学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中学教研（数学）

2000年第2期

高考数学科考试创造力考查的探讨

100080　教育部考试中心（海淀路 167 号）　　任子朝

1　问题的提出

在进入新的世纪时期，人类将进入知识经济时代，知识、发明创造对社会发展的作用越来越重要，其劳动者则是掌握知识、具有创造性的人才[1].因此，各国都在积极探讨培养适应知识经济、具有创造力人才的教育模式，使培养的人才在未来社会更具竞争力.中共中央国务院在《深化教育改革，全面推进素质教育的决定》中指出，实施素质教育，就是全面贯彻党的教育方针，重点培养学生的创新精神和实践能力[2].创造性人才的培养离不开创造型人才的选拔，我国的大学入学考试作为选拔人才的重要方式，体现了国家选拔人才的质量要求.本文主要讨论高中学生创造力的特点,高考数学科中考查考生的创造力所采取的措施和方法，以及考查过程中要解决的问题.

2　创造力的概念及中学生创造力的特点

创造力（creativity）一词源于拉丁语 creare，就是创造、创建、生产、造就的意思.创造力作为心理学的一个观念，通常指的是：根据一定的目的和任务，运用一切已知信息，开展能动思维活动，产生出某种新颖、独特、有社会或个人价值的产品的智力品质[3].这里的产品是指以某种形式存在的思维成果，可以是有形的，也可以是无形的，如一种新思想、新概念，或新技术、新工艺，产品强调新颖、独特、有社会或个人价值.可见，创造力应该理解为思维上的一种创新能力和开发能力，是在认识、解决和处理各种问题时体现出来，并且会产生出可知的客观成果.创造力是可检测的，具有可测性与可培养性，创造力存在明显的个体差异性.

根据皮亚杰的认知发展理论，高中生的认知水平处于形式运算阶段[4].此阶段学生的思维水平已得到很大的提高，记忆力、想象力、观察力等能力得到了迅速的发展，并且，思维具有较强的抽象性；他们能够根据自己的目标设定和检验假设，监控自己的思维活动，并能跳出思维的局限性，用新方法解决问题；他们已经善于考虑问题的多方面和可能性，根据问题进行逻辑性的推理、分析，解决问题的准确性和有效性也得到了发展.从认知心理方面来说，高中生已经具备了创造的条件，他们的创造力就是运用所学知识、技能，获得知识、解决问题的能力，并且问题相对于学生个人来说是新颖的.高中生的创造力具有三个比较显著的特点：第一是独立性，对问题是经过自己思考、分析、解决的，是自己的见解，而不是其他人已经采用的方法的简单重复.第二是相对新颖性.对于学生本人来说，问题的整个解决过程应该是新颖的，是以前没有遇到的.这种创造主要是一种“类创造”，是个体发展中的第一次的“创造”.第三是在学科学习中表现出来并具有个体的差异性和可检测性.

高中生的主要任务是学习，创造力的培养是最关键的，主要是为今后更

多、更好的发明创造奠定基础.高中生的创造力，更具有普遍意义的应该是创造潜能，或者说具有创造能力和创造精神.从本质上说，创造就是困难问题的解决过程，是一个发现问题、组织问题、解决问题的过程[5].

那么，创造力与一般认知能力的关系是怎样的呢？从认知心理学的角度来看，创造力是人对客观世界的一种特定的反映方式，创造性思维是人脑最高层次的机能.因此，创造力是人的一种认知能力，但高于我们所说的一般认知能力，诸如理解、推理、分析、综合等能力.创造力必须以一般认知能力为基础，并且，在创造过程中一般认知能力起着极其重要的作用，没有一般的理解、推理、分析、综合等能力，创造性活动是不可能产生的.反而言之，在创造性活动中包含着理解、推理、分析、综合等能力，创造力的培养也是通过一般认知能力的培养来获得的.

3　数学高考中对创造力的考查

数学科对创造性思维能力的考查，主要在三个方面进行.独创性（originality）:即产生新的思想的能力,发现和产生一些新颖简捷的解法.流畅性（fluency）：即思维敏捷，反应迅速，对于特定的问题情境能顺利产生多种反应或提出多种方案.灵活性（flexibility）：即具有较强的应变能力和适应性，具有灵活改变定向的能力，能发挥自由联想.

对考生创造能力的考查在试题中主要体现为：

3.1 创设一定数量的新颖情境的试题，考查创新能力

判断一个活动是否具有创造性，主要依据在解答问题中采用的方法、最终的结果是否是新颖的、独特的.因此，在高考中鉴别考生是否具有创造力的有效方法就是编制新颖的试题，要求考生应用已知的方法和知识，分析一些情境的特点，找出已知和未知的联系，重新组织若干已有的规则，形成新的规则，尝试解决新的问题.所谓新颖是相对于绝大多数考生来说，相对于用常规的方法难以解答，要求考生思维灵活、敏捷，创造性地应用知识，解决问题.

例 1　已知 a、b、c 是实数，函数

$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当$-1\le x\le 1$时，$|f(x)|\le 1$.

（Ⅰ）证明：$|c|\le 1$；

（Ⅱ）证明：当$-1\le x\le 1$时，$|g(x)|\le 2$；

（Ⅲ）设 $a>0$，当$-1\le x\le 1$时，$g(x)$的最大值为 2，求 $f(x)$.

