后，乙才出发，乙追上甲时，距西村还有多少千米？

13.一个书架有上、下两层，如果从上层取书$\frac{1}{5}$放进下层，这时下层的书是上层的 2 倍，已知上层原有书 50 本，下层原有书多少本？

14.一筐香蕉，筐的重量是香蕉重量的$\frac{1}{12}$，卖掉19千克后，剩下香蕉重量是筐重的$2\frac{1}{2}$倍，原来筐内有香蕉多少千克？

</PGN000169.TXT/PGN>

15.买花布$6\frac{1}{2}$米、白布5米共用了35.4元，已知花布2米的价钱与白布 3 米的价钱相等，求花布、白布每米各多少元？

16.圆珠笔售价是钢笔售价的$\frac{3}{5}$，买了3支圆珠笔和5支钢笔，共用 13.6 元，圆珠笔和钢笔的单价各多少元？

17.新华书店运来一批儿童读物，第一天卖出 1800 本，第二天卖出的本数比第一天多卖$\frac{1}{9}$，余下总数的$\frac{3}{7}$第三天全部卖完，这批书共有多少本。

18.参加交通规则竞赛的男生比女生多 28 人，女生全部得“优”，男生的$\frac{3}{4}$得“优”，男、生得优的共42人，求男、女生参加竞赛的各多少人

（提示：可把女生人数作为单位“1”。）

19.甲、乙两个工人接受了加工一批零件的任务，规定两各完成这批零件的一半。已知乙的工作效率相当于甲的$\frac{4}{5}$，工作了8小时，甲完成了自己的生产任务，这时乙还差 24 个零件没有完成，这批零件共有多少个？

20.一条狗追猎 30 米外的一只狐狸，狗跳跃一次为 2 米，而狐狸仅 1 米。不过狐狸跳 3 次的时间，狗只跳 2 次。狗要追多少米能赶上狐狸？

21.甲、乙二人到书店去买书，共带去 54 元，甲用了
</PGN000170.TXT/PGN> 自己钱的 75%，乙用了自己钱的$\frac{4}{5}$，两个剩下的钱数正好相等。甲、乙原来各带去多少元？

22.菜场卖出一批鱼，已经卖出了全部的$\frac{1}{8}$，如果再卖出55千克就卖出了全部的$\frac{1}{6}$，求这批鱼卖出了多少千克？

23.某工人接受生产一批零件的任务，第一天生产一部分，已完成的个数和未完成的个数的比是 3∶4，第二天生产了 52 个，这时已完成的个数是未完成个数的 4 倍，第一天生产了多少个？

（提示：可将第一天总个数看为 7 份。）

24.甲乙两个共存款2700元，如果甲取出本人存款的$\frac{2}{5}$，乙取出本人存款中的 300 元，则两个所余的存款数相等，甲、乙两个原来各存款多少元？

25.贾村用全部耕地的$\frac{5}{9}$种小麦，另用186公亩地种蔬菜，其余的地种棉花，已知棉田比总亩数的$\frac{1}{3}$少6公亩，皮棉平均每公亩产120千克，求共收皮棉多少千克？

26.粮店运来花生和黄豆。第一次运来 4 袋花生和 6 袋黄豆共重 1100 千克，第二次运进 10 袋花生和 8 袋黄豆共重 2400 千克。求一袋花生和一袋黄豆各重多少千克？

27.4 头牛和 3 匹马每天吃草 90 千克，8 头牛和 2 匹马每天吃草 140 千克。每头牛和每匹马每天吃草多少千克？</PGN000171.TXT/PGN>

28.2 捆甲谷，3 捆乙谷，4 捆丙谷相应比 1 捆乙谷、丙谷，甲谷各多打 1 石，求甲谷、乙谷、丙谷每捆各打多少？

29.有一条大鲨鱼，头长 3 米，身长等于头长加尾长，尾长等于头长加身长的一半。这条大鲨鱼的全长多少米？

30.父亲遗嘱把遗产的$\frac{1}{3}$ 分给儿子，$\frac{2}{5}$ 分给女儿； 剩余的钱中，2500 元偿还债务，3000 元归遗孀所有。问遗产共有多少？子女各分多少？

31.有一批货物，用 12 辆大卡车可以一次运完，如果改用手扶拖拉机要用 36 辆才能运完。已知每辆卡车比手扶拖拉机多运 2 吨，这批货物共有多少吨？

32.某工程队筑一条马路，6天完成了全部路程的$\frac{2}{5}$，如果再筑60米，刚好是全路的$\frac{1}{2}$，按前6天的工作效率，完成这条马路需要几天完成？

33.小华要加工 1600 个零件，前 4 天完成了 25%，照这样计算，完成全部任务还要多少天？

34.从甲地到乙地共有 250 千米，一辆汽车从甲地开出，前 3 小时已行了 30%，照这样的速度，还要几小时可到达目地？

35.东风电扇厂原计划 20 天生产电扇 800 台，由于改进技术，实际

每天比原计划多生产$\frac{1}{4}$，这样实际只要几天就能完成？
</PGN000172.TXT/PGN>

36.水果店运来苹果 240 千克，梨 400 千克，几天后，苹果和梨都卖出了相同的数量，这时剩下的苹果重量是梨的$\frac{3}{4}$，还剩梨多少千克？

37.有两筐重量相同的梨，如果从第一筐中取出 8 千克放到第二筐中，这时第一筐的重量是第二筐的$\frac{3}{4}$，原来每筐有梨多少千克？

38.某工厂上半月完成了生产任务的$\frac{3}{5}$，未完成的比已完成的少100个零件，原计划共生产多少个零件？

39.小华看一本书，原来每天看20页，实际每天比原来多看$\frac{1}{4}$，实际多少天看完这本书？

40.商店有水果1500千克，其中桔子占$\frac{8}{15}$，其余是苹果。后来又运进了一批桔子，这时桔子占总数的$\frac{9}{16}$，运来桔子多少千克？</PGN000173.TXT/PGN>

巧做几何题

等分图形

等分图形就是把一个大的图形重新分成若干等份。这种数学思想在利用图形解题时常常用到。

石块的启示

公元前 6 世纪，古希腊有一位杰出的数学家毕达哥拉</PGN000174.TXT/PGN>斯，他抓住一个意外的机会，证明了勾股定理。

一天，毕达哥拉斯到一位朋友家串门。他坐在客厅里，一面听朋友讲话，一面注视着铺着正方形石块的地面。忽然，他发现也不知道是谁在 6 块正方形石块上用炭笔画了对角线（如图 1）。他伸手擦去几条（如图 2），新的图形触发了他的灵感：中间一个直角三角形的两条直角边上的正方形面积的和正好等于斜边上的正方形的面积（因为它们分别等于直角三角形的 4 倍）。他告辞了朋友，回到家中继续钻研，终于发现：任意给出一个正方形，以它的一边为斜边作一个不等腰直角三角形，再在两条直角边上分别作正方形，上述结论依然正确。这就是毕达哥拉斯定理。

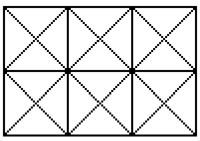


图1

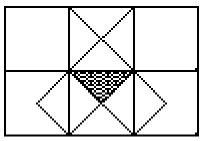


图2

毕达哥拉斯证明这个定理的方法，实际上是一种等分图形的思想方法，即把每块正方形石块平均分成四等份。这样一来，图形中某些数学关系就变得一目了然了。

均分整体

有这样一类问题，只要把大的图形均分为小的图形，就</PGN000175.TXT/PGN>能找到问题的答案。

请看这样一个问题：下面两个图中的正方形分别内接于同一个等腰直角三角形。已知图 3 中的正方形的面积是 72 平方厘米，求图 4 中正方形的面积。

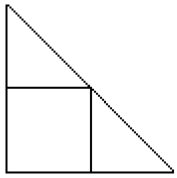


图3

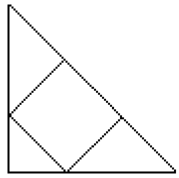


图4

注意：内接是指正方形的四个顶点全部在三角形的边上。

这个题的一个关键条件是左右两个三角形完全相同。我们不防把这两上图形进行等分，看看两个正方形分别与同一个等腰直角三角形的关系。

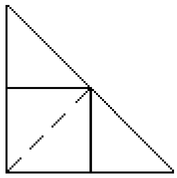


图5

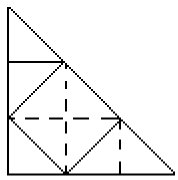


图6

从图5可知，其中正方形的面积占整个图形面积的 < /PGN000176.TXT / PGN > $\frac{2}{4}=\frac{2}{1}$；从图6

可知，其中正方形的面积占整个图形面积的。$\frac{4}{9}$ 由于图3中的正方形面积是72平方厘米，所以等腰直角三角形的面积是 $72\div\frac{1}{2}=144$（平方厘米）。显然，图6中的正方形面积为 $144\times\frac{4}{9}=64$（平方厘米）。这就是图 4 中的正方形面积。

再看，一个用七巧板拼成的正方形（如图 7）。它的边长是 20 厘米，问七巧板中平行四边形一边（阴影部分）的面积是多少？

易知，平行四边形的一块占整个正方形面积的 $\frac{1}{8}$，为 $20\times20\times\frac{1}{8}=50$（平方厘米）。

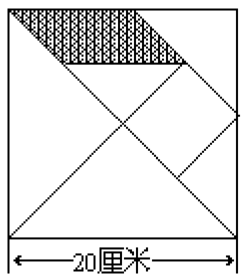


图 7

同学们，你们能看出这个正方形是怎样等分的吗？

均分局部

还有些问题，图形的整体不能均分，就要考虑把局部均分，然后再从整体上进行观察，往往也能使问题得到解决。

如图 8，正方形 ABCD 中画有甲、乙、丙三个小正方形，请问乙加丙的面积与甲的面积到底哪个大？

</PGN000177.TXT/PGN>

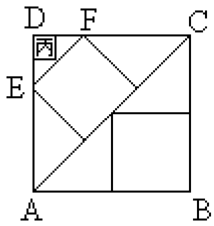


图3

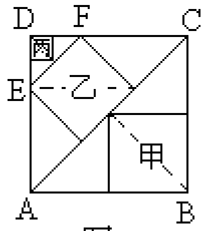


图4

在前面，我们已经知道，像甲、乙这样的两个正方形的面积不相等的。如图 9，我们还知道，经过等分图形，正方形甲的面积等于△ABC 面积的一半；正方形丙的面积等于△DEF 面积的一半；正方形乙的面积等于梯形 ACFE 面积的一半。这样，把一个大正方形划分为三个局部：等腰直角△DEF，等腰梯形 ACFE，等腰直角△ABC。其中，丙、乙、甲的面积分别为各自所在的图形面积的一半。易知，丙加乙的面积等△ACD 面积的一半，而△ACD 和△ABC 面积相等，所以乙加丙的面积等于甲的面积。

