学校的理想装备
电子图书·学校专集
校园网上的最佳资源

中学教研（数学）

2000年第3期

BOOK
内部资料 非卖品

观念·教法·基础

——面对高考改革的一点思考

●何鼎潮　（浙江谒暨市教委教研室 311800）

伴随素质教育而来的高考改革，不仅有力地推动了高中课程设置、教学内容和教学方法的改革，而且对中小学的学科教学起了积极的导向作用.

数学是基础学科，新高考在突出考查数学的基础性、通用性和工具性的同时，要侧重考查学生的逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力以及运用所学数学知识、方法分析问题和解决问题的能力，特别对数学学科内外知识的联系提出了更高要求.面对教育制度如此重大改革,作为具体教学工作执行者的数学教师，更应统一思想，转变观念、更新教法，迎接高考改革带来的机遇与挑战.

1　转变观念，重在素质求发展

首先要切实转变教育观念，中小学是基础教育，其根本宗旨是为提高全民族素质打基础.要面向全体学生，促进学生积极主动、生动活泼地发展；要发展学生个性，培养学生的科学态度、创新精神和实践能力，归根到底是“以学生的发展为本”的教学，而不是“宝塔型”、“淘汰式”的应试教育.

其次要转变传统的教学观念，把教学单纯地看作是教会学生读书，认为读书数量的多少与学到的知识本领是简单的线性关系，“学好数理化，走遍天下都不怕”就是最典型的一例.其实不然，单纯的读书有其局限性，对后人来说，书本知识只是间接经验，不通过实践检验，不与现实的生产、生活实际相联系是不能成为自己真正掌握的东西，可以肯定教学是十分复杂的多元结构，新的教学应当是形成知识、能力、方法、应用直至最高境界创新的过程.

第三，学习数学的方法也不再是“一支笔一张纸”，学好数学的最佳方法也不只是“做数学”.近两年的高考数学试题已经宣告搞“题海战术”占不了便宜.新高考在内容上重视考查学生对基础知识的理解、应用和分析综合能力；在形式上突出科目的选择性、开放性.所以数学学习既要重视基础知识，基本技能和基本方法，更应注意教学思想、教学方法的应用，诚然，学习数学离不开解题，但解题不在多而在精，要有目的，有意识地利用解题串联已学知识，提高解题能力，也就是说在数学解题教学中，求得结论不是唯一目的，重要的是加强对结论之求证过程的深入思考、分析与研究.

2　更新教法、强调过程求开放

依据教材、大纲要求组织的数学教学，当然离不开“以本为本，以纲为纲”的原则，新高考推出《高考内容和形式改革方案》的 7 项改革中的第 2 条是命题“依据中学教学大纲，但不拘泥于教学大纲，在考查学科能力的同时，注意考查跨学科的综合能力和学科知识渗透的能力”.这里“不拘泥于”教学大纲,并不是否定教学大纲是教与学的依据.只是从素质教育的高度对学科教学提出了更高的要求.所以，改革数学教学，优化教学过程，提高数学教学质量是当务之急，国内有关数学教育专家提出“开放数学教育”其目的正是为了更好地培养学生的数学能力、适应社会的能力以及创新能力.从目前基础教育的实际出发，本人认为可从以下 3 个方面做起.

2.1 强调过程教学

特别是数学知识的发生过程教学.数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，各块知识或章节的研究体系不尽相同，学生如果不了解一块内容的研究背景、研究对象、研究范围和研究方法等等，只是孤立地就知识讲知识，就题论题，势必影响学生对知识的理解、掌握.例如“ε-N”这一极限定义，只是抽象地照本宣科，不把研究对象是解决一个描述“无限接近于某一常数”这一实质讲清楚，即使学生背得滚瓜烂熟，仍然不能领悟这一定义的精辟所在；又譬如反三角函数概念，如教师一开始就强调反函数存在的必要条件，把反三角函数概念的形成过程讲得清清楚楚，就能让学生今后一见到反三角函数就先想到它的定义域、值域，几乎能在学生头脑里产生条件反射似的.另外公式的推导过程、解题的思考过程、结论的探求过程等都应予以充分重视.

2.2 重视教材内涵

恰当地处理教材让自己的课堂教学组织、安排更符合学生的认识规律，使学生的能力得到发展和提高,是每位数学教师的常规工作.随着素质教育的深入，要使课堂教学充满活力，让课堂体现主动性、实践性、综合性、探索性和创造性，需要教师充分挖掘教材中有教学价值、应用价值的知识点，特别是对那些与相关学科互相渗透、彼此联系的知识作点适当的延伸、拓宽或有选择地补充，给学生以新思路、新方法，达到开阔视野，培养创新意识的目的.例如：

在 x＞0，y＞0，且 x＋y＝1 的条件下推得一系列不等式：

$$xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, \qquad (1)$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x+y}{xy}\ge 5, \qquad (2)$$

…

等.是否可提出更一般的结论，让学生去思考、去探求，譬如：

x＞0，y＞0，且 x＋y＝S，下列结论是否一定成立？对 S 有限制吗？

$$xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{S^2}{4}, \qquad (3)$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)=S+\frac{S}{xy}\ge\frac{S^2+4}{S}, \qquad (4)$$

2.3 加强数学应用

数学源于实践，高于实践，又服务于实践.面向 21 世纪的中小学数学教学应当是为学生的终身发展奠定良好的基础，要求学生学会运用数学思维方法去观察、分析现实社会，去解决日常生活中的实际问题，有人称数学是一门技术，在竞争日趋激烈的现实世界，数学技术用得好，的确是取胜之法宝.所以加强数学应用能力的培养不只是高考命题的热点，更是国际数学教育的热门话题.