本题的设计比较新颖,没有常见的解题模式可以套用.题目以二次函数和一次函数为载体，着重考查对函数概念的理解、含绝对值不等式的性质、抽象的数学问题的具体化等.首先本题没有设计为证明某个函数的单调性,而是考查对函数单调性概念的理解和运用.其次题目中没有给出 a、b、c 的具体数值，而是给出比较抽象的函数表达式，要求考生根据题目的条件导出一些关系式：$|f(0)|\le 1$,

$$f(x)=x\cdot g(x)+c,\ g(1)=f(1)-f(0),$$

进而求出具体函数.同时本题还要求进行等式和不等式的转化,运用双边不等式$-1\le f(0)\le -1$得出等式$c=f(0)=-1$；根据二次函数的极小值点，通

过逆向思维求出函数 f（x）的一次项系数.

例 2 某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当的范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴.设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克，政府补贴为 t 元/千克.根据市场调查，当 $8 \le x \le 14$ 时，淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系：$P=1000(x+t-8)$（$x \ge 8$，$t \ge 0$），

$$Q=500\ (8 \le x \le 14).$$

当 P=Q 时的市场价格称为市场平衡价格.

（Ⅰ）将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求出函数的定义域；

（Ⅱ）为使市场平衡价格不高于每千克 10 元，政府补贴至少为每千克多少元？

本题是一道实际应用问题，试题密切结合当时的中国社会经济生活，背景新颖.同时题目引入了一些新的概念，如市场平衡价格、政府补贴等.试题的要求也不同于一般的数学试题，要求考生首先读懂题目，理解题目的条件和结论，将其转化为数学表达式，以便应用数学工具解决.题目根据问题的实际背景，对各参数限制了其取值范围，在数学运算过程中要求灵活地应用这些要求求解.

例3 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1、x_2 满足

$$0<x_1<x_2<\frac{1}{a}.$$

（Ⅰ）当 $x \in (0, x_1)$ 时，证明：$x<f(x)<x_1$；

（Ⅱ）设函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，证明：$x_0<x\frac{1}{2}$.

本题的几何意义非常明确，给定的抛物线与一条过原点的特殊直线有两个交点，在此情况下，研究某些给定点之间的关系，进而研究点的终极状态.这个问题更深刻的数学背景是动力学问题，其含义是设 x_1 和 x_2（其中 $x_1<x_2$）是 $f(x)$ 的不动点，问在何种条件下 x_1 是 $f(x)$ 稳定不动点，以及它的吸引域有多大.

高考中每年都有新颖题，特点是其中涉及的知识和方法是学生已经学得或试题本身告诉考生的，但涉及的过程、情境或问题是新颖的，要求考生根据所学的知识和试题所给的信息，来分析、解决问题.这种试题本身很好地考查了考生的创造性，在很大程度上体现了考生对问题的敏感性、洞察性、独创性.

3.2　设计各种层次的综合性试题,考查综合运用各种知识解决问题的能力

考生解决这类问题的过程是综合运用各种能力的过程，因此，高考中对能力的考查也应强调综合考查.

例4 已知过原点O的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于A、B两点，分别过 A、B 作 y 轴的平行线与函数的图象交于 C、D 两点.

（Ⅰ）证明：点 C、D 和原点 O 在同一条直线上；

（Ⅱ）当 BC 平行于 x 轴时，求点 A 的坐标．

本题考查对数函数的图象与直线的位置关系．两条平行于 y 轴的直线，如果与两个不同的对数函数的图象分别有两个交点，若其中一个对数函数的图象中的这两点的连线通过原点，则另一个对数函数的图象中的两点也必然通过原点.这是由于两个对数函数$f(x)=\log_a x$、$f(x)=\log_b x$之间有这样的关系：$\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.在此，很难分清是用代数方法研究几何问题，还是用几何方法研究代数问题，这是考查综合运用数学知识的能力和学习潜能的更高层次的要求．

例 5 设曲线 C 的方程是 $y=x^3-x$，将 C 沿 x 轴、y 轴正向分别平行移动 t、s 单位后得曲线 C_1．

（Ⅰ）写出曲线 C_1 的方程；

（Ⅱ）证明：曲线C与C_1关于点$A\left(\dfrac{t}{4},\dfrac{s}{2}\right)$对称；

（Ⅲ）如果曲线C与C_1有且只有一个公共点，证明：$s=\dfrac{t^3}{4}-t$，且 $t\neq 0$.

本题设计思想是试题能够体现代数表述及其推理与其几何背景的平衡，根据这一立意，命题选取了考生熟悉的平面曲线的平移、对称和旋转以及相互之间的关系作为出发点，讨论相应的代数表述和有关函数基本特性的代数推理.本题以三次函数设定情境，将平移、对称、相交等概念有机地结合在一起，讨论曲线C和C_1之间的关系.本题很难按其所涉及具体的知识点、按一般的分类将其归入代数或解析几何类试题，而是把中学教学里函数及图象的基本概念、基本性质与曲线的几何变换（平移、中心对称）的性质，以及用代数方程研究曲线位置关系的思想方法等，许多重要内容融合在一起，命题颇具创意．

3.3 开发新的题型，考查灵活运用知识的能力

近几年在高考命题时，编拟了一些作答方式比较新颖的试题，如多个正确选项的选择题、开放题、探索题等，从解题过程反映出了学生的灵活性、敏感性、创造性，考查考生创造性地运用所学知识解决问题的能力．

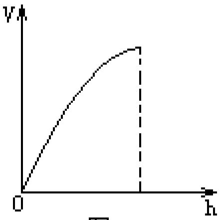

图1

例 6　向高为 H 的水瓶注水，注满为止．如果水量 V 与水深 h 的函数关系如图 1，则水瓶的形状是（　　）．

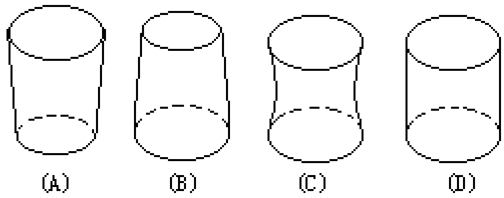

图2

首先，在设计本题时没有给出通常的函数关系解析式，而是给出的函数关系的图象，用图象呈现数量关系、题目的条件和要求，要求考生根据注水量和水深的函数关系图象，判断水瓶的形状.设计本题的另一个想法就是加强数学意识和数学化的能力的考查.本题与常规的试题不同，本题没有一个数字，所给的几何旋转体其注水量与水深的函数表达式并非都可以用中学的数学知识求出来，但可由曲线的变化情况分析容积的变化情况.其次是要按照对函数图象和性质在整体意义上的理解，根据对各种几何体的性质及其体积自下而上变化的比较灵活的认识，把数学的合情推理和逻辑推理结合起来，作出正确的判断.