平移变换

你坐过电梯吗？电梯的升降就是日常生活中见到的平行移动的实例。数学中也有平移,这就方法是图形变换中常用</PGN000178.TXT/PGN>的方法。在平移的过程中，图形上所有点的移动方向相同，移动的距离相等。平移是用运动的观点研究数学问题的重要思想方法。

线段的平移

我们观察一下，下面两个图形的周长是否相同？

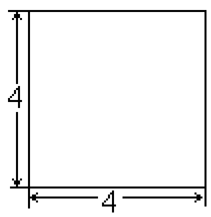


图10

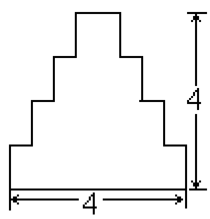


图11

从表面看，右边的图形的周长似乎要比左边的图形的周长长些。如果我们用运动的观点，把右图中有关线段平移，就会发现这两个图形的

周长相同。

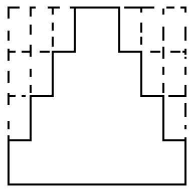


图12

从图 12 可以看出，有线段向上、向左、向右平移后，图 11 就变成图 10。

这种形式的图形还可以举出很多。比如下面两个图：</PGN000179.TXT/PGN>

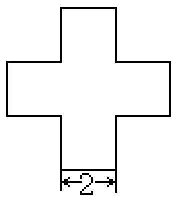


图13

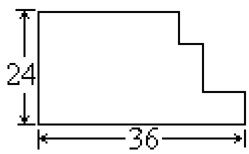


图14

图 13 是一个希腊十字（由 5 个小正方形拼合而成的图形），知道一个边长为 2，求周长。

图 14 是个篱笆，知道最长处为 36 米，最宽处为 24 米，求周长。

这两个题就留给读者自己去完成了。

图形的平移

请计算一下，下面图形中有阴影部分的面积。

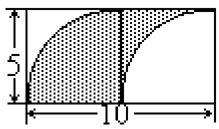


图15

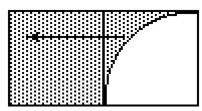


图16

这个题，如果按部就班地算，就应该用正方形的面积减去$\frac{1}{4}$圆面积，求出图 15 右半部分左上角的阴影部分的面积，</PGN000180.TXT/PGN>然后再与图 15 左半部分那个阴影部分的面积：$\frac{1}{4}$圆面积相加，就得到了整个阴影部分的面积。

其实，认真观察一下就会发现，图 15 左半部分的空白部分与图 15 右半部分相应部分的空白部分与图 15 右半部分相应部分的阴影部分的大小

一样。这时，只需将图 15 右半部分左上角的阴影部分向左平移（如图16），正好用它填补了图 15 左上角的空白处。于是易知一个小正方形的面积正好是阴影部分的面积。即

5×5=25。

还有一些更复杂的题目。比如，有一块长 32 米，宽 24 米的草坪，其中有两条走道把草平分为四块。请计算一下草坪的面积。

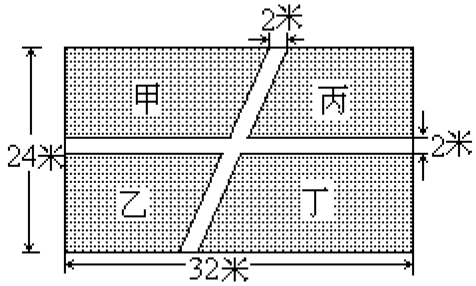


图 17

这个题按照一般的方法，应先算出整个这块地的面积，然后再减去两条走道的面积，最后求出草坪的面积。即</PGN000181.TXT/PGN>

32×24-(2×32+2×24-2×2)

=768-108

=660(平方米）。

这时，假设能把丙、丁两块草平向甲、乙两块草坪平移、对接，那么竖的一条走就会移到右边，形成了一条长方形空地。易知，这条长方形空地与原来的平行四边形小道的面积相等（如图 18）。

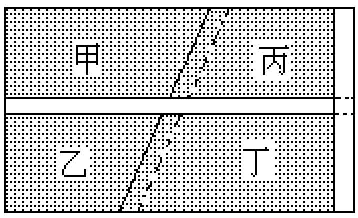


图 18

同样，假如能把乙、丁两块草坪向上平移、对接，那么横的一条走道就会移到下边，形成了一条和原来长方形走道面积、形状相同的空地（如图 19）。

于是，四块分开的草坪拼合成一个新的长方形（如图 19），它的面积就是本题的答案：

(32-2)×(24-2)=660(平方米)。

这道题的巧妙之处在于，用运动的观点，通过平移，把分散的图形加以集中，使复杂的问题变为简单问题，即可以</PGN000182.TXT/PGN>避免差错，又节省了时间。

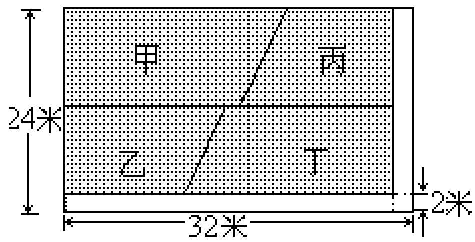


图19

旋转变换

你坐过转椅吗？转椅的旋转是日常生活中见到的旋转的实例。

在数学的图形变换中，旋转是一种常用的方法。有些几何问题条件分散，如果能设法把图形绕一个定点，在平面内旋转一个定角，使图形的某部分移到一个新的位置，往往能使分散的条件集中，使问题化难为易。

在旋转过程中，图形上任何两点的距离不变，任何两直线间的夹角不变。因此，一个图形从一个位置旋转到另一个位置，它的形状、大小不会改变。旋转也是用运动的观点研究数学问题的重要思想方法。</PGN000183.TXT/PGN>

旋转成定角

图形中某一部分到底要旋转多少度角，要因题而异。我们可以根据需要把部分图形转到有利于我们进行计算的最佳位置上。

例如，在图 20 中，半径为 6 厘米的圆的内、外各有一个正方形，圆内正方形的四个角的顶点都在圆周上，圆外正方形的四条边与圆都只有一个接触点。问大正方形的面积比小正方形大多少？

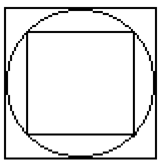


图20

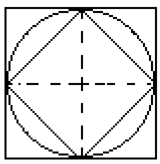


图21

这道题按一般方法就得先求出大正方形面积，再求小正方形面积，然后用大正方形面积减去小正方形面积。这时，如果把小正方形绕圆的圆旋转 45°，那么小正方形的四个顶点正好落在大正方形和圆的接触点上（即大正方形边上的中点处）。图 21 就是旋转后的情形。易看出：小正方形正好是大正方形面积的一半。两正方形的面积差就是

$(6\times2)^2\div2=144\div2=72$（平方厘米）。</PGN000184.TXT/PGN>

又如，如图 22，求阴影部分部分的面积（单位厘米）。

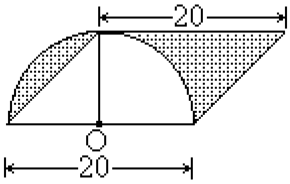


图22

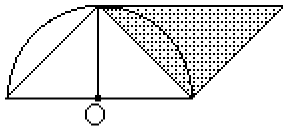


图23

观察图 22，我们发现，如果把这个图左边的扇形绕圆心 0 按顺时针方向旋转 90°，就会得到图 23。图 23 中的阴影部分的面积恰好是平行四边形面积的一半。

20×(20÷2)÷2
=20×10÷2
=200÷2
=100（平方厘米）。

有时，为了使分散的条件集中，只作一次旋转变换是不够的，常常需要连续进行旋转变换。

比如，如图 24，求正方形内阴影部分的面积（单位：厘米）。

这个题，需要将两个卵叶形阴影部分，分别绕正方形中心按顺、逆时针方向旋转 90°。这样一来，得到了一个由阴影部分拼成的半圆（如图 25）。

阴影部分面积为

$3.14\times2^2\div2=6.28$（平方厘米）。</PGN000185.TXT/PGN>

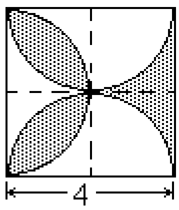


图24

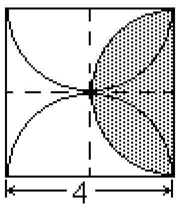


图25

把“折扇”打开

有些图形互相交错在一起，增加了计算的难度。这时，我们不妨像打开折扇一样把它们绕某个定点打开，这样常常会使人茅塞顿开，使问题得到解决。

比如，如图 26，求阴影部分的面积（单位：厘米）。

此题的一般解法是用正方形面积减去两个空白部分的面积。但是，这样做计算量较大。

图 26 显然是由两个形状相同的扇形互相重叠而形成的。我们先把下扇形绕左下角的顶点顺时针旋转 90°，得到图 27；再继续顺时针旋转，得到图 28。在图 28 中，阴影部分的面积正好等于半圆的面积减去一个形如图 26 的正方形的面积。解答如下：

$3.14\times4^2\div2-4^2$

$=4^2\ (3.14\times\frac{1}{2}-1)$ </PGN000186.TXT/PGN>

$=16\times0.57$

$=9.12$（平方厘米）

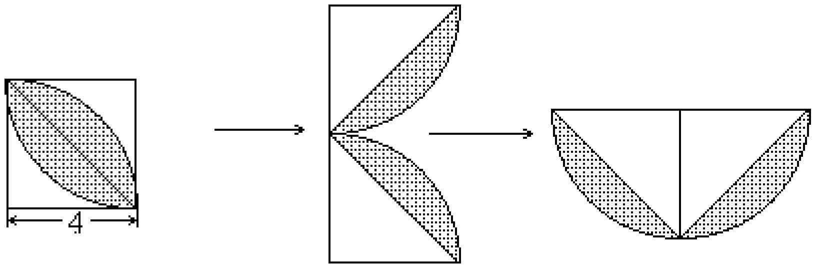


图26　　图27　　图28

又如，如图 29，求阴影部分的面积（单位：厘米）。

这个题可把它从中间剪开，以 0 为旋转中心把右边部分按顺时针方向旋转到左边部分的下方拼接起来（如图 30）。于是，阴影部分全部集中到以 2 厘米为半径的圆中。阴影部分的面积等于半圆面积减去中间腰 2 厘米的等腰直角三角形的面积。