作为数学教学工作者，首先要充分利用现行教材中有关应用性知识的作用，有的可以直接利用.如：函数概念之后的细胞分裂问题，利用不等式求最值，几何（包括解析几何）中的插图等；有的则可以引申，如在二项式定理之后讲点近似计算；复数几何意义讲完联系一下力的合成等等；也可以自编

应用题，如讲完比较法证明不等式，补充如下应用题：

一船在静水中航行速度为V，水速为V_0（$V>V_0$），试比较：船顺水航行 a 公里后逆水返回原地所需的时间与船在静水中往返同样距离所需时间的大小.

其实，本题是顺水、逆水、静水 3 种行船.设顺水、逆水、静水所行路程分别为S_1，S_2，S_1+S_2，则所行时间分别为：

$$\frac{S_1}{V+V_0}=t_1,$$

$$\frac{S_2}{V-V_0}=t_2,$$

$$\frac{S_1+S_2}{V}=T.$$

先提出第一个思考题：当$S_1=S_2$时，t_1+t_2与T有可能相等吗？

显然：当$S_1=S_2$时，恒有

$$\frac{S_1}{V+V_0}+\frac{S_2}{V-V_0}>\frac{S_1+S_2}{V},$$

即 $t_1+t_2>T$.

然后让学生思考第二个问题：设计一种新的走法，使$t_1+t_2=T$，

∵ $S_1=(V+V_0)t_1$，

$S_2=(V-V_0)t_2$，

又 $S_1+S_2=VT$，

故 $(V+V_0)t_1+(V-V_0)t_2=VT$，

$V(t_1+t_2)+V_0(t_1-t_2)=VT.$

要使$t_1+t_2=T$，只有$t_1=t_2$.

而当$t_1=t_2$时，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{(V+V_0)t_1}{(V-V_0)t_2}=\frac{V+V_0}{V-V_0}.$$

所以新的走法是顺水与逆水所走的路程之比等于其速度比.

这样的应用题既能激发兴趣，又有利于引导学生去关心和解决一些实际问题.同时，要让学生从每一个实际问题解决过程中去体会解数学应用题的方法、步骤.特别是实际问题数学化、抽象化主要手段——数学建模的常见类型，主要的数学思想、方法要积极引导，不断渗透，使学生头脑里储存一定数量基本“数学模式”.当然，解数学应用题的第一关是阅读理解，准确领会题意，抓住数学实质.至于如何培养和提高学生的阅读能力是大有文章可做的，只要教学工作者有心，坚持不懈地训练，学生的阅读水平必将日趋提高.

3 立足基础，注重能力求创新

注重双基是我国数学教学的特色和成功之处.面对高考改革这样的大风大浪，作为数学教育工作者，头脑要清醒，态度要积极而慎重.切不可忽视学科的基础知识、基本技能和基本的数学思想方法，而大搞以“创新精神为中心”，“以研究探索为中心”的教学模式，要知道民族素质提高的关键在基础.一个人的成长发展离不开基础.所谓创新精神、综合能力只能在扎实的基

础知识上掌握相关学科的前沿知识，再运用创新思维方能举一反三予以体现．任何离开基础的想象、创新只能是不着边际的空想，或者是低层次的小打小闹．

新高考鉴于目前基础教育现状，综合能力的测试命题既包括考查学生所学学科基础知识的掌握程度和运用这些基础知识分析问题，解决问题的能力，也包括运用几门学科知识分析解决问题的能力，而不是学科知识点的交叉作为综合测试的立足点．所以我们的数学教学必须坚持“以数学知识为中心”的教学模式．继续弘扬我们已经得心应手的传统教学中应该弘扬的东西，如重视数学知识系统性、概括性、严谨性．提高学科素质教育的主渠道——课堂教学的效率，夯实学生基础，以不变应万变．同时，也要适当地进行以探索、研究、创新为中心的课堂教学新模式的尝试，提高学生创新意识和创新能力．逐步形成一种切实可行的数学教学观，即立足基础，培养能力求创新．坚决摒弃那种“教条条、背条条、考条条，考试之后忘条条”的应试教学观．

谈数学学习中的“反思”

●邵迎春（浙江富阳市新登中学 311404）

古语云：学而不思则罔，思而不学则殆.思想家韩愈也曾经说过：业精于勤荒于嬉，行成于思毁于随.数学教学除了要教学生学会数学，更重要的是教学生“会学”数学.而“思考”则是衡量数学教学质量的重要标志.数学教学中引导学生思考，教会学生思考的途径、思考的方法比单纯做大量练习要有效得多.下面就引导学生反思谈一些看法：

1　反思的及时性

学源于思，思源于疑.留心处处皆疑问.有疑问就需及时反思，使学生从平时的点滴疑问中学会反思，养成反思的习惯.