一般的应用问题是由实际问题建立数学模型，而本题是给出数学模型，去解决实际问题，考查了逆向思维能力.解决本题可有两种方法：（1）定性判断，从函数的单调性考虑，观察函数图象的发展.（2）定量判断.按照我们常说的“时间过半，任务过半”，可取$h=\frac{H}{2}$，由图象可知f（$\frac{H}{2}$）＞$\frac{V_0}{2}$.

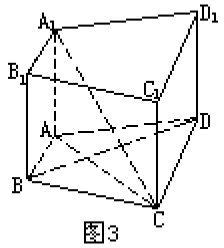

图3

例7　如图3，在直四棱柱$A_1B_1C_1D_1$—ABCD中，当底面四边形ABCD满足______时，有$A_1C\perp B_1D_1$.本题是一道典型的开放型和探索性的试题，题目以直四棱柱$A_1B_1C_1D_1$—ABCD为依托，要求考生对底面四边形ABCD补充一定的条件，使之能推出$A_1C\perp B_1D_1$的结论.这样的结论并不唯一，ABCD是正方形；ABCD是菱形；ABCD是等形；AB=CD且CB=CD；AB=BC且AD=CD.可以充分考查考生的空间想象能力和分析判断能力.试题的整个分析过程一定程度上反映了学生的洞察力、思维的灵活性、流畅性，鉴别出考生是否能够根据给定的情境提出多种解答、是否能够打破以往的旧模型建立新模型的能力，从考后的结果来看，该题考查灵活性、创造性的效度较好.

例 8 定义在区间（－∞，＋∞）的奇函数 f（x）为增函数；偶函数 g（x）在区间［0，＋∞）的图象与 f（x）的图象重合.设 a＞b＞0，给出下列不等式：

①f（b）－f(－a）＞ g（a）－g（－b）；

②f（b）－f(－a）＜ g（a）－g（－b）；

③f（a）－f(－b）＞ g（b）－g（－a）；

④f（a）－f(－b）＜ g（b）－g（－a）.

其中成立的是（　　）．

（A）①和④　　　　　　　　（B）②和③

（C）①和③　　　　　　　　（D）②和④

本题实际上是有多个正确选项的多项选择题，成立的不等式是①和③，但由于在中国的数学科考试中，选择题都是只有一个正确选项，因此将选项进行了组合，改编成单项选择题.

3.4 统筹设计整个试卷，发挥各种题型的功能

高考数学科选用的题型有四选一的选择题、填空题和解答题.因为主、客观性试题各具优缺点.因此要充分发挥各自的优点,使之在考试中得到最佳组合.虽然客观题是封闭式的答题方式，答案事先给定且唯一，但其解决的过程仍具有开放性,可以通过一题多解考查考生的创造性.主观题有利于学生比较开放、灵活地解决问题，充分发挥其发现问题、分析问题、解决问题的能力，有利于培养学生的发散性思维,对创造力的培养有较大的贡献.高考数学科在整个试卷中设计了不同层次、不同难度的问题，深入浅出，体现多层次思维深度的考查要求,使不同水平的考生都能发挥其所长.同时在试卷中适当提供解题所用的知识，把考核重点放在创造能力的考查上.

1991～1999年数学试卷结构

	1991	1992	1993	1994	1995
选择题（%）	36.0	45.3	45.3	43.3	43.3
填空题（%）	16.0	16.0	16.0	13.2	13.2
解答题（%）	48.0	38.7	38.7	43.5	43.5

	1996	1997	1998	1999
选择题（%）	43.3	43.3	43.3	40.0
填空题（%）	13.2	13.2	13.2	13.2
解答题（%）	43.5	43.5	43.5	46.8

1991～1998年数学试卷难度

	1991	1992	1993	1994	1995
难度	0.59	0.65	0.58	0.55	0.59

	1996	1997	1998	1999
难度	0.55	0.59	0.57	0.51

4　创造力考查的讨论

从每年命题和高考后的结果来看，反映出了几个问题：

第一，创造力的存在是普遍的，而不仅仅是少数人具有创造力.正如吉尔福特所说：迄今人们获得的最有意义的认识之一是，创造性再也不必假设为仅限于少数天才，它潜在分布于整个人口中间[6].高考就是为高校选拔这些

有潜能的优秀的学生，因此，高考中考查创造力是十分必要的.考查过程中应注意切合考生的水平，并且根据考生水平的实际差异，设计不同层次的试题，使各水平的考生创新能力都得到有效的考查.

第二,学科内容考查与创造力考查的关系.我国现行高考是以课程为基础的考试,运用学科教学内容考查创新能力是我们试题的特色.在命题中应该以学科知识为基础，按照“依据教学大纲，但不拘泥于教学大纲”的命题改革指导思想，注意考查学科的内在联系，包括各部分知识在各自发展过程中的纵向联系，以及各部分知识之间的横向联系.注重知识的综合性，从学科的整体高度考虑问题,在知识网络交汇点设计试题.同时注意学科之间的交叉和渗透，全面考查考生的创造能力.