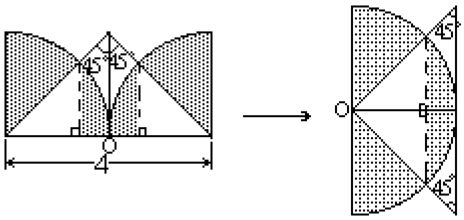


图 29　　图30

</PGN000187.TXT/PGN>

解答如下：

$3.14\times2^2\div2-2\times2\div2$

$=(3.14-1)\times2$

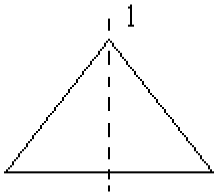
$=2.14\times2$

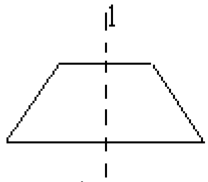
$=4.28$（平方厘米）

对称变换

蜻蜓和蝴蝶很受少年朋友喜爱，如果你能仔细观察一下，就会发现，这两种昆虫都是轴对称的。也就是说，以这两种昆虫身体的中心线为轴，把左右两部分重叠在一起，你会发现这两部分完全重合。

在几何图形中也有不少轴对称图形，比如，等腰三角形、等腰梯形、圆就是这样的图形。





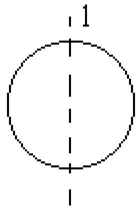


图 31-(1)　图 31-(2)　图31-(3)

以上图形中的三条直线 l 就是这三个图形的对称轴。

还 有 一 种 图 形 叫 中 心 对 称 图 形 。 这 种 图 形 都 有 一 个 对 称 </PGN000188.TXT/PGN>中心。在图形上任取一点，把这个点和对称中心相联结，得到一条线段；再把这条线段在对称中心的另一侧延长，并截取一段等于另一侧的线段。你会发现新的线段的一个端点也在图形上。这是判断这个图形是否是中心对称图形分为两部分，让其中一部分绕对称中心旋转 180 °，两部分图形应完全重合。这也是判断一个图形是否为中心对称的方法。

下面的平行四边形和圆就是中心对称图形。

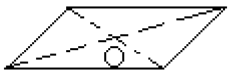


图32-(1)

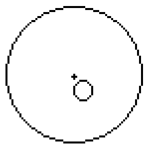


图32-(2)

以上两个图形中的 O 就是这两个图形的对称中心。

综上所述，不难发现，还有一种既是轴对称，又是中心对称的图形。比如，以上图形中的圆，还有菱形、矩形（包括正方形）等。

将军饮马

首先，我们给大家介绍一下对称点的概念。

已知一条直线 l 和直线外一点 A，求 A 点关于 l 的对称点 A’。</PGN000189.TXT/PGN>

我们用的方法是自 A 点向 l 引垂线，垂足为 O，延长 AO 至 A ’，使 OA ’= OA，则 A ’点即为所求。

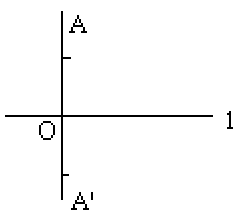


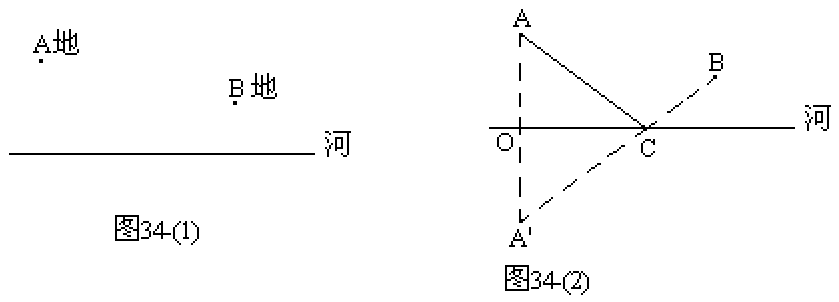
图33

其次，我们介绍一下“ 将军饮马 ”问题。

据说，在古希腊有一位聪明过人的学者，名叫海伦。有一天，一位

将军向他请教了一个问题：从 A 地出发到河边饮马，然后再去 B 地（如图 34-(1)），走什么样的路线最短？如何确定饮马的地点？

提起路线最短的问题，大家知道：连结两点之间所有线中，最短的是线段。一位学者曾幽默地说，这一点连狗都知道，狗抢骨头吃时，决不会迂回前进，而是径直向骨头扑去。但是，这个题中马走的是一条折线。这又该怎么办呢？



海伦的方法是这样的（如图 34-(2)）：设 l 为河。作</PGN000190.TXT/PGN>AO⊥l 于 O 点，延长 AO 至 A’，使 A’O==AO。连结 A’B 交 l 于 C 点，则 C 点即为所求的点。连结 AC。（AC+CB）为最短路程。

这是因为，A’点是 A 点关于 l 的对称点，显然，AC=A’C，所以 AC+CB=A’C+CB=A’B 也就是最短的了。

这就是海伦的巧妙方法。

少年朋友喜欢打台球吧，实际台球无时无刻都需要应用海伦的妙法。下面我们看一个有关打台球的实例。

若在矩形的球台上，有两个球在 M 和 N 的位置上。假如从 M 打出球，先触及 DC 边 K 点，弹出后又触到 CB 边 E 点，从 CB 边再反射出来。问用怎样的打法（也就是怎样确定 K 点的位置），才能使这个球反射后正好撞上在 N 点放置的球（图中，∠1=∠2，这是条自然规律）？

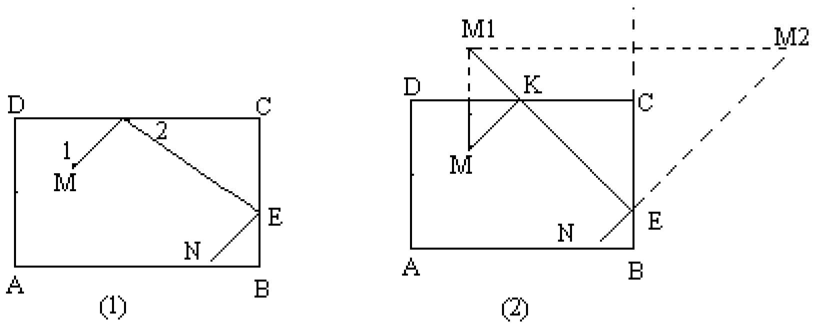


图 35

具体做法是：先作 M 关于 DC 的对称点 M_1，再作 M_1</PGN000191.TXT/PGN>关于 BC 的对称点 M_2，那么 M_2N 和 BC 的交点为 E，M_1E 和 CD 交于 K，E、K 就放各边的撞击点。按 MK 这样的距线打球，一定会使（在 M 点放置的球）从 BV 边弹出后撞上 N（在 N 点放置的球）。

这里边的道理，你看懂了吗？

一分为二

通过中心对称图形的对称中心，任意画一条直线都可以把原图形分成两个大小、形状完全相同的图形。下面，我们以平行四边形为例。

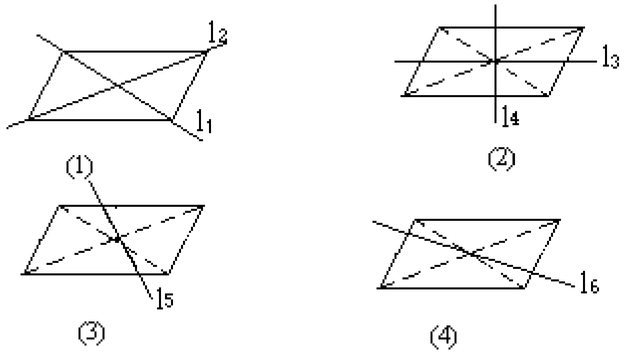


图 36

图 36-(1)中，l_1、l_2 分别把平行四边形平分；图 36-(2)中，l_3、l_4 也分别把平行四边形平分；图 36-(3)中，l_5 把平行</PGN000192.TXT/PGN>四边形平分；图 36-(4)中，l_6 把平行四边形平分。

利用上述性质时，要注意两点：1.图形必须是中心对称图形；2.所划直线必须通过对称中心。

下面看一个比较复杂的问题。

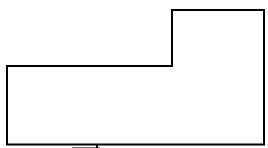
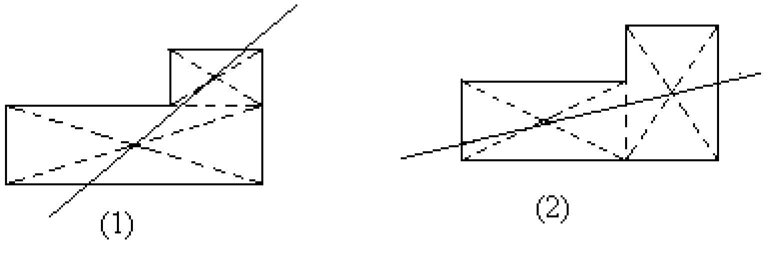
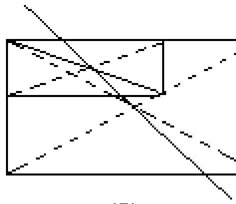


图37

把下面图形的面积，用一条直线分成相等的两部分。

解决这个问题有三种办法。三种办法基于同一种思路，即把该图看成是由两个矩形级组成的组合图形。矩形是中心对称图形。我们分别找出两上矩形的称中心，过这两个对称中心作一条直线，就可以把这个组合图形一分为二。





(3)

我们还可以举出非同种类型中心对称图形组成的组合图形的情况。

如图 39，长方形 ABCD 内有一个以 O 点为圆心的圆，请画一条直线同时将长方形和圆分为面积相等的两部分。</PGN000193.TXT/PGN>

首先，这两个图形都是中心对称的图形；其次，其中圆的对称中心已经知道（即 O），只要求出矩形的对称中心，问题就解决了。

具体做法是：连结对角线 AC、BD，两线交于 P 点。过 P、O 作直线，此直线即为所求（如图 40）。

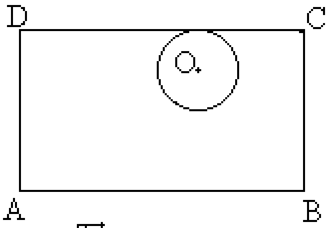


图39

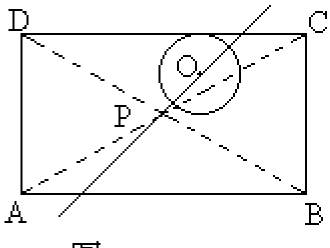


图40

我们再看一个多于两个图形的组合图形。

如图 41，请在图形中划一条直线，使它恰好把图形分成面积相等的两部分。

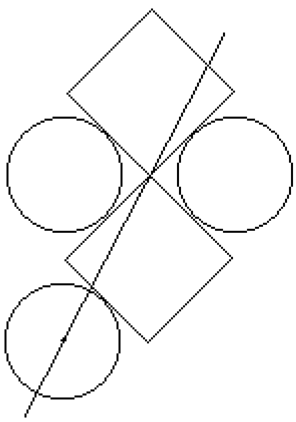


图41

</PGN000194.TXT/PGN>

我们已在图上划出了一条直线，你看这样划对吗？如果你认为划对了，就请你解释一下这样的道理；如果你认为划错了，就请你重新划一条符合要求的直线。

割补“手术”