反思应体现在每一门科，每一章节，每一堂课，每一个知识点的教学，以及每一个例题的讲解之中.

例如，在对数方程的第一堂课中，举了一个最简单的例子：

$$\lg(x-1)^2=2,$$

引导学生反思：

（1）由指数方程的求解，我们可得到超越方程求解的指导思想是什么？（转化为代数方程）.

（2）由解法1：

$\lg(x-1)^2=2$，

$\Rightarrow$ $2\lg(x-1)=2$，

$\Rightarrow$ $\lg(x-1)=1$，

$\Rightarrow$ $x-1=10$，

$\Rightarrow$ $x=11$，

解法2：$\lg(x-1)^2=2$，

$\Rightarrow$ $(x-1)^2=10^2$

$\Rightarrow$ $x-1=\pm10$，

$\Rightarrow$ $x=11$或者$x=9$.

产生不同解的原因是什么？通过与学生讨论，明确了转化过程必须是同解变形，必须考虑对数函数的定义域.通过以上反思，加深了学生对定义域，等价变形的理解，也培养了学生思维的严密性、批判性.

概念是思维的细胞,在概念教学中也应重视反思的作用.除了引导学生积极参与从具体到抽象，从特殊到一般的观察、概括、抽象的概念发生和形成过程，还应引导学生通过反思，深刻理解概念的内涵和外延，揭示概念间的联系.通过及时反思揭示概念的本质，以免学生思维产生负迁移.

例如，讲了异面直线定义后，可及时提出以下问题判断对错引导学生反思：

(1)异面直线指不相交与不平行的直线；

(2)不同在一个平面内的直线是异面直线；

(3)分别在两个平面内的直线是异面直线；

(4)空间两条不相交直线是异面直线；

(5){异面直线}={不相交直线}∩{不平行直线}；

(6){异面直线}={无公共点直线}∩{不平行直线}；

(7)除了相交直线和平行直线是异面直线.

将以上抽象问题具体化，用具体实例、图形引导学生辨别、判断，加深对概念的理解，从中也得到了充分的思维训练.

2 反思的层次性

一个概念的形成，一个解题思路的获得，一种解题方法的掌握，乃至任何一种能力的培养，都需要一个过程.同样，学生的反思也有一个过程，需分层次递进,低层次的反思是高层次的反思的基础.任何超越学生的认知能力的反思都是无效的，反而会扼杀学生的反思积极性.

例如，定义域概念的形成和深化，是伴随着函数概念的完善，通过不断的反思进行的.是学生旧的认知结构与新的认知结构不断同化和顺应的结果.

第一层次：初中函数的传统定义：自变量的取值范围.由于仅学了一次函数和二次函数，定义域是一切实数，表示方法是文字叙述.

第二层次：高一函数的近代定义.引进了集合和映射的概念，定义域指非空数集(原象集)，通常指使函数表达式有意义的自变量的取值范围，并进一步明确定义域不同的函数是不同的函数.

第三层次：在高中代数第一章结束后，再对定义域概念做一综合的反思与概括：

(1)定义域的概念：自变量的取值范围.可通过已知 $f(x+1)$的定义域是[1，3]，这个定义域是指 x 的取值还是 x+1 的取值这个问题帮助学生理解；

(2)定义域的求法：解不等式组；

(3)定义域的表示：集合与区间；

(4)定义域的常见求解类型：对数函数，分式函数，无理函数，幂函数及其它函数，应用题等；

(5)定义域的逆向应用：可出下例：

已知函数

$$f(x)=(mx^2-4mx+m+3)^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{x^2-mx+1}$$

的定义域是 R，求实数 m 的取值范围；

(6)定义域的综合应用：可出下例：

已知$f(x+1)$定义域是[-2，3]，求$f(\frac{1}{x}+1)$的定义域.

3 反思的迁移性

波利亚曾指出：掌握数学就是意味着善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理，见解独到和有发明创造的题.他还说：当你找到第一个蘑菇后，要环顾四周，因为它们总是成堆生长的.这正是反思的奥妙所在.在解题教学中,解题后的反思不单是简单的回顾或检验，而应引导学生仔细分析问题的结构特点，寻找各学科知识的交叉点，总结、理清、概括思路，形成知识的正迁移，达到举一反三，一题多解的目的.

例如在不等式复习中，可给出下例：

已知$a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，求证：

$$|ax+by|\leq 1.$$

首先教师和学生共同分析，学生思考，利用综合法、分析法、比较法、反证法证明该题.这是复习的重点和主要目的,证明中应注意学生的书写的合理规范.但是，仅限于以上证法是不够的.教师可引导学生分析已知和结论的特点，提出：

反思 1：三式的值都等于 1，我们可联想起什么？于是，有学生提出设 $a=\sin\alpha$，$b=\cos\alpha$，$x=\sin\beta$，$y=\cos\beta$，从而利用三角法证明了该题.