第三，试卷结构的改革.继续进行题型功能和题型改革的研究和试验，进一步深入研究题型功能，改革试卷结构，使之更有利于创造性的发挥和鉴别.提高选择题命题水平，充分发挥主观题的作用，进一步开拓主观题的考查功能.根据学科特点和选拔的要求，合理确定选择题和非选择题的比例.

第四，由于高考的社会性，必须保证高考的公平竞争.高考试题的编制需要考虑到各个方面，要考虑控制评分误差，阅卷工作量，对评卷教师的要求等.高考鉴别考生解决问题的能力，主要从结果来评定，因此，高考中创造力的考查必须考虑到可操作性以及试题的效度和信度.

参考文献

1　李文平.关于知识经济的思考.光明日报，1998，4，10

2　中共中央国务院.深化教育改革，全面推进素质教育的决定.人民日报，1999，6，15

3　林崇德，辛涛.智力的培养.杭州：浙江人民出版社，1996，11

4　林崇德.发展心理学.北京：人民教育出版社，1995，11

5　俞国良.创造心理学.杭州：浙江人民出版社，1996，11

6　邵瑞珍.教育心理学.上海：上海教育出版社，1988，1

7　教育部考试中心.1999 年普通高等学校招生全国统一考试说明.北京：高等教育出版社，1999，1

谈数学课堂教学中思维热点的组织

215200 江苏省吴江市高级中学　姚伟斌

所谓思维热点，就是能够引起学生积极思维，对问题产生共鸣、诱发思维情趣的问题.教师组织课堂思维热点的关键，在于教师在教学设计时，要根据教材的内容、学生的实际和本人的教学特点，做到精心选材、精心设计、精心安排.一般地说，思维热点的组织安排，可以从以下几个方面来考虑.

1　抓住教材内容通过“导问”组织思维热点

教师好比骑手，上课好比驾驭着一匹马，前进的方向、速度、方式都由骑手控制着.同样，教师对学生的思维形式、方向、深刻程度也起着导航塔般的作用.教师可以根据课本内容，由浅入深、由低层次到高层次，设计一个个问题，指导学生去探索，寻找答案，从中获得知识的真谛.比如在讲授反正弦函数时，就可安排如下问题：什么叫函数及反函数？y=sinx 是否有反函数？怎样的情况下才具有反函数？如何定义反函数？设置悬念，迫使学生去思考，引导他们讨论、回答，积极参与.使他们经常处于积极思维状态，既获得知识，又促进思维的发展，品尝思维成功的乐趣.

2　根据教材知识点，通过模型、实验组织思维热点

如在立几教学中，要针对学生初学立几，空间想象能力差，立体观念淡薄，思维容易混淆、阻塞的特点.充分运用模型教具展示给学生看，使他们对几何体有直观的认识,通过分析归纳得到理论的再认识.有时也可以让学生亲自做实验，拓展思维的力度.如在讲授异面直线以前，可以让学生拿出两根木棒，要他们摆出各种位置，可以分别得到平行、相交、重合等情形，而有一种特殊的位置很奇怪，指导学生得出特征：两直线始终不处在同一个平面上，从而揭示异面直线的概念.这种做法可以充分调动学生的形象思维和探求新知识的欲望，加深对概念的理解，认识内涵，激发学生学习的兴趣.

3　利用公式训练组织思维热点

教师通过不断变换命题的已知条件，产生一个个既类似又有区别的问题，形成一浪高过一浪的气势扑向学生，使学生产生浓厚的兴趣，在挑战中寻找乐趣，在积极思维中培养思维的坚韧性.比如研究三棱锥（即四面体）顶点的射影与底面三角形“五心”的关系时就可设置以下问题：

① 当三棱锥是正三棱锥时；
② 当三条侧棱的长度均相等时；
③ 当侧棱与底面所成的角都相等时；
④ 当各个侧面与底面所成的二面角相等且顶点射影在底面三角形内时；
⑤ 当顶点与底面三边距离相等时；
⑥ 当三条侧棱两两垂直时；

⑦ 当三条侧棱分别与所对侧面垂直时；

⑧ 当各个侧面在底面上的射影面积相等时；

⑨ 当各个侧面与底面所成的角相等且顶点在底面三角形外时.

通过几个排比式问题的提出，形成一浪高过一浪的气势，可以极大地调动学生的思维，进一步巩固线线、线面垂直关系，尤其是三垂线定理的掌握.既加深知识的理解，又开阔了视野，增添兴趣，培养思维品质.

4 利用一题多解或多题一解组织思维热点

一题多解或多题一解在一定程度上可吸引学生多角度观察、联想，获得多种解题途径，充分展示思维的广阔性、深刻性和灵活性，使学生感受到数学的美妙与情趣，有利于学生思维品质的提高.如题目：已知函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，试比较 $|f(a)-f(b)|$ 与 $|a-b|$ 的大小.可以有以下解题途径：

① 按证明绝对值不等式的常规方法，经过平方去绝对值符号，作差比较，利用配方法证明.

② 用商比法，利用共轭根式有理化分子，再用放缩法证明.

③ 注意函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 表示双曲线 $y^2-x^2=1$ 的上支，$\frac{|f(a)-f(b)|}{|a-b|}$ 是双曲*线上两点（a,f（a））与（b,f（b））连线斜率的绝对值，于是问题转化为双曲线上支任一弦所在直线斜率的估计问题，而双曲线的渐近线斜率为±1，问题即可得证.

④ 注意函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 的结构特征，用三角代换令 $x=tg\theta$，转化为三角不等式证之.