遭受烫伤之苦的病人，常常需要植皮。植皮就是从人体的其他部位取下真皮补在受烫伤坏死的皮肤上。这一割一补的手术，在数学中也经常用到。比如，在数学中，常把图形中的某部分填补到新的位置，使得新的图形更便于计算。应该明确的是：当把一个平面图形从一处移到另一处时，它的面积不变；新组合起来的图形的面积等于分散时各图形的面积的和。

补得合理

如果直角三角形的直角边分别为 a、b，斜边为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$。

在国外，人们把上述定理称为毕达哥拉斯定理，中国人称为勾股定理。这个定理被发现距今已有 2000 多年了。我们应当引以自豪的是，我国古代数学家独自提出了这个定理的证明，据粗略统计，我国历数学家创造的证明勾股定理的方法不下 200 种，在诸多的证明中，应该说不少人非常巧妙地利用了割补的方法。下面介绍的陈杰图就是其中的一种。

我们先将边长为 a、b 两个正方形拼在一条直线上（如图 42）</PGN000195.TXT/PGN>，CE=a+b。我们在 CE 上取一点 B，使 CB=a，连结 A、B 与 B、F 得出两个完全相同的直角三形 I 和 II，它们的斜边记作 C。下面我人将三角形 I 移到三角形 III，把三角形 II 移到三角形 IV 的位置,所得的正方形 ABFD 的面积等于原来的两个边长为 a 与 b 的正方形的面积之和，即 a^2+b^2。由于拼成的正方形的边长为 c，面积为 c^2，所以

$$a^2+b^2=c^2。$$

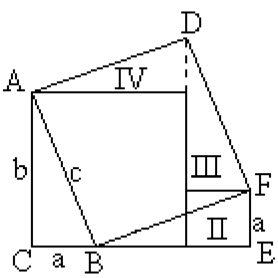


图42

下面，我们再举一个例子。

如图 43，这个图的三个圆的面积都是 3 平方厘米，且三个圆两两相交，三个交点都是圆心，求三块阴影部分的面积。

这是一道非常绝妙的题目，粗粗一看无从下手。仔细观察就能发现：根据轴对称性，将图形 1 翻折到图形 2 的位置，再将图形 3、4 割下，补到图形 5 的位置上。这样，阴影部分正好拼成了一个半圆（如图 44）。显然，三块阴影部分的面积之和为

$$3\div2=1.5（平方厘米）$$

剪得奇巧

利用割补术解的题目，有时以做手工的形式提出。下面，我们再看两个题目。</PGN000196.TXT/PGN>

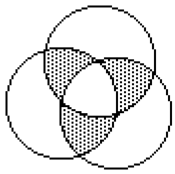


图43

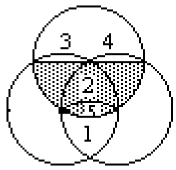


图44

上海《新民晚报》上，曾经刊出了一则智力游戏：剪两刀将一个希腊十字剪成 4 块，然后将这 4 块成一个正方形。

所谓希腊十字是指用 5 个完全相同和小正方形组成的十字图形（如图 45）

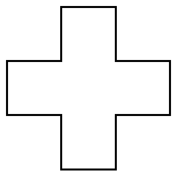


图45

当题目刊出后，读者纷纷寄去自己的解答。最后编辑选取了 3 种较好的方法刊登出来。

这三种剪法有一个共同点，就是剪开线互相垂直（见图 46 左边三个图）。

《北京晚报》上，也曾刊出一则智力游戏：请把“H”形的纸块剪一刀，使它组拼成一个正方形。

请注意，这个“H”形实际上是 8 个大小相同的正方形组成的。

此题的设计非常巧妙，答案是不易寻找的。

此题的答案是：首先把“H”形对折成图 48-(1)的形状，</PGN000197.TXT/PGN>从虚线上剪一刀，使“H”形被剪成 5 小块；然后，按图 48-(2)，便可组拼成正方形了。

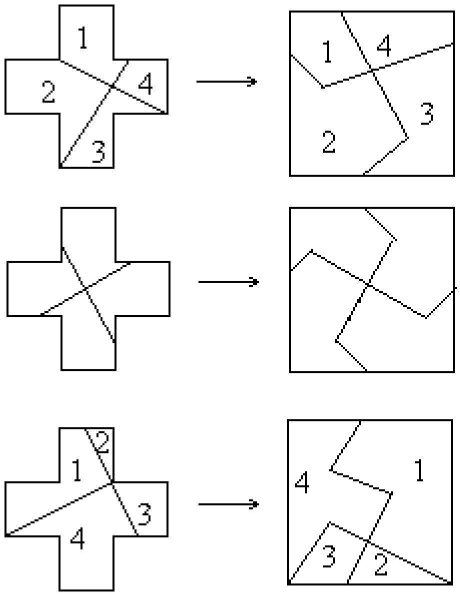


图46

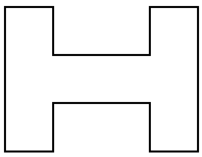


图47

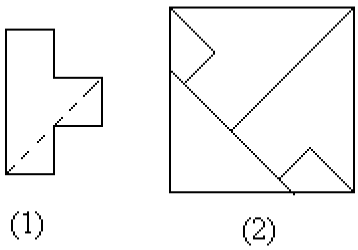


图48

</PGN000198.TXT/PGN>

扩大、缩小

在利用图形进行的计算中，有时需要把图形扩大，使原来一时难以解决的问题变得十分简单。尽管这种解题方法不是处处灵验，但是作为一种数学思想还是可取的。

还有些时候，采用相反的思维方式，把一个图形缩小，缩小到一个最基本的局部，这个局部代表了整体，可谓麻雀虽小五脏俱全，解剖一只足矣。

成倍扩大

如图 49，这是一个圆心角为 45°的扇形，其中直角三角形 BOC 的直角边为 6 厘米，求阴影部分的面积。

这是一个组合图形，要求阴影部分的面积只要用扇形面积减支直角三角形的面积就可以了。可是，在小学阶段，我们还没有办法求出扇形半径 R。这时，我们看到圆心角为 45°，不妨把此图扩大一倍（如图 50）。

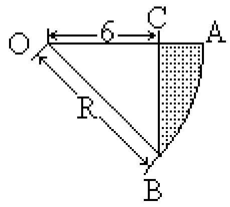


图49

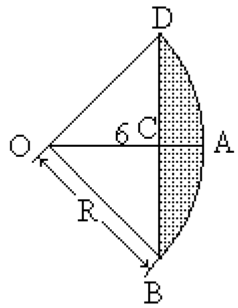


图50

</PGN000199.TXT/PGN>

根据图 50，可求出三角形的面积：(6+6)×6÷2；同一个三角形的面积还为：$R^2\div2$。所以，可得 $R^2=72$。现在这个扇形的面积正好是$\frac{1}{4}$圆面积，为$3.14\times72\div4=56.52$（平方厘米）。图50中阴影部分的面积为 56.52-36=20.52（平方厘米），所求阴影面积为 20.52÷2=10.26（平方厘米）。

这种先扩大再缩小的方法必须针对图形的特点进行。这道题中的 45°提醒了我们，把原图作为一个整体扩大了一倍，于是出现了 90°角，问题迎刃而解了。下面再举一个与此类似的例子。

如图 51，这个图中扇形的半径为 10 厘米，圆心角为 45°，求阴影部分的面积。

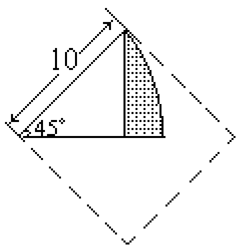


图51

这个题自然仍可以用上面的方法解，那么有没有别的方法呢？有。解这个题的关键是求出空白三角形的面积。这时，我们不妨以 10 为边作一个正方形。这个正方形的面积恰好等于空白三角形面积的 4 倍。于是，空白三角形的面积为 10×10÷4=-25（平方厘米）。阴影部分面积为

$\frac{45\times3.14\times10^2}{360}-25=14.25$（平方厘米）。

这道题与上题解法不同之处在于，它是把局部扩大。</PGN000200.TXT/PGN>

到底是把整体扩大，还是把局部扩大，要具体问题具体分析。

解剖麻雀

图 52 是一块黑白格子布。白色大正方形的边长是 14 厘米，白色小正方形的边长是 6 厘米。问：这块布中白色部分的面积占总面积的百分之几？

这道题看起来让人眼花缭乱，静下心来细看，你会发现这块布由形状完全相同的 9 个图形组成（如图 53）。实际上，只要我们求出一个小图形中，白色图形占整个小图形的百分之几就足够了。

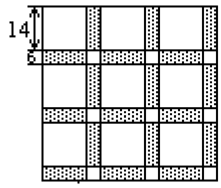


图52

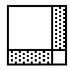


图53

这个题的解答过程是：

(14×14+6×6)÷[(14+6)×(14+6)]

=(196+36)÷400

=232÷400

=0.58</PGN000201.TXT/PGN>

=58%

下面再看一个问题。

图 54 是一个对称图形。请问黑色部分面积大还是阴影部分面积大？

这个图形是一个对称图形，如果在它的横向中间画一条线，再在它的纵向中间画一条线，就可以把图形一破为四。这四个图形完全相同。我们不需要研究完整的图形，只需要研究四分之一的图形就够了。

如图55。设OA = 2r，则以OA为直径的半圆面积为$\frac{3.14\times r^2}{2}$。又知，直角扇形OAB的面积为$\frac{3.14\times(2r)^2}{2}=3.14\times r^2$。所以，半圆弧OA平分直角扇形面积。这时，用上半部分减去黑色部分的面积等于半圆面积减去卵叶形面积。既然被减数和差都相等，那么减数肯定相等。因而，这四分之一图形中，黑色部分和阴影部分的面积相等。显然，整个图形中黑部分和阴影部分和面积也相等。