反思 2：已知的结构具有复数模的特点，能否用复数法证明呢？于是，自然想到设 $z=a+bi$，$z'=x+yi$，a，b，x，y∈R，顺利解决该题.

反思 3：考察

$$x^2+y^2=1，a^2+b^2=1$$

的几何意义是什么？有学生领悟到可设(a，b)，(x，y)是圆

$$x^2+y^2=1$$

上的点，利用两点间的距离公式可以证明.

通过以上反思，复习了不等式证明的通法和巧法，也着力培养了学生的思维灵活性和求异思维能力.波利亚认为："一个有责任心的教师与其穷于应付繁琐的教学内容和过量的题目，还不如适当选择某些有意义但又不太复杂的题目，去发掘题目的各个方面，在指导学生解题的过程中，提高他们的才智与推理能力."

4　反思的开放性

学生的创新意识的培养是素质教育对我们的要求.反思的开放性,要求学生不能墨守成规.不能重模式，轻思维.要求我们的数学教学是开放性教学：问题开放，解题开放，教学开放.运用猜想、变式、推广、改造等手段，开放题、情景题、应用题等题型，交流、讨论等课型，培养学生推理、交流、协作、概括和分析问题解决问题的能力，通过开放性的反思，提高学生开放性和创造性的解题能力.

例如可对命题进行条件弱化和结论加强、推广、引申等的反思.

例1　过抛物线$y^2=2px$的焦点的一条直线和这抛物线相交，两个交点的纵坐标分别为y_1，y_2,求证：

$$y_1 \times y_2=-p^2.$$

(解几课本P.101)

运用坐标法证明后，可引导学生反思：

(1)结论

$$y_1 \times y_2=-p^2$$

的几何意义是什么？搞清其几何意义后，可引申得到如下命题：

命题 1：过抛物线焦点弦两端作准线的垂线，两垂足与抛物线的焦点的连线互相垂直.

命题 2：过抛物线焦点弦两端作准线的垂线，两端点与两垂足连线的中点的连线互相垂直.

命题 3：过抛物线焦点弦两端作准线的垂线，两垂足连线的中点与焦点的连线垂直于焦点弦.

命题 4：过抛物线焦点弦的两端作准线的垂线，以两垂足的连线为直径的圆必与焦点弦相切于焦点处.

(2)结论

$$y_1 \times y_2 = -p^2$$

有什么应用？

命题 5：过抛物线焦点 F 的一条直线与它交于两点 P，Q，通过点 P 和抛物线顶点的直线交准线于 M，求证：直线 MQ 平行于抛物线的对称轴.(解几课本 P.102)

命题 6：过抛物线焦点弦一端作准线的垂线，垂足、抛物线顶点和焦点弦的另一端三点共线.

命题 7：抛物线焦点弦被焦点所分得的两线段长的倒数之和为定值.

通过上述反思和推广，以例及类，举一反三，使所解问题系统化.

又如可以适当安排一些开放性命题.

例 2　在正四面体 ABCD 中，试探求各几何量间角、距离、体积、轨迹、最值等.

学生通过反思，可得到立体几何中几乎所有线面的平行、垂直关系的证明问题，也可得到角、距离、体积的计算问题，还可通过引进变量建立函数关系求最值和轨迹等.

挖掘课本建模实例，培养学生创新能力

●尹志春(浙江金华第五中学 321000)

浙江省义务教育全日制初级中学《数学教学指导纲要》中明确要求“引导学生把数学知识应用到生活和生产实际中去，培养学生解决简单实际问题的能力”，“会应用所学知识解决简单的实际问题，能适应社会日常生活和生产劳动的基本需要”.现用省编教材的编排中，充分体现了大纲的这一精神，平时教学中如能去充分挖掘，重视数学建模的教学，引导学生去发现问题，给出解决问题的方法、建立数学模型、用所学知识解决问题，对学生创新能力、解决实际问题的能力的培养大有裨益.下面以省编教材第五册第145页“相似三角形应用举例(三)”的教学为例，谈谈自己教学中的一点粗浅体会.

这一节是用相似三角形知识解决生产实际中的某些测量问题，例1测电线杆高，例2测河宽，例3测人与远处某物距离，课本上实际已给出了测量方法，建立好数学模型，我在教学中，作了如下改进，以测电线杆高为重点内容，尽量让学生自己去动手动脑想出测量方案，建立数学模型，然后应用所学知识去解决问题.

1.给出问题 1：应用相似三角形知识，根据下面所给条件，测出底部可以到达的电线杆的高度，要求所测数据尽量少.

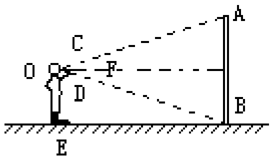

图1

(1)条件1：一把长30㎝的刻度尺，一把长100米的卷尺.

由于课本中已有例题，学生容易想出如图1的方法，只要知道刻度尺CD，臂长OF，人与电线杆距离EB，即可应用相似三角形知识求出电线杆高为 $AB=\frac{EB\cdot CD}{OF}$.

(2)条件2：只有一把长100米的卷尺.