⑤ 观察函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 的特点，联想到复数的模，可构造复数 $z=1+xi$，利用复数不等式证明.

一题多解或多题一解能很好地吸引学生，不断掀起学生思维的浪花，培养他们发散思维和集中思维的能力.

5 精心挑选典型错例组织思维热点

在课堂教学中，针对学生存在的问题，教师精心挑选错例予以评讲，或诱使学生产生错误，而学生往往对自己的错误较为敏感，当他们一旦知道自己解题存在问题，势必会产生浓厚的兴趣，此时老师恰到好处的点拨思维，使学生领悟到思维的故障在哪里，从而达到掌握知识的目的.正所谓：重在点拨，贵在引导，妙在开窍.如有这么一题：使实系数二次方程 $2kx^2+(8k+1)x+8k=0$ 有两个不相等的实数根的 k 的范围是（　　）.

（A）$k<-\frac{1}{16}$

（B）$k>-\frac{1}{16}$

（C）$k\geq-\frac{1}{16}$

（D）以上都不对

有许多同学选择（B），这是忽视了“实系数二次方程首项系数 k≠0”这个条件，点拨之下，学生都有种恍然大悟的感觉，加深了印象，以后再也不敢小瞧二次函数方程首项系数了.又如已知$\sin+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则 t θ的值为（ ）.

（A）$\pm\frac{4}{3}$ （B）$-\frac{3}{4}$

（C）$-\frac{4}{3}$ （D）$-\frac{4}{3}$或$-\frac{3}{4}$

许多同学按一般思路做下来都选择了（D），而没有注意到题目中隐含条件 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，

$$\text{从而}\quad \mathrm{tg}\,\theta<\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=-1.$$

通过分析，使学生领悟到错误的症结所在，不仅排除了障碍，加深了印象，还深化了思维.

6 利用学生心理上的“好奇驱动”因素组织思维热点

一般来说，学生有“喜新厌旧”的心理因素，对于新鲜事物乐于探索和了解.教师如能在讲课时时常结合一些新颖的、各种数学竞赛中的题目，以及数学在现代科学、实际生活中的应用性问题（面向当今素质教育和高考的方向），古今中外数学史上的一些典故、轶事，当今数学这门基础学科的发展概况，介绍一些世界性的难题，比如哥德巴赫猜想、费尔马大定理等等，肯定会引起同学们的浓厚兴趣，难保不会不对他们产生一点影响，从而奠定自己的理想.要知道陈景润就是从中学老师的介绍中知道哥德巴赫猜想的,从而使其为摘取这颗数学皇冠上的明珠而奋斗一生.

总之，教师在备课时，要根据教材，结合学生的年龄特征和认知水平等实际情况，有目的、有步骤地设计好思维的热点，以利于更好地提高课堂教学效果.

灵活运用提问技巧　培养学生思维品质

430208 武汉市江夏区金口中学　魏仁洪

提问，是课堂教学的重要环节，是师生之间进行信息和情感交流的重要途径.巧妙地运用提问技巧，能激发兴趣，拓广思路，启迪思维，充分发挥学生在学习中的主动精神，从而培养学生良好的数学思维品质.

1　盲点提问，培养学生思维的严密性

盲点，即在正常思维中不容易被注意到但在实际运用中又往往会影响人们正确思维的问题.针对学生思维不严密，容易以偏概全、疏忽隐含条件、只看问题的表象等问题，先让学生练习，再针对盲点设问，引导学生“再发现”差错，透过现象看本质.让学生全面思考问题，从而培养学生思维的严密性.

例1　已知数列的前n项之和为$S_n=10_n-n^2$（n∈N），试求数列｛$|a_n|$｝的前n项和S_n'.

绝大多数学生这样解：

错解 ∵$S_n=10n-n^2$（n∈N），

∴ $n=1$时，$a_1=S_1=9=-2\times1+11$，

n≥2 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=10_n-n_2-[10（n-1）-（n-1）^2]=-2n+11$，

因此 $a_n=11-2n$（n∈N），

由　$a_n=11-2n\geq0$ 得 $n\leq5\frac{1}{2}$；

由　$a_n=11-2n<0$ 得 $n>5\frac{1}{2}$，

因此 当 1≤n≤5，n∈N 时，$a_n>0$；

当$n\geq6$，n∈N时，$a_n<0$，

$\therefore S_n'=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+|a_6|+|a_7|+\Lambda+|a_n|$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-(a_6+a_7+\cdots+a_n)$

$=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+\cdots+a_n)$

$=2S_5-S_n$

$=n_2-10n+50.$

对盲点提问：$S_1'=|a_1|=9$适合上式吗？由此提出问题再引导学生发现错误，从而培养学生思维的严密性.

解 同上先求出$a_n=11-2n$（n∈N），且当0 $1\leq n\leq5$，n∈N时，$a_n>0$；

当$n\geq6$，n∈N时，$a_n<0$

讨论： 当 1≤n≤5 时，

$$S_n' = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n = 10n - n^2;$$

当 $n \geq 6$ 时，

$$S_n' = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + |a_6| + |a_7| + \cdots + |a_n|$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - (a_6 + a_7 + \cdots + a_n)$$
$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_n)$$
$$= 2S_5 - S_n$$
$$= n_2 - 10_n + 50.$$

因此 $S_n' = \begin{cases} 10 - n^2, & 1 \leq n \leq 5, n \in N \\ n^2 - 10n + 50, & n \geq 6, n \in N \end{cases}$

2 引伸提问，培养学生思维的深刻性

采用引伸提问，把问题引向深处，让学生在新的情境中解答，使学生学一个题会一类题，举一反三，有利于培养学生思维的深刻性与探索精神.