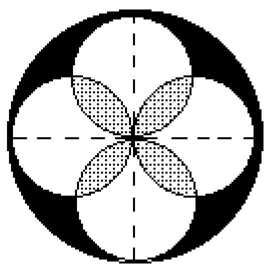


图54

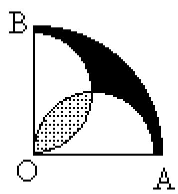


图55

</PGN000202.TXT/PGN>

等积图形

在此节以前，我们所研究的图形变换都是在它的形状、大小不变的情况下的变换。下面我们要研究的是等积变换，即图形的面积不变的变换。

我们知道三角形的面积公式是：

S△=底×高÷2。

我们还知道平行四边形的面积计算公式是：

S▱=底×高。

在利用等积变换时，常常要判断两个三角形或两个平行四边形面积是否相等？因此，我们可以把上述两个公式概括为：

等底等高的两个三角形的面积相等。

等底等高的两个平行四边形的面积相等。

下面是两组面积相等的三角形（简称等积三角形）：

图 56-(1)中，AB=BC=DE，I、II、III 三个三角形的顶点相同，底边在同一直线 l 上，符合等底等高的条件，所以这三个三角形等积。

图 56-(2)中，l 与 AB 平行，也就是说 l 上任一点到 AB（或 AB 延长线）的距离相等，说明以 AB 为底，顶点在 l 上的三角形也符合等底等高的条件，所以△ABE 的面积=△ABC 的面积=△ABD 的面积。

</PGN000203.TXT/PGN>

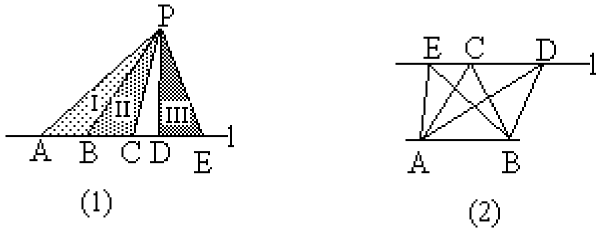


图 56

判断面积相等

判断两个或几个图形的面积是否相等是学好这部分知识的关键。这对于培养一个人的观察能力是十分重要的。下面我们看几个题目。

1.用三种不同的方法把任意一个三角形分成四个面积相等的三角形。

我们先用三种方把图形画出来，然后再讨论。

图 57-(1)，把△ABC 的底边等分为四份，显然△ABD、ADE、△AFC 等积。

图 57-(2)，把△ABC 的底边二等分(即 D 为 BC 的中点)，易知△ABD的面积 = △EBD的面积 = $\frac{1}{2}$ × △ABD的面积；△AEC的面积 = △EDC的面积 = $\frac{1}{2}$ × △ADC的面积。所以 < /PGN000204.TXT / PGN >

△ABE的面积 = △EBD的面积 =

△AEC 的面积=△EDC 的面积。

图 57-(3)，由读者做解释工作。

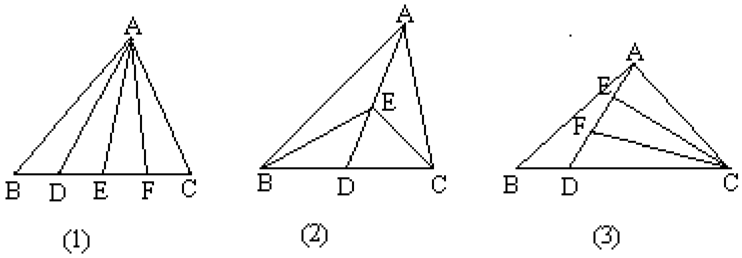


图 57

2.如图 58。平行四边形 ABCD 中，EF 平行 AC，连结 BE、AE、CF、BF。请问与△BEC 等积的三角形能找出哪几个？

因为 AB 平行于 CE，所以△BEC 与△AEC 等积；因为 EF 平行于 AC，所以△AEC 与△AFC 等积；又因为 BC 平行于 AD，所以△AFC 与△ABF 等积。

以上判断的根据只有一条：两个三角形，等底等高必等积。

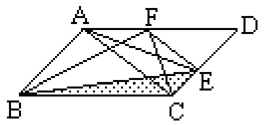


图58　　</PGN000205.TXT/PGN>

因此，与△BEC 等积的三角形共有三个，它们是△AEC，△AFC，△ABC。

比较面积大小

比较两个图形的面积常常以求一个图形的面积占另一个图形面积的几分之几的形式出现。

如图 59，在平行四边形 ABCD 中，E、F 分别是 BC、CD 的中点。求三角开 AEF 的面积是平行四边形面积的几分之向？

为了书写方便，我们事先约定：三角形 AEF 的面积、平行，四边形的面积分别记作 S△AEF 和 S▱ABCD。

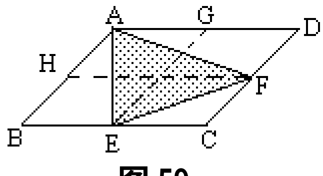


图 59

应该说，这个题是有一定难度的。我们先把平行四边形 ABCD 纵向一破为二：取 AD 的中点 G，连结 G、E，显然

$$S_{\triangle ABK}=\frac{1}{2}S_{\text{▱}ABEG}=\frac{1}{4}S_{\text{▱}ABCD};$$

再把平行四边形横向一破为二：取 AB 的中点 H，连结 H、</PGN000206.TXT/PGN>F，显然

$$S_{\triangle AFD}=\frac{1}{2}S_{\text{▱}AHFD}=\frac{1}{4}S_{\text{▱}ABCD};$$

最后可求

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{8}S_{\text{▱}AHFD}$$

因为$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$**，所以**

$$S_{\triangle AEF}=\frac{3}{8}S_{\text{▱}AHFD}$$

下面再举一个例子。这个例子是初中平面几何中的一个题，但是不需多少知识，小学的同学也可以做出。

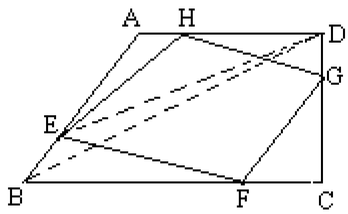


图 60

如图60**，**ABCD**为任意四边形，其中**$AE=\frac{2}{3}AB$**，**$BF=\frac{2}{3}BC$**，**$CG=\frac{2}{3}CD$**，** $DH=\frac{2}{3}DA$**，** **连结** E、F、G、H**，求四边形**EFGH**的面积：四边形 ABCD 的面积=？**

我们连结E、D**和**B、D**。易知，**$S_{\Delta AEH}=\frac{1}{3}S_{\Delta AED}$**，而**$S_{\Delta AED}=\frac{2}{3}S_{\Delta ADB}$**，所以**

$S_{\Delta AEH}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}S_{\Delta ABD}=\frac{2}{9}S_{\Delta ABD}$。 **</PGN000207.TXT/PGN>**

同理 $S_{\Delta CGF}=\frac{2}{9}S_{\Delta BCD}$。

因此，$S_{\Delta AEH}+S_{\Delta CGF}=\frac{2}{9}(S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD})$

$$=\frac{2}{9}S_{\text{四边形}ABCD}。$$

显然，$S_{\Delta BFE}+S_{\Delta DHG}=\frac{2}{9}S_{\text{四边形}ABCD}$。

所以：$S_{\Delta BFE}+S_{\Delta CGF}+S_{\Delta BFE}+S_{\Delta DHG}=\frac{4}{9}S_{\text{四边形}ABCD}$**，**

$$S_{\text{四边形}EFGH}=\left(1-\frac{4}{9}\right)S_{\text{四边形}ABCD}$$

$$=\frac{5}{9}S_{\text{四边形}ABCD}。$$

即 四边形 EFGH 的面积：四边形 ABCD 的面积=5：9。

巧算图形面积

利用等积变换计算图形面积是一和中常用的技巧。它的好处是使分散的图形集中，把生疏、麻烦的问题转化为熟悉、简单的问题。

如图 61，这是个直角梯形。求阴影部分的面积（单位：厘米）。

这个题的阴影部分由两个同高的三角形组成：

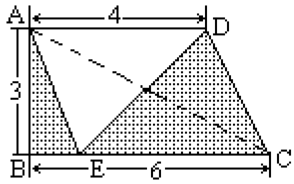


图 61

</PGN000208.TXT/PGN>

$\triangle$ABE的面积 $=\frac{1}{2}\times \text{BE}\times 3,$

$\triangle$DEC的面积 $=\frac{1}{2}\times \text{EC}\times 3.$

所以，△ABE 的面积+△DEC 的面积

$=\frac{1}{2}(\text{BE}+\text{EC})\times 3=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$(平方厘米).

这个题也可以把两个阴影部分集中：连结 A、C，因为 AD 平行于 BC，所以△DEC 的面积=△AEC 的面积。两个阴影部分可合并为△ABC。显然，△ABC 的面积=6×3÷2=9(平方厘米)。

再举一个例子：如图 62，这是大小两个正方形组成的图形，大正方形边长是 6 厘米，小正方形边长是 4 厘米。求阴影部分的面积。

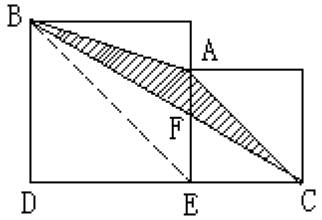


图 62

这个题的一般解法相当麻烦。下面，我们给出一种巧妙的解法。

连结 B、E。经过认真观察，我们会发现，△ABE 和△BEC 是等积三角形。道理很简单，这两个三角形都是以小正方形的边长为底，以大正方形的边长为高。从这两个三角形中分别减去△BEF，就得到△ABF 和△FEC 为等积三角形。因此，△ABC 的面积=△AFC 的面积+△ABF 的面积=△AFC 的面积+△FEC 的面积=△AEC 的面积。所以，</PGN000209.TXT/PGN>△ABC 的面积 $=4^2\div 2=8$(平方厘米).。

巧证几何问题

利用图形之间等积关系还可以证明初中将学到的几何问题。由于这方面的内容很多，这里仅举一个例子。

如图 63，△ABC 中，AB=AC，D 为 BC 边上任一点，DE 垂直于 AB，DF 垂直于 AC，CG 是△ABC 中 AB 边上的高。证明：CG=DE+DF。

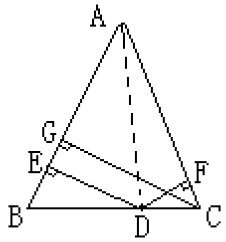


图 63

这里所说的 DE 垂直于 AB，DF 垂直于 AC，是指 DE 和 AB，DF 和 AC 相交成 90°。我们连结 A、D。这样一来，△ABC 被分成了两个三角形，即△ABD 和△ADC。显然，