引导学生注意课本例1和例3中用“跳眼法”目测的方法，可目测电线杆的高度，把条件1中的刻度尺用大拇指代替，不过人与电线杆的距离比较远，经计算可知，手臂向前伸直时，眼睛与大拇指的距离约是大拇指长度的12倍，因此，只需量出人与电线杆的距离EB，即可求得电线杆高度约为 $AB=\frac{1}{12}EB$.

(3)条件3：2米长标杆一根，100米长卷尺一把，在阴天测量.

引导学生找出与上述不同的测量方法.注意“2 米长标杆一根”的应用，经师生讨论，逐渐给出下面方法：如图2，把标杆垂直竖立某一适当位置F，人向着BF方向退至D，使视线看去O，E，A在一直线上，B，F，D也在一直线上，只要测量出人的地面与眼的高度OD、人与电线杆距离DB、人与

标杆距离DF，应用相似三角形即可求得电线杆高度AB＝$OD+\frac{DB(2-OD)}{DF}$（“2”即标杆的长度）.

(4)条件4：2米长标杆一根，100米长卷尺一把，在太阳光下测量.

启发学生与条件3不同的是有“太阳光线”，除了上述方法外，如何充分利用“太阳光线”这一条件？学生自然想到了影子，经引导给出了各种方法，下面是其中之二.

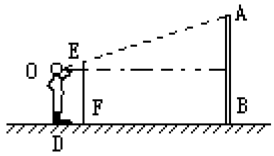

图2

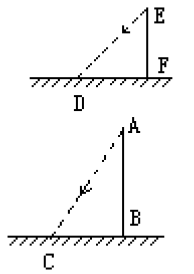

图3

方法1：如图3，把标杆EF垂直竖立地面，分别测出标杆、电线杆的影子DF，BC的长，即可计算出电线杆高度AB＝$\frac{EF\cdot BC}{DF}$.

方法2：如图4，把标杆EF垂直竖立地面一适当位置，使得电线杆的影子BC与标杆的影子FC在C点重合，则A，E，C在一直线上，测量出CF，CB的长度，可求出电线杆高度AB＝$\frac{EF\cdot BC}{CF}$.

(5)条件5：只给100米长卷尺一把，并在太阳光下测量，由于有了条件4中的测量方法，现在少了“标杆”的条件，就想到了用“人”代替“标杆”的作用，在上面方法1，方法2中把“标杆”用“人”代替，可估测出电线杆高度.

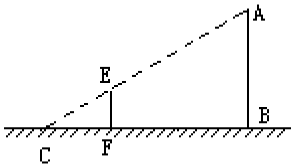

图4

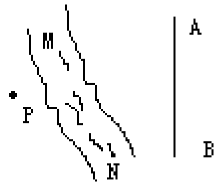

图5

2.经过上面的思考，学生对测量建筑物高度的方法已有初步了解，再给出下面“测量底部不能到达的建筑物的高度”的问题.

问题2：如图5，河MN对岸有电线杆

AB,如何不过河测出电线杆AB的高度？应用相似三角形知识解决这个问题虽然有所困难，但由于未受条件限制，启发学生在河岸选定一适合点P，把P到电线杆距离PB与电线杆高度AB作为两个未知量，通过两次测量列方程组计算.此问题可让学生作为课外思考题，并告诉学生，在第六册学了三角函数知识后就比较容易解决，为学习解直角三角形的应用打下基础.

在学了第六册第五章《解直角三角形》后，应用三角函数知识，再来解决这个问题，许多同学就能给出方法了.学习了解直角三角形的应用后，我把北京市第一届《高中数学知识应用竞赛初赛试题》第6题给学生解答，许多

学生就能轻而易举地解决了.题目如下：“如图 5，有一条河 MN，河岸的一侧有一很高建筑物 AB，一人位于河岸另一侧 P 处，手中有一个测角器(可以测仰角)和一个可以测量长度的皮尺(测量长度不超过 5 米)，请你设计一种测量方案(不允许过河)，并给出计算建筑物的高度 AB 及距离 PA 的公式，希望在你的方案中被测量数据的个数尽量少.”给出的方案其中两个如下：

方案 1：P 地位于开阔地域，则测量方案如图 6 所示，被测量的数据为 PC(测角器的高)和 PQ(Q 为在 PB 水平线上选取的另一测量点)的长度，仰角 α 和 β，则应用解直角三角形知识可求得

$$AB = PC + \frac{PQ}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta},$$

$$PB = \frac{PQ \cdot \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}.$$

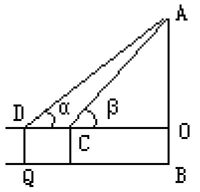

图6

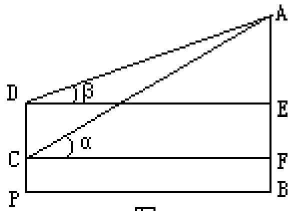

图7

方案 2：如图 7，若 P 处也是一可攀登建筑物(如楼房)，则可在同一垂线上选两个测量点，被测数据为 PC 和 CD 的长度，仰角 α 和 β，则可求得

$$AB = PC + \frac{CD \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

$$PB = \frac{CD}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}.$$

在平时的教学中，有意识地挖掘、发挥课本中数学建模实例的作用，加强数学建模的教学，对学生的创造能力、解决问题能力的培养是很有好处的，正如中国数学会教育委员会主任、北京师范大学严士健教授在北京市高中数学知识应用竞赛会议上所讲：“这不在于学生在中学中解决了多少应用问题，只要他有这种感受，有一点经验，知道一点如何把实际问题化成数学问题，有点初步的能力，有点体会，他将来就可以以小见大.这个意义应该是很大的，对学生的成长有很大好处，这个就是素质教育.”