例2 若复数z_1、z_2、z_3**满足**$z_1 + z_2 + z_3 = 0$，$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$，**求证：以**$z_1$、$z_2$、$z_3$**所对应点为顶点的三角形是等边三角形.**

证明该题后，提问：该题有哪些变式呢？引导学生们得到：

变式1 在复平面内已知正$\triangle Z_1Z_2Z_3$**的三个顶点与复数**z_1、z_2、z_3**对应，且**$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$，**求证：**$z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

变式2 在复平面内已知正$\triangle Z_1Z_2Z_3$**的三个顶点与复数**z_1、z_2、z_3**对应，且**$z_1 + z_2 + z_3 = 0$，**求证：**$|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

变式3 在复平面内已知正$\triangle Z_1Z_2Z_3$**的三个顶点与复数**z_1、z_2、z_3**对应，且**$|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$，**求证：**$z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

变式4 若复数z_1、z_2、z_3**满足**$z_1 + z_2 + z_3 = 0$，$|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$，**求证：以**$z_1$、$z_2$、$z_3$**的对应点为顶点的三角形是等边三角形.**

可以发现上述变式都是可证的.这样由一个问题引伸出一类问题,可以充分调动学生的探索精神，从而培养学生思维的深刻性.

3 变换提问，培养学生思维的灵活性

思维的灵活性是指思维活动的智力灵活程度.通过变换提问,可引导学生根据客观条件的变化及时调整思维方向，克服思维的呆板性，即保守性或思维定势，从而提高思维的灵活性.

例3 当m**为何实数时，抛物线**$y = x^2 - mx + 1$**与**x**轴无交点？**

讲解后，变换出下列问题，并提问：它们有什么联系？

变形1 m为何值时，二次函数 $y=x^2-mx+1$的值恒大于0？

变形2 m为何值时，二次三项式 x^2-mx+1在实数范围内不能因式分解？

变形3 m为何值时，方程$x^2-mx+1=0$无实根？

变形4 m为何值时，不等式 $x^2-mx+1>0$的解集为一切实数？

可以看出，上述几个变换问题，都是例 3 的转化形式.通过这些变换，可以活跃思路，开阔视野，加强各知识间的联系，从而培养学生的应变能力.

4 联想提问，培养学生思维的广阔性

思维的广阔性即思维的广度，是探索问题的能力.教学时，运用联想提问可引导学生横向联系，数形结合，拓广思路，从而培养学生思维的广阔性，提高发散性思维能力.

例4 已知a、b、c、d都是实数，求证：$a^2+b^2+c^2+d^2\geq(a-c)^2+(b-d)^2$.

提问：该题有哪些证法？引导学生们讨论、联想.

证法 1 （分析法）

欲证 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

$\geq\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$，

只需证$a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}$

$\geq a^2+c^2-2ac+b^2+d^2-2bd$.

只需证 $\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}\geq-(ac+bd)$，

只需证 $\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}\geq|ac+bd|$，

只需证 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$，

只需证 $a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$

$\geq a^2c^2+b^2d^2+2abcd$

只需证 $(bc-ad)^2\geq0$.

最后的不等式恒成立，因此，原不等式成立.

联想到不等式中$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{c^2+d^2}$，$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$可写成$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$，$\sqrt{(c-0)^2+(d-0)^2}$，$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$等距离形式，提问：能否运用* 距离的有关性质证明呢？又联想到不等式中$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{c^2+d^2}$，$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$均可看作复数$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，$z_3=(a-c)+(b-d)i$的模的形式，提问：能否运用复数模的性质证明呢？由此引导同学们得到下面证法.

证法 2 如图 1，建立直角坐标系，设 O（0，0）、A（a，b）、B（c，d），则$|OA|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|OB|=\sqrt{c^2+d^2}$，$|OC|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

在△ABC中由三角形三边之间的关系知$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq$ $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

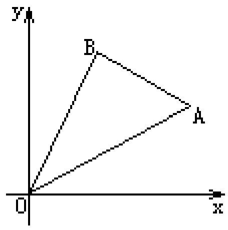

图 1

（当 A、O、B 三点共线时等号成立）

证法3 设复数$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，则$z_1-z_2=(a-C)+(b-d)i$，

∵ $|z_1|+|z_2|\geq|z_1-z_2|$，

∴ $a^2+b^2+c^2+d^2$

$\geq(a-c)^2+(b-d)^2$.

这里运用联想提问，引导学生们运用代数知识、解几知识、复数知识来解题，加强了各知识间的联系，培养学生形成多角度、多层次的立体思维.

5 辨析提问，培养学生思维的批判性

通过展示学生解题的典型错误与正确答案，引导学生辨析并提出问题，帮助学生弄清错误的根源，从而培养学生思维的批判性.

例5 已知$x>0$，求$4x+\frac{9}{x^2}$的极小值.

先给出两种解法：

解法1 ∵ $4x+\frac{9}{x^2}=x+3x+\frac{9}{x^2}$

$\geq 3\sqrt[3]{x\cdot 3x\cdot\frac{9}{x^2}}=9$，

∴$4x+\frac{9}{x^2}$的极小值为9.

解法2 ∵$4x+\frac{9}{x^2}=2x+2x+\frac{9}{x^2}$

$\geq 3\sqrt[3]{2x\cdot 2x\cdot\frac{9}{x^2}}=3\sqrt[3]{36}$,

∴$4x+\frac{9}{x^2}$的极小值为$3\sqrt[3]{36}$.

两种解法结果不同，提问：哪种解法是正确的呢？引导学生们辨析、讨论.