$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times AB\times DE,\qquad ①$$

$$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times AC\times DF.\qquad ②$$

既然 AB=AC，那么我们不妨以 AB 取代，①+②得

$$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times AB\times(DE+DF).$$

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$,</PGN000210.TXT/PGN>

且 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times CG,$

所以 $\frac{1}{2}\times AB\times CG=\frac{1}{2}\times AB\times(DE+DF),$

即 CG=DE+DF。

等量关系

利用图形之间的数量关系，找出相等的关系。这如同列方程解应用题一样，不过，利用图形找等量关系更需要观察。当然，这里边也有一些技巧。

古为今用

我国古代数学中有一个叫“弦图”的图形，如图 64。有的数学家用它成功地证明了勾股定理。后人并没有停留在仅仅用它证明勾股定理上，而是用这种思想方法证明了大量实际问题。

宋朝数学家曾提出了这样一个问题：

一块长方形的面积是 864 平方米，已知它的宽比长少 12 步，问长与宽各多少步？

古人巧妙地构思令人叫绝。假定用四个面积为 864 平方步的长方形拼成一个“弦图”(如图 65)。中间小正方形的面积恰为 12^2 (平方步)。这样，整个大正方形的面积为 864×4＋12^2=3600(平方步)，边长为 60 步。于是，

可得原长方形</PGN000211.TXT/PGN>的宽为(60-12)÷2=24(步)，长为60-24=36(步)。

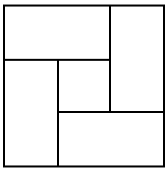


图 64

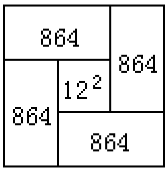


图 65

第一届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛试题中两次出现应用“弦图”来解的题目。特别是决赛中的那道题：

从一块正方形木板上锯下宽为$\frac{1}{2}$米的一个木条以后，剩下的面积是$\frac{65}{18}$平方米。问锯下的木条面积是多少平方米？

这个题和上面讲到的题基本上是一致的，不同的地方：

1.这里长和宽的差是间接给出的，题中指出“从一块正方形木板上锯下宽为$\frac{1}{2}$米的一个木条”，这就告诉我们锯下木条以后的长方形的宽比长少$\frac{1}{2}$米；2.本题没有剩下的木板的长和宽，而是求锯下木条的面积。

假设我们有剩下的长方形木板四块，用前面讲过的方法可拼成一个“弦图”(如图 66)。</PGN000212.TXT/PGN>

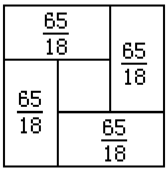


图 66

用刚才学过的方法可得：大正方形的面积为$\frac{65}{18}\times 4+(\frac{1}{2})^2=\frac{130}{9}+\frac{1}{4}=\frac{529}{36}$(平方米)；边长为$\frac{23}{6}$(米)；原正方形的边长为$(\frac{23}{6}+\frac{1}{2})\div 2=\frac{26}{6}\div 2=\frac{13}{6}$(米),剩下木条的面积为$\frac{13}{6}\times\frac{1}{2}=1\frac{1}{12}$(平方米)。

纵横交错

把同样大小的长方形有规律地纵横交错地放在一起，常常要根据长和宽的关系找出等量关系。

如图 67，这是由同样大小的小纸片摆成的图形。已知小纸片的宽是 12 厘米，求阴影部分的总面积。

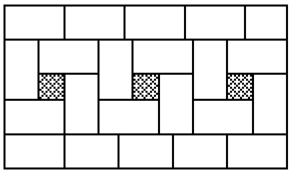


图 67

从图 67 可以看出,5 个小纸片的长等于 3 个小纸片的长加上 3 个小纸片的宽。所以，2 个小纸片的长等于 3 个小纸片的宽，1 个小纸片的长等于是 12×3÷2=18(厘米)。阴影部分的正方形边长为 18-12=6(厘米)，阴影部分的总面积为 6×6×3=108(平方厘米)。</PGN000213.TXT/PGN>

《小学生数学报》上有这样一个题目：“有 9 个长方形，它们的长和宽分别相等，用这 9 个小长方形拼成大长方形(如图 68)的面积是 45 平方厘米，求这个大长方形的周长。”

应该说，解这道题的关键是求出一个小长方形的长和宽。那么，如何寻找小长方形的长与宽的数量关系呢？从图 68 可以看出：5 个小长方形的宽等于4个小长方形的长，说明小长方形的宽是长的$\frac{4}{5}$。这样一来，很容易把下面 4 个小长方形重新分割成 5 个小正方形，而每个小正方形的边长正好是小长方形的宽(如图 69)。也就是说，下面 5 个小正方形的面积恰好等于 4 个小长方形的面积。于是，5 个小正方形的面积为$\frac{45}{9}\times 4=20$(平方厘米),1个小正方形的面积为$20\div 5=4$(平方厘米),1个正方形的边长(即 1 个小长方形的宽)为 2(厘米)。小长方形的长为

$2\div\frac{4}{5}=2.5$(厘米).因此,原题中大长方形周长为$(2.5\times 4+2.5+2)\times 2=29$(厘米).

</PGN000214.TXT/PGN>

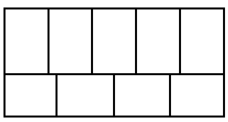


图 68

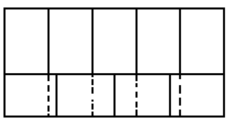


图 69

</PGN000214.TXT/PGN>这个问题也可以这样考虑：既然小长方形宽的 5 倍等于它的长的 4 倍,那么一定可以用 20 个小长方形拼成一个大的正方形(如图 70)。

大正方形的面积为$\frac{45}{9}\times 20=100$(平方厘米),大正方形的边长为10(厘米)

小长方形的长为 10÷4=2.5(厘米)，小长方形的宽为 10÷5=2(厘米)。原大长方形周长为(2.5×4+2.5+2)×2=29(厘米)。

对号入座

看电影要对号入座。做数学题的过程中，有时遇到两个图形面积相减

的情况，这时常常要想一下减得的图形是什么？这种寻找图形之间等量关系的方法往往使问题的解答得到简化。

如图 71，在矩形 ABCD 中，BC=9 厘米。问 BE 长多少厘米，才能使三角形 ABE 的面积是梯形面积 AECD 的一半？

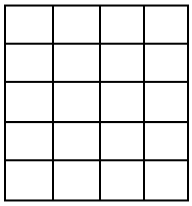


图 70

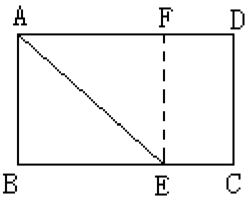


图 71

</PGN000215.TXT/PGN>既然梯形 AECD 的面积是△ABE 面积的 2 倍,那么不妨从大的图形中减去小的图形：作 EF 垂直于 AD，则△AEF 的面积等于△ABE 的面积。这时，我们观察被 EF 分割成两部分的矩形 ABEF 和矩形 FECD。显然，矩

形ABEF的面积等于2倍的矩形FECD的面积.即 $\frac{BE \times EF}{EC \times CD} = \frac{2}{1}$,但是EF

$= CD$,所以 $\frac{BE}{EC} = \frac{2}{1}, BE = 2EC = 2 \times \frac{1}{3}BC = 2 \times \frac{1}{3} \times 9 = 6$(厘米).

与此类似，我们还可以举一个例题：

如图 72，一个平行四边形被分为两部分，它们的面积差是 18.6 平方厘米。问图中梯形上底是(　　)厘米。

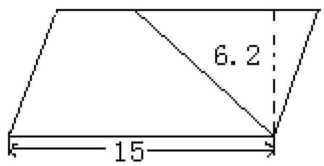


图 72

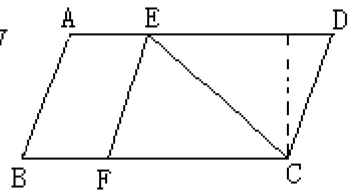


图 73

既然梯形与三角形两部分的差是 18.6 平方厘米，那么我们就切切实实地把这个差找出来，看它是一个什么样的图形。如图 73，我们过 E 点作一条与 AB 平行的直线，交 BC 于 F 点。易知，平行四边形 EFCD，被对角线分成的两部分面积相等。即△EFC 的面积=△ECD 的面积。于是可知，平行</PGN000216.TXT/PGN>四边形 ABFE 就是梯形 ABCE 与△ECD 的差。这时，知道这个平行四边形的面积为 18.6 平方厘米，高为 6.2 厘米，底 AE=18.6÷6.2=3(厘米)。

寻找直观的图形，常常是解题的一把钥匙。

面积之比

在几何初步知识中，常常把特殊图形的面积之比变为两件线段的长度之比。这样做，往往使复杂的问题得到简化。这是一种重要的解题思路。

下面，我们给出两个重要的结论：

1.等底的两个三角形的面积的比等于它们对应的高的比(如图 74)。

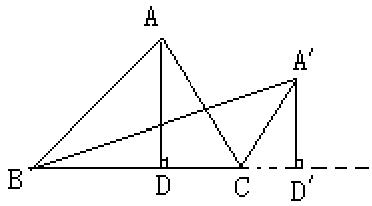


图 74

原因是 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'BC}}=\frac{\frac{1}{2}\times BC\times AD}{\frac{1}{2}\times BC\times A'D'}=\frac{AD}{A'D'}.$

2.等高的两个三角形的面积的比等于底的比(如图 75)。

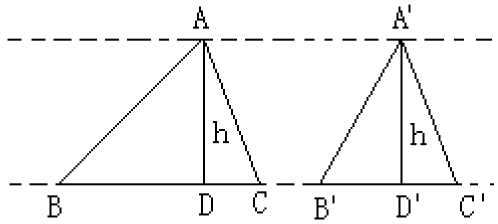


图 75

</PGN000217.TXT/PGN>

原因是 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC'}}=\frac{\frac{1}{2}\times BC\times AD}{\frac{1}{2}\times B'C'\times A'D'}$

$$\frac{\frac{1}{2}\times BC\times h}{\frac{1}{2}\times B'C'\times h}=\frac{BC}{B'C'}.$$

当然，与以上两条结论类似，还可得出：
等长的两个矩形面积之比等于它们宽的比。
等宽的两个矩形面积之比等于它们长的比。

如图76**，**$\triangle ABC$**的三条高交于**P**点，请你讲讲** $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$ **为什么成立？**

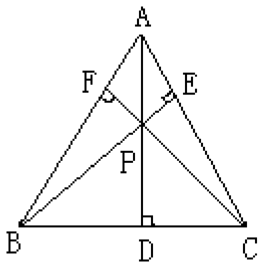


图 76

从图 76 可以看出，△PBC 和△ABC 是同底的两个三角形。显然，

$\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PD}{AD}$.同样道理,我们还能得到

$$\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PE}{BE},\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PF}{CF}.$$

所以 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}.$

但是 $S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}+S_{\triangle ABC}$，

</PGN000218.TXT/PGN>

因此 $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1.$

在第一届“华罗庚金杯”赛上，曾有过如下一道题：

如图 77，一个长方形地面被两条直线分成 4 个长方形，其中三个的面积分别是 20 公亩、25 公亩和 30 公亩。问另一个(图中阴影部分)长方形的面积是多少公亩？

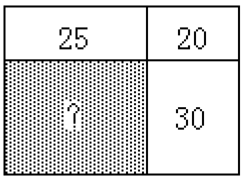


图 77

从图 77 可以看出，右边两个长方形是同长的长方形，它们的面积之比等于宽的比。同样，左边两个长方形也是同长的长方形，它们的面积之比也等于宽的比。设阴影部分的面积为 χ 公亩。由于左右两组长方形面积之比等于相同的宽之比，所以 $\frac{20}{30}=\frac{25}{\chi},\chi=37.5$(公亩).