集合单元教学中渗透数学思想方法初探

●范红星(浙江建德市严州中学 311604)

集合单元是高中教材非常重要的内容，蕴含着丰富的数学思想方法，教学过程中，教师若能注意认真地挖掘与提炼，适时而有效地渗透数学思想方法，对于开发学生的智力，培养学生的能力，发展学生的思维，具有十分重要的意义.本文结合集合单元的教学实践，谈点体会.

1　渗透分类讨论的思想方法

分类的通俗说法就是按照一定的标准把研究的对象分成几个部分或几种情况.它采取的是“化整为零，各个击破”的手段.通过它可以达到把几个复杂的问题分解成若干相对简单的问题,从而获得完整解答的目的.分类讨论的思想在高考试题中几乎每年必考,1999年高考试卷中对分类讨论思想的考查尤为突出.具体应用分类讨论思想解题时，必须弄清“引起讨论的因素是什么”、“分类讨论的步骤是什么”以及“如何简化讨论”等问题.

例1　已知 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，若 $A=B$，求 x，y 的值.

分析　由 $\lg(xy)$有意义，知 $xy>0$.故必有 $\lg(xy)=0$，得 $xy=1$.根据集合相等的意义，应分两种情形讨论：

(1)若$|x|=1$，则 $x=1$ 或-1.当 $x=1$ 时，得 $x=y=xy=1$，这与集合中元素的互异性矛盾，舍去.当 $x=-1$ 时，得 $y=-1$，符合题意.

(2)$y=1$，则得 $x=1$，不符题意，舍去.

所以，所求的 x，y 的值是

$$x=-1，y=-1.$$

注　本题抓住集合相等的特征进行分类讨论.

2　渗透化归转换的思想方法

化归思想是指在处理、解决数学问题时，把那些需要解决的问题通过某种转化过程归结为一类已经解决或比较容易解决的问题.运用化归思想的基本原则是化难为易、化生为熟、化繁为简、化未知为已知、化正为反.

例2　已知集合

$A=x|x^2-4mx+2m+6=0$，$x\in R$.若$A\cap R^-\neq\Phi$，求实数m的取值范围.

分析　集合 A 是方程

$$x^2-4mx+2m+6=0, \qquad (1)$$

的实数解组成的集合，$A\cap R^-\neq\Phi$意味着方程(1)的根有：

(i)两负根；

(ii)一负根、一零根；

(iii)一负根、一正根

3种情况.分别求解相当麻烦.上述3种情况虽可概括为方程(1)的较小的根

$$\frac{4m-\sqrt{(-4m)^2-4(2m+6)}}{2}<0,$$

但此不等式求解也并不简单，怎么办？

如果考虑$A\cap R^-\neq\Phi$的反面：$A\cap R^-=\Phi$，则问题可转化为先求方程(1)的两根均非负时 m 的取值范围，再应用补集求解就非常容易.

解 设全集$I=\{m|\triangle=16m^2-8m-24\geq 0\}=\{m|m\leq -1$或$m\geq\frac{3}{2}\}$.

若方程(1)的两根均非负，则有 m∈I，且 4m≥0，且 2m+6≥0，得 $m\geq\frac{3}{2}$.

因此，$\{m|m\geq\frac{3}{2}$关于I的补集$\{m|m\leq -1\}$即为所求的m的取值范围.

注 本题应用化正为反的化归思想顺利求解.

3 渗透数形结合的思想方法

数与形是数学研究的两类基本对象，也是数学发展的两大支柱.它们既有联系又各有特点.数形结合就是充分利用“形”的直观性和“数”的精确性，通过数与形的相互转化使问题简捷求解的一种数学方法.教学过程中，涉及集合的交、并和补集等运算，要充分结合集合的数轴表示和韦恩图表示，以数思形，数形结合.

例 3 已知集合{I=x|x 取不大于 30 的质数}，集合 A，B 是 I 的两个子集，且满足$A\cap\overline{B}=\{5,13,23\}$，$\overline{A}\cap B=\{11,19,29\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{3,7\}$，求集合A，B.

分析 I={2，3，5，7，11，13，17，19，23，29}，画出集合的韦恩图(见图 2)，①，②，③，④4 个区域分别表示$\overline{A}\cap\overline{B},A\cap\overline{B},A\cap B,\overline{A}\cap B$.在各部分填上相应元素，易得$A\cap B=\{2,17\}$.

∴A＝{2，5，13，17，23}，

B={2，11，17，19，29}.