解法1中，$x+3x+\frac{9}{x^2}=9$等号成立的条件$x=3x=\frac{9}{x^2}$中的x值不存在，

故解法1是错误的；解法2中，$2x+2x+\frac{9}{x^2}=3\sqrt[3]{36}$是当且仅当$2x=2x=\frac{9}{x^2}$，即$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}>0$时成立，故解法2是正确的.

6 猜想提问，培养学生思维的独创性

思维的独创性是指打破常规解决问题的一种创造能力.教师运用猜想提问可鼓励、引导学生敢于打破常规，标新立异，大胆猜想，从而培养学生自觉的独创精神.

例6 已知数列｛a_n｝满足$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+2}{a_n}$.求证：对一切自然数n，$a_n$都为整数.

大多数学生很快可以算出$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_4=11$，$a_5=41$，$a_6=153$，但对怎样证明束手无策，怎么办呢？猜想提问：能否假设$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$成立？（p、q为整数）并引导学生用待定系数法求得$p=4$，$q=-1$.因此$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$，再用数学归纳法可证明该等式成立，则问题易证下面用数学归纳法证明$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$.

证明 （1）$n=1$时，$a_3=3$，

$4a_2-a_1=4\times1-1=3$，

$\therefore a_3=4a_2-a_1$，$\therefore n=1$时，等式成立.

（2）假设当 n=k（k∈N）时，等式成立，即

$$a_{k+2}=4a_{k+1}-a_k,$$

由题设知，对任何$n\in N$，$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+2}{a_n}$，

$$\therefore \quad a_{k+2}=\frac{a_{k+1}^2+2}{a_k}, \qquad ②$$

$$a_{k+3}=\frac{a_{k+2}^2+2}{a_{k+1}}.$$

由①、②联立消去a_k得

$$a_{k+2}(4a_{k+1}-a_{k+2})=a_{k+1}^2+2,$$

展开移项得 $a_{k+2}^2+2=4a_{k+2}\cdot a_{k+1}-a_{k+1}^2$，

$$\therefore \quad a_{k+2}=\frac{a_{k+2}^2+2}{a_{k+1}}=\frac{4a_{k+2}\cdot a_{k+1}-a_{k+1}^2}{a_{k+1}},$$

$$=4a_{k+2}-a_{k+1}.$$

$\therefore a_{(k+1)+2}=4a_{(k+1)+1}-a_{k+1}$，

即 n=k+1 时，等式成立.

综合（1）、（2）可知：等式$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$对任何$n\in N$都成立.

“没有大胆的猜想，就做不出伟大的创造”（牛顿语）.在教学时应鼓励学生大胆猜想，并引导他们在充分理解题意的基础上提出有新意、有创造性的解法，从而逐步培养学生创造性思维的能力.

总之，善于运用提问技巧，多角度、多层次、多形式地提出问题，引导、启发学生们辨析、讨论、分析、联想等，可以有针对性地培养学生思维的严密性、深刻性、灵活性、广阔性、批判性、独创性，从而培养学生良好的数学思维品质.当然，提问技巧在培养学生对基本概念的理解、对基本技能的掌握上也有着很好的运用效果.

遵循教学原则 创设适学情境

318000 浙江省台州市椒江一中　洪秀满

德国教育家第斯多惠说：“教学的艺术不在于传授的本领，而在于激励、唤醒、鼓舞.”创设适宜情境，正是关于激励、唤醒、鼓舞的一种教学艺术.那么问题情境的创设怎样才能做到科学性与艺术性的统一呢？笔者认为教学原则是创设问题情境的重要依据.它反映了教与学之间的客观规律,是教学活动的准则.本文拟就圆锥曲线的教学，谈谈遵循教学原则，创设问题情境的主要方法.

1 遵循引起动机原则，创设新异悬念情境

动机是一个人的需要和愿望的具体体现.学习动机是唤起学习者行为并导向一定方向的原动力.美国著名心理学家布鲁纳强调:内部动机是促进学习的真正动力.因此，教学时应把问题设置在学生思维的最近发展区，创设新异悬念等情境，以便激发学生的学习兴趣，提高学习效率.

例如在椭圆概念的教学中，教材是这样安排的，P70 给出了椭圆的定义（称之为定义（I）），P76 例 3 给出了椭圆的另一种定义（称之为定义（II））.学生习惯于一种曲线对应着一个定义，对椭圆的两个定义存在着疑虑.教学时，创设问题情境：两种定义同为椭圆，它们之间一定有内在联系，你能找出这内在的联系吗？由于问题的结论是肯定的，课本又无解释，这自然会激发起学生探索其中奥秘的欲望.

此时，教师注意点拨，让学生对课本中椭圆方程推导的两个过程进行对比与研究，将会发现 P70 所得的式子：

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (*)$$

将（*）式再变形得

$$\sqrt{(x-c)+y^2} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right),$$

即 $\dfrac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|x-\dfrac{a^2}{c}|} = \dfrac{c}{a}$ 为定义（II）中的表达式.反之，由定义（II）亦可推导出定义（I）.

由此得出两个定义是等价的，其表达式虽然不同，但所得的轨迹完全相同，其原因就在于（*）式，它既可以转化为动点到两个定点的距离之和为定值的形式，又可转化为动点到定点与到定直线距离之比为一定值的形式，因而可以说（*）式是联系椭圆的两个定义的纽带.两种定义的等价性为在极坐标系中导出圆锥曲线统一方程奠定了基础.

2 遵循启发诱导原则，创设探索、发现情境

启发诱导原则是人们根据认知过程的规律和事物发展的内因和外因的辩证关系提出的.教学时，教师要善于结合教材内容和学生的实际状况，创设探

索，发现情境，提出富有启发性的教学问题，对学生形成一种智力活动的刺激，引导学生积极主动地去获取知识和发展智力.