间接条件

有些数学题常常需要直接利用间接条件。有时需要直接利用间接条件参与计算；有时需要善于发现隐含条件参与计算。这种简捷的思维方法可以克服由于所学知识不够所造成的困难，大大减少计算的时间。

不必求出最后结果

有一道题曾被很多人引用过，但是由于它具有典型性，这</PGN000219.TXT/PGN>里仍讲一下。

如图 78，已知正方形的面积为 18 平方厘米，求阴影部分面积。

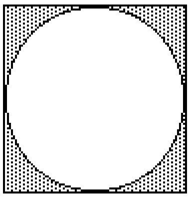


图 78

按正常思路，这道题应该用正方形的面积减去圆的面积。但是，在这个题的条件下，圆的半径(或直径)不会求。至此思路中断。这时，应该冷静下来想一想：求圆的面积需要什么条件呢？大家知道，圆面积

$S=\pi r^2=(\frac{d}{2})^2=\frac{\pi d^2}{4}$(其中，r为圆的半径，d为圆的直径).这里关键是要知道 r^2 或 d^2，至于能不能求出 r 或 d 并不重要。下面，我们用三种办法求解。

1.着眼于半径的平方。如图 78，显然，(2r)(2r)=18，所以 $4r^2=18, r^2=\frac{18}{4}=4.5$.图中圆面积为 $3.14\times r^2=3.14\times 4.5=14.13$(平方厘米)，阴影部分面积为 18-14.13=3.87(平方厘米)。

2.着眼于直径的平方。设正方形边长为 a，则 a 即圆的直径，所以 $a^2=18$.图中圆面积为 $3.14\times(\frac{a}{2})^2=3.14\times\frac{a^2}{4}=3.14\times\frac{18}{4}=3.14\times 4.5=14.13$

(平方厘米)，阴影部分面积为 18-14.13=3.87(平方厘米)。
</PGN000220.TXT/PGN>

3.着眼于半径、直径。一开始我们就说过，这种做法行不通。这是就一般情况而言。这道题的正方形面积是 18 平方厘米，这是个还算理想的数字。如果先把正方形面积扩大 2 倍，即 36 平方厘米，那么这时的正方形边长为 6 厘米，也就是圆的直径为 6 厘米，半径为 3 厘米。因此，扩大 2 倍后，图形的阴影部分的面积为 $36-3.14\times 3^2=36-28.26=7.74$(平方厘米)。原图形中阴影部分的面积为 7.74÷2=3.87(平方厘米)。

还有一道与此类似的题目：

如图 79，ABCD 的矩形，里边有一个最大的半圆，OC=10 厘米，求阴影部分面积。

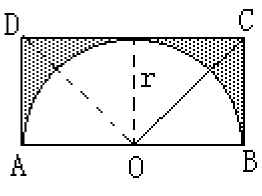


图 79

如图 79，我们分割矩形，把它为分为两个小正方形，并连结 OD。由于△DOC 为等腰直角三角形，OC=OD=10(厘米)，所以 $S_{\triangle DOC}=10\times 10\div 2=50$(平方厘米)，$S_{小正方形}=r^2=50$(平方厘米)，$S_{矩形}=50\times 2=100$(平方厘米)。因此，阴影部分面积为 100-3.14×50÷2=100-78.5=21.5(平方厘米)。

利用定比

现在，我们回过头来仍然看图 78，按照在“扩大、缩小”一节的思路，我们可以把图 78 一分为四(如图 80)。现在，我们集中观察这四分之一的图形。我们发现，这个小正方形的边长改变后，相应的小正方形的面积和阴影部分面积也会改</PGN000221.TXT/PGN>变。但是，变中有个不变的因素，就是阴影部分的面积和小正方形的面积之比不变。实际上这也是题中的一个间接条件。

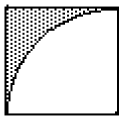


图 80

为了便于计算，我们假设小正方形边长为 10 厘米，则 $S_{阴}$ $10^2-3.14\times10^2\div4=100-78.5=21.5$(平方厘米)，阴影部分占小正方形面积的

$21.5\div10^2\times100\%=21.5\%$。

由此可知，只要是由这样的基本图形拼合成的图形，就都可以利用这个定比。请看下面一组图形(单位：厘米)：

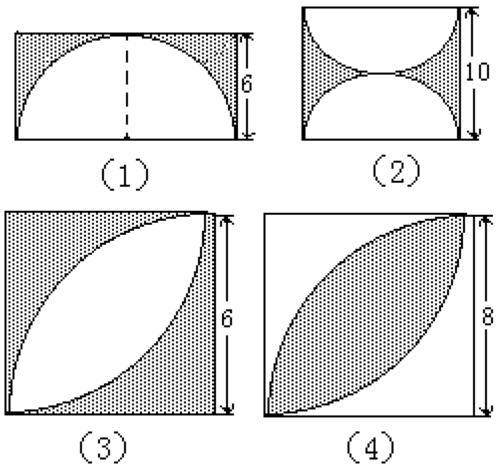


图 81 （单位：厘米）

(1)图可分割为 2 个小正方形，于是阴影部分的面积为</PGN000222.TXT/PGN>

$12\times6\times21.5\%=15.48$(平方厘米)。

(2)图可分割为 4 个小正方形，于是阴影部分的面积为

$10\times10\times21.5\%=21.5$(平方厘米)。

(3)图与以上解法不同，因为这一个正方形中有两个阴影部分，于是阴影部分的面积为

$6\times6\times(21.5\%\times2)=36\times43\%=15.48$(平方厘米)。

(4)图空白部分占整个正方形的 $21.5\%\times2=43\%$，所以阴影部分面积为

$8\times8\times(1-21.5\%\times2)=64\times57\%=36.48$(平方厘米)。

利用间接条件解题是一种重要的思路。这里，我们给出的仅仅是其中的两类问题。事实说明，在我们做题的时候，不仅要利用直接条件，也要利用间接条件。

拼 接、截 割

图形可以组合，也可以分解。经过组合或分解，图形的性质有的发生了变化；有的没有发生变化。下面，我们对平面图形和立体图形分别进行讨论。

平面图形的接、割

拼接和截割是两个互为相反的过程。对平面图形而言，拼接是把两个或两个以上的图形拼接在一起；截割是把一个图形截割成两个或两个以上的图形。</PGN000223.TXT/PGN>

下面，我们重点讲拼接的情况。

如图 82-(1)，两个一模一样的长方形，它们的长为 6 厘米，宽为 2 厘米，问把长方形的长拼接前、后，面积、周长有什么变化？

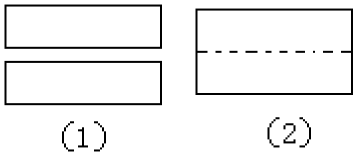


图 82

拼接前、后，面积不变，均为

6×2×2=12×2=24(平方厘米)。

拼接前，图 82-(1)是两个小长方形，它们的周长之和是

(6+2)×2×2=8×2×2=16×2=32(厘米)。

拼接后，图 82-(2)是一个大长方形，它的周长是

(6+2×2)×2=(6+4)×2=10×2=20(厘米)。

拼接前、后的周长相差

32-20=12=6×2(厘米)。

也就是说，两个相同的长方形拼接以后，周长减少了，减少的长度正好是拼接部分长度的 2 倍。

再看，如图 83-(1)，正方形边长为 4 厘米，长方形的长为 8 厘米，宽为 4 厘米，问两个图形拼接前、后，面积、周长有什么变化？</PGN000224.TXT/PGN>

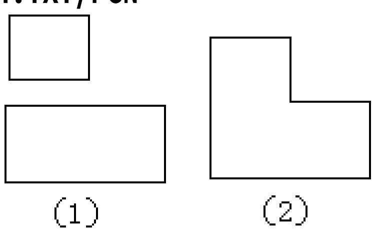


图 83

拼接前、后，面积不变，均为

4×4+8×4=16+32=48(平方厘米)。

拼接前，图 83-(1)中，两个图形的总长为

4×4+(8+4)×2

=16+12×2

=16+24

=40(厘米)

拼接后，图 83-(2)的周长为

$8\times2+4\times4=16+16=32$(厘米)。

拼接前、后的周长相差

$40-32=8=4\times2$(厘米)。

也就是说，正方形和长方形拼接以后，周长减少了，减少的长度正好是拼接部分长度的 2 倍。

以上两题都是由左边两图经过拼接变为右边一个图的过程，我们分别作了小结。反之，由右边一个图经过截割变为左边两个图的过程，希望读者自己来小结。</PGN000225.TXT/PGN>

从以上观察、对比中，我们可以发现平面几何图形拼接或截割后，面积、周长的变化规律是：

1.两个或两个以上的平面图形拼接成一个新的几何图形，它的面积等于原来若干几何图形的面积之和；而周长却减少了，如果拼接部分总长度为 a，那么拼接后减少的周长就是 2a。

2.把一个几何图形截割后，各小块图形面积之和等于原来几何图形的面积；截割后各小块几何图形的周长之和比原几何图形的周长增加了，如果所有截割部分的长度为 a，那么截割后增加的周长就是 2a。

下面举一个例题：

如图 84，正方形被分成大小、形状完全一样的三个长方形。每个小长方形的周长都是 24 厘米，求这个正方形的周长？

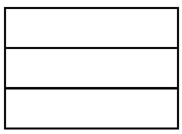
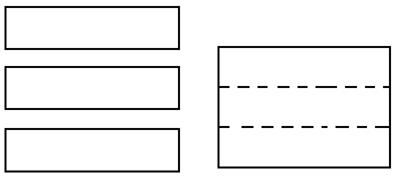