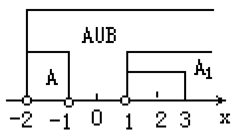

图1

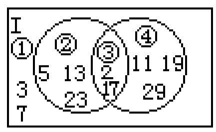

图2

4 渗透归纳猜想的思想方法

猜想是人们依据事实，凭借直觉所作出的一种大胆假设，它是一种积极的创造活动.在教学中，引导学生进行归纳猜想，培养他们的猜想能力是提高学生创造能力、培养其创新精神的一条有效途径.教师要处处做一位有心人，注意诱导启迪学生，让他们大胆猜想.

教材第 7 页有这样一道例题：写出集合{a，b}的所有的子集及真子集.

其解答较为简单，集合{a，b}的所有子集是Φ，{a}，{b}，{a，b}；真子集是Φ，{a}，{b}.教学到此，似乎例题任务已完成，但我并未就此“放过”此例，进而提出下列问题让学生思考：

(1)写出集合{a，b，c}的所有的子集，它们的个数是多少？

(2)写出集合{a，b，c，d}的所有的子集，它们的个数是多少？

(3)写出集合{a，b，c，d，e}的所有的子集，它们的个数是多少？

根据上述 4 题的结果，请你观察并思考：集合中元素的个数和它的子集个数有何规律？如果集合中含有 n 个元素，它的子集个数是多少？

学生经过充分思考、讨论，得到下列猜想：若集合中含有 n 个元素，那么它的子集个数是2^n个，并进一步得到，它的非空子集个数是2^n-1个，它的真子集个数是2^n-1个，它的非空真子集个数是2^n-2个.到此，教师对学

生的猜想要作充分肯定，并大力鼓舞学生的探索精神和创新意识.

5　渗透数学建模的思想方法

应用题考查已成为数学高考的热点问题，它主要考查学生的数学意识和数学建模能力.如何把实际问题看成数学问题,看成什么数学问题是数学建模的关键.教学过程中，帮助学生树立运用数学模型的思想，对于培养学生整体处理问题的能力和创造性处理问题的能力，是大有裨益的.

例 4　为完成一项实地测量任务，夏令营的同学们成立了一支“测绘队”，需要 24 人参加测量，20 人参加计算，16 人参加绘图.测绘队的成员中很多同学是多面手，有 8 人既参加了测量又参加了计算，有 6 人既参加了测量又参加了绘图，有 4 人既参加了计算又参加了绘图，另有一些人 3 项工作都参加了，请问这个测绘队至少有多少人？

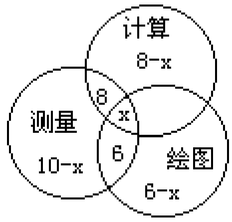

图3

分析　本题的已知条件之间的关系不明朗，难以理出解题思路，通过分析，可建立一个集合模型，则可化难为易，顺利求解.

如图 3，设 3 项工作都参加的人数为 x，则各个集合之间的关系得到清晰表达.测绘队总人数为$(10-x)+(8-x)+(6-x)+4+6+8+x=42-2x$，

因为 $0\leq x\leq 6$，所以 $30\leq 42-2x\leq 42$，即测绘队人数最少为 30 人，此时 $x=6$.

具体地说，有 6 个人 3 项工作都参加了，有 4 个人只参加测量不参加其它工作，有 2 个人只参加计算而不参加其它工作，没有人只参加绘图而不参加其它工作.

总之，数学思想方法的渗透是一个潜移默化的过程，是在学生掌握数学知识的同时经多次理解和反复应用而逐步形成的.作为教师,必须认真钻研教材，充分挖掘和提炼教材中蕴含的主要数学思想方法，在教学的各个环节上渗透和强化数学思想方法的训练，帮助学生及时梳理、总结基本的数学思想方法，逐个认识它们的本质特征、思维程序或者操作程序，逐步做到自觉地、灵活地施用于所要解决的问题.

数学应用问题的建模类型及思维策略

●林美娟(浙江金华师范学校 321000)

数学应用问题的解法一般采用数学建模法，即通过对问题的数学化，模型构建，求解检验使问题获得解决.用这种方法求解实际应用问题，首先要在阅读材料，理解题意的基础上，把实际问题抽象成数学问题，建立起数学模型，再利用数学知识对模型进行分析探求，得到数学结论，最后得出应用问题的解.本文给出几种数学建模的类型及思维策略.

1　建立方程模型

根据问题特点，把要求的量用未知数表示，并依照所给的等量关系列出方程(组)，然后求解.

例 1 某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴，设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克，政府补贴为 t 元/千克.根据市场调查，当 8≤x≤14 时，淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场需求量 Q 千克近似地满足关系：

$P=1000(x+t-8)\ (x\geq 8,\ t\geq 0)$，

$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}\ (8\leq x\leq 14)$，

当 P=Q 时的市场价格称为市场平衡价格，试将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求出函数的定义域.

建模求解　问题要求函数解析式及其定义域，而函数解析式一般地是一个等式.因为当 P=Q 时的市场价格称为市场平衡价格,且本题要求的正是市场平衡价格与政府补贴间的函数解析式,于是由 P＝Q 可建立关于 x 的一个无理方程：

$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2}$，

此方程有解的条件为$\triangle_x\geq 0$，

由$\triangle_x=800-16t^2\geq 0$，得$t^2\leq 50$，

结合问题中的限制条件$t\geq 0$，得到$0\leq t\leq\sqrt{50}$，此时解得：

$$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}.$$

再由$8\leq x\leq 14$，$0\leq t\leq\sqrt{50}$，得

$$0\leq t\leq\sqrt{10},$$

故所求函数式为

$$x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2},\ t\in[0,\sqrt{10}].$$

2　建立函数模型

把问题中所求视为变量 y，与 y 相依的某一未知量视为另一变量 x，然后按题设要求建立 y 与 x 的函数关系式，确定 x 的取值范围，利用函数性质，将问题求解.

例 2　甲、乙两地相距 S 千米，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米/小时.已知汽车每小时的运输成本，由可变部分和固定部分组

成：可变部分与速度的平方成正比，且比例系数为 b，固定部分为 a 元，为了使全程运输成本最少，汽车应以多大速度行驶？

建模求解　全程运输成本=汽车每小时的运输成本×汽车行驶时间=(可变部分＋固定部分)×$\frac{行程}{速度}$，设全程运输成本为y元，车速为x千米／小时，于是可建立y与x的函数关系式：

$$y=\frac{S}{x}(bx^2+a)=S(bx+\frac{a}{x}),\ x\in[0,\ c].$$

因为S，a，b∈R^+，所以

$$y=S(bx+\frac{a}{x})\geq 2S\sqrt{ab},$$

等号当且仅当$\frac{a}{x}=bx$，即$x=\sqrt{\frac{a}{b}}$时取到.

(1)若$\sqrt{\frac{a}{b}}\leq c$，则当$x=\frac{\sqrt{ab}}{b}$时，

$y_{min}=2S\sqrt{ab}$；

(2)若$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$，则可证得当x＝c时，

$y_{min}=S(bc+\frac{a}{c})$.

综上可知，为了使全程运输成本最少，当$\sqrt{\frac{a}{b}}\leq c$时，车速为$x=\frac{\sqrt{ab}}{b}$千米／小时；当$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$时，车速为x＝c千米／小时.

3　建立数列模型

对于一些产量增长、细菌繁殖、存款利率、物价调节、人口控制等应用问题，往往需要通过观察分析，归纳抽象，建立出数列模型，然后用数列的有关知识加以解决.

例 3　某一信托投资公司，考虑投资额 1600 万元，建造一座星级饭店，经预测，该饭店建成后每年可获利 600 万元.试问三年内能否把全部投资收回？假设银行每年复利计息，利率为 15%，若需要在三年内收回全部投资，则每年至少应获利润多少万元？

建模求解　设每年收益额为 A，年利率为 R，当年投资额为 Q，则 n 年后这笔投资额的实际额为$Q(1+R)^n$，n年收益的总额为

$$A+A(1+R)+\cdots+A(1+R)^{n-1}$$

$$=A\cdot\frac{(1+R)^n-1}{R}.$$

若 n 年恰好还清投资额，则有数列模型：

$$Q(1+R)^n = A\frac{(1+R)^n-1}{R},$$

即 $$Q=\frac{A}{R}[1-\frac{1}{(1+R)^n}].$$

代入数据 n=3，A＝600，R＝15%，得 Q≈1369.9 万元.

所以 3 年后不能把全部投资收回.当 Q＝1600 万元时，由

$$1600=\frac{A}{0.15}[1-\frac{1}{(1+0.15)^3}],$$

得　A≈700.8 万元.

即每年至少应收益 700.8 万元，才能在 3 年内收回全部投资.

4　建立不等式模型

对于题目中涉及到“不超过”、“不少于”、“至少”、“最多”等叙述语句的应用题，往往要抓住有关变量的内在联系，建立出不等式(组)的模型，再通过解不等式的基本方法求出结果.

例 4　甲厂去年上缴利税 40 万元，今年起计划每年平均增长 10%，乙厂去年上缴利税比甲厂少，今年起计划每年平均增长 20%，这样从今年起，第二年乙厂上缴利税就能超过甲厂，但是要到第三年末，才能使从今年开始的三年内上缴的总利税不少于甲厂，求乙厂去年大约上缴利税多少万元？

建模求解　抓住问题中“就能超过”、“不少于”等语句.设乙厂去年大约上缴利税 x 万元，则由条件可建立下列不等式组模型：

$$\begin{cases} x(1+20\%)\le 40(1+10\%), \\ x(1+20\%)^2 > 40(1+10\%)^2, \\ \dfrac{x\times 1.2\times(1.2^2-1)}{1.2-1} < \dfrac{40\times 1.1\times(1.1^2-1)}{1.1-1}, \\ \dfrac{x\times 1.2\times(1.2^3-1)}{1.2-1} \ge \dfrac{40\times 1.1\times(1.1^3-1)}{1.1-1}. \end{cases}$$

解得$33\frac{11}{18}<x<35$，于是取$x=34$.

故乙厂去年大约上缴利税 34 万元.

5　建立三角函数模型

涉及单摆振动、皮带传动、弹簧、三相交流电、角度、测量等实际应用问题，一般可通过三角知识来建模，后转化为三角函数问题来解决.