图 84

我们容易知道：$24\times3=72$(厘米)不是正方形的周长，而是三个小长方形的周长之和。根据上面的经验，我们不妨假设大正方形是由三个小长方形拼接而成的(如图 85)。三个小长方形的周长减少了 4 个“长边”，而这 4 个“长边”就正好相当于拼接后的正方形周长。也就是说，72 厘米里包含有两个正方形的周长。所以，这个正方形的周长为

$24\times3\div2=72\div2=36$(厘米)。</PGN000226.TXT/PGN>



(1)　　　(2)

图 85

立体图形的接、割

我们先看一个例题：

图 86 中的(1)、(2)分别是棱长为 3 厘米的正方体和底面边长为 6 厘米的正方形、高为 3 厘米的长方体。它们的体积和表面积分别是多少？若把它们拼接在一起(图 86-(3))，则这个组合体的体积和表面积分别是多少？

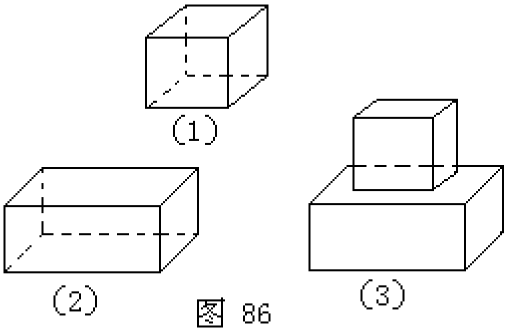


图 86

</PGN000227.TXT/PGN>

很显然，拼接前、后的体积未变，均为

3×3×3+6×6×3
=27+108
=135(立方厘米)。

拼接前，图 86-(1)、(2)的表面积之和为

3×3×6+(6×6+6×3+6×3)×2
=54+72×2
=54+144
=198(平方厘米)。

拼接后，图 86-(3)的表面积为

3×3×5+6×6+(6×6-3×3)+6×3×4
=45+36+27+72
=180(平方厘米)。

拼接前、后表面积相差

198-180=18(3×3)×2(平方厘米)。

也就是说，正方体和长方体拼接以后，表面积减少了，减少的面积正好是重叠部分面积的 2 倍。

由于截割的过程与此过程相反，结论自然也不相同。这里就不细讲了。请同学们自己去完成。

从以上观察、对比中，我们可以发现几何体拼接或截割后，体积、表面积的变化规律是：

1.两个或两个以上个几何体拼接组合成一个新的几何体，它的体积等于原来若干个几何体体积之和；而表面积却减少了，如果重叠部分面积为 S，那么减少的面积就</PGN000228.TXT/PGN>是 2S。

2.把一个几何体截割后，各部分体积之和等于原来几何体的体积；截割后各部分表面积之和比原来几何体的表面积增加了，如果其中截面面积为 S，那么增加的表面积就是 2S。

光有以上的认识还不够，还必须全面地分析思考问题。

如图 87，把一块棱长为 4 厘米的木块锯成形状、大小完全相同的两个长方形，求表面积增加了多少平方厘米？

木块锯开后，表面积增加，因为截面积为 4×4=16(平方厘米)，所以表面积增加了 16×2=32(平方厘米)。

如图 88，把长 8 厘米、宽 6 厘米、高 4 厘米的长方体木块锯成形状、大小相同的两个长方体，求木块的表面积增加了多少平方厘米？

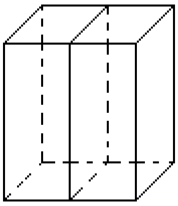


图 87

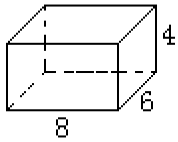


图 88

有的同学自以为已经熟练地掌握了几何体截割后表面积变化的规律，得出

4×6×2=48(平方厘米)。

这种解法虽然知道原木块锯成两个长方体后，木块表面</PGN000229.TXT/PGN>积增加了两个截面的面积。但是，这种思考是不全面的，只答对了三分之一。

本题应分三种情况分别求出木块表面积增加了多少。

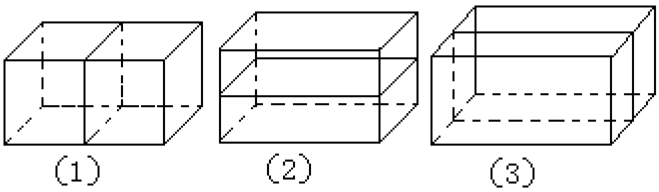


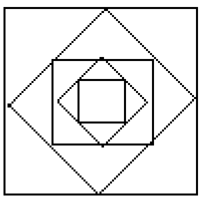
图 89

图 89-(1)：4×6×2=24×2=48(平方厘米)；
图 89-(2)：8×6×2=48×2=96(平方厘米)；
图 89-(3)：8×4×2=32×2=64(平方厘米)。

试一试

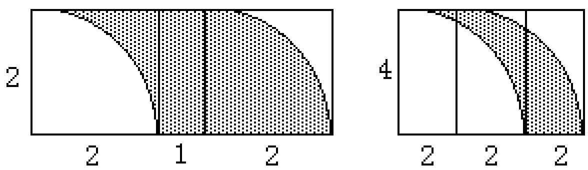
计算下列各题：

1.下图是一个边长为 4 厘米的正方形，我们把它称为第一个正方形。依次联结四条边的中点，得到第二个正方形，继续这样下去，得到第三个、第四个、第五个正方形。求第五个正方形的面积是多少平方厘米？

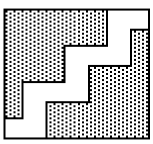


</PGN000230.TXT/PGN>

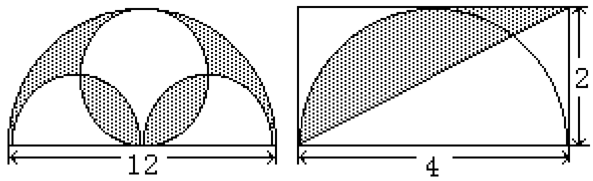
2.如图，求阴影部分的面积(单位：厘米)。



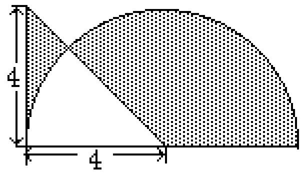
3.在一块边长 11 米的正方形花圃里有一条 1 米宽的小道(如图)，请计算种花的面积。

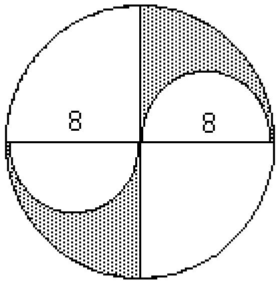


4.如图，求阴影部分的面积(单位：厘米)。



5.求阴影部分的面积(单位：厘米)。

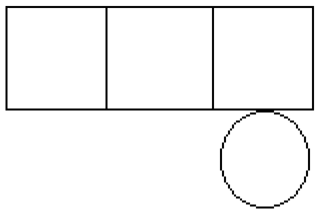




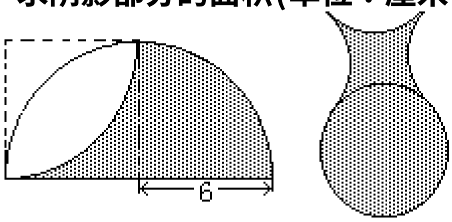
1 2 3

</PGN000231.TXT/PGN>

6.如图，请在图形中划一条直线，使它恰好把图形分成面积相等的两部分。

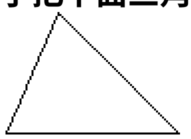


7.如图，求阴影部分的面积(单位：厘米)。



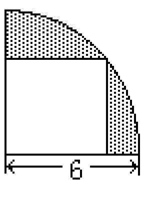
注：右图 4 个小圆的半径都是 2 厘米(这里只画了一个)。

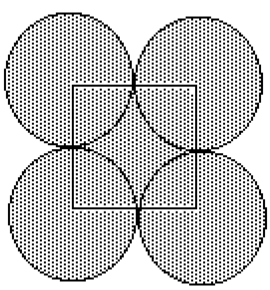
8.用剪子把下面三角形分成三块，再拼成一个长方形。



</PGN000232.TXT/PGN>

9.下面左图是一个扇形和一个正方形构成的，扇形半径是 6 厘米，求阴影部分面积。

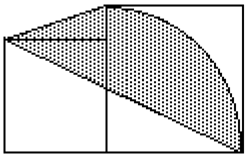




10.上面右图的正方形边长为 2 米，四个圆的半径都是 1 米，圆心分

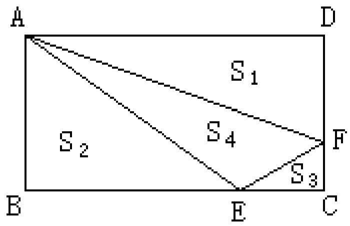
别是正方形的四个顶点。问正方形和 4 个圆盖住的面积是多少平方米？

11.如图，已知大正方形的边长是 12 厘米，小正方形的边长是 10 厘米，求阴影部分面积。

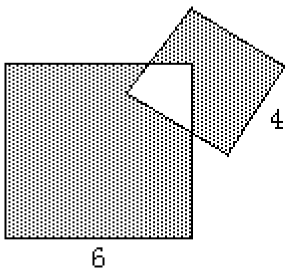


12.把长为 9 厘米，宽为 6 厘米的长方形，划分为如下图的四个三角形，其面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4，如果 $S_1=S_2=S_3+S_4=$，求 $S_4=$？

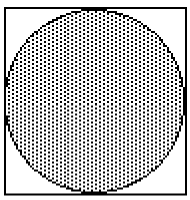
</PGN000233.TXT/PGN>

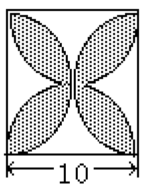


13.如图，大小两个正方形部分重合，两块没有重合的阴影部分的面积差是多少(单位：厘米)？



14.如下左图，已知正方形面积为 12 平方厘米，求阴影部分面积。

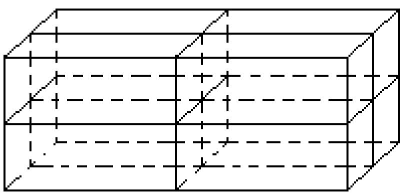




</PGN000234.TXT/PGN>

15.如上右图，求阴影部分的面积(单位：厘米)。

16.一块底面 30 厘米见方，高为 16 厘米的蛋糕，如图所示切三刀。问把蛋糕切开后，表面积比原来增加了多少平方厘米？



</PGN000235.TXT/PGN>