例如：在某个圆中，设A_1A_2是直径，P_1P_2是与A_1A_2垂直的弦，求直线A_1P_1与A_2P_2的交点的轨迹方程.

笔者在一次习题课中，首先通过一题多解，进而创设问题情境，引导学生作了如下的一系列探索、推广，激发了学生的学习兴趣，取得了良好的教学效果.

探索1 若将原命题的“圆”换为“椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$”，$A_1$、$A_2$是长轴的两个端点，则直线$A_1P_1$与$A_2P_2$的交点的轨迹是什么？通过推导可知交点的轨迹是双曲线$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=1$.

探索2 若将原命题的“圆”换为“双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$”，$A_1$、$A_2$是双曲线的两个顶点，则直线$A_1P_1$与$A_2P_2$的交点轨迹是什么？通过推导可知交点轨迹是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

若将原命题的“圆”换为“抛物线$y^2 = 2px$”，其交点的轨迹又是怎样呢？通过探索推证可得：

探索3 已知抛物线$y^2=2px$（p＞0），F为焦点，E为准线与x轴的交点，作抛物线垂直于x轴的弦P_1P_2，则P_1F与P_2F的交点的轨迹仍是抛物线 $y_2 = 2px$.

在上述的一系列探索基础上，可进一步引导学生归纳出一类“交轨”问题的一般模型：

已知两个定点 A_1、A_2，一条定曲线 C上有相联的两个动点P_1、P_2，求两条动直线A_1P_1与A_2P_2交点的轨迹方程.

至此，学生掌握了解决此类问题的方法实质和规律，若遇到类似的问题也就可以迎刃而解了.同时通过探索，激发了学习的兴趣，从而培养了学生的创造性思维能力.

3 遵循及时反馈原则，创设疑惑陷井情境

布鲁纳认为，没有反应就没有教学.他指出，教师授课要仔细观察学生的不同反应.教学是在刺激反应和纠正反应中进行的.教学过程是信息双向传递的过程，反馈信息愈及时，学生获得学习成果的正确度愈高.我们教师可根据学生反馈的信息，设置疑惑问题，设置“陷井”情境，让学生参与讨论，在讨论中自觉地辨析正误，从而增长防御“陷井”的经验，取得学习的主动权.

例如：双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$上一点P到右焦点的距离是5，则下面结论正确的是（　　）.

（A） P到左焦点的距离为8

（B）P到左焦点的距离为15

（C） P到左焦点的距离不确定

（D）这样的点 P不存在

教学时，笔者根据学生平时练习的反馈信息，有意识地出示了如下两种错误解法.

错解1 设双曲线的左、右焦点分别为F_1、F_2，由双曲线的定义得：

$$|PF_1|-|PF_2|=\pm 10.$$

$$\because\quad |PF_2|=5,$$

$$|PF_1|=|PF_2|+10=15,$$

故正确的结论为（B）.

错解2 设P（x_0，y_0）为双曲线右支上一点，则$|PF_2|=ex_0-a$，得$ex_0=10$，

$\therefore |PF_1|=ex_0+a=15$，故正确结论为（B）.

然后引导学生进行辨析，若$|PF_2|=5$，$|PF_1|=15$，则$|PF_1|+|PF_2|=20$，$|F_1F_2|=2c=26$，即有$|PF_1|+|PF_2|<|F_1F_2|$，这与三角形两边之和大于第三边矛盾.可见这样的点P是不存在的.因此，正确的结论应为（D）.

进行上述引导，让学生比较定义，找出了产生错误的原因即是忽视了双曲线定义中的限制条件，所以除了考虑条件

$$||PF_1|-|PF_2||=2a,$$

还要注意条件 a＜c 和

$$|PF_1|+|PF_2|\geq|F_1F_2|.$$

通过上述问题的辨析，不仅使学生从“陷井”中跳出来，增强了刺激，更主要的是能使学生逐步养成用批判的态度来对待每一个问题的习惯，从而培养了学生思维的批判性.

4 遵循教学过程最优化原则，创设变换优美情境

要全面提高教学质量，就必须优化教学过程，课堂教学要实现由知识型向能力型转化，学生不仅要掌握课本的有关知识，而且要挖掘其潜在的数学思想方法.教学时，创设变换，优美情境，用新观点，从新角度认识事物，从而培养学生的发散思维能力.

例如：对于椭圆的标准方程的推导，教材是通过将方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (1)$$

变形后，经过两次平方化简得到的.为了培养学生发散思维的独特性，教学时，可构造辅助方程（实际是恒等式）

$$[(x+c)^2+y^2]-[(x-c)^2+y^2] \qquad (2)$$

来导出椭圆标准方程.

为此，将（2）÷（1）得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2-\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=\frac{2cx}{a} \qquad (3)$$

由（1）＋（3）得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x \qquad (4)$$

由（1）-（3）得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x \qquad (5)$$

将（4）或（5）式中的一个式子两边平方后，即可得到椭圆的标准方程，方法之妙，令人愉悦.

教学时，根据教学进程最优化原则，笔者不满足现状，进一步引导学生观察（4）与（5）式，事实上（4）与（5）式左端的几何意义是表示椭圆上的点M（x，y）到两焦点F_1（-c，0）、F_2（C，0）的距离，称为点M的两个焦半径，以r_1、r_2表示它的长度.公式（4）与（5）可表示为$r_1=a+ex$，$r_2=a-ex$，这两个焦半径公式会给今后的解题带来很大方便，此时学生更加兴奋不已.在挖掘与品尝创新果实的同时培养了学生的创新能力.

试谈高中数学应用题的教学

430050 武汉市第二十三中学 王方汉

自从 1993 年高考中正式出现数学应用题以来，经过几年的摸索，近年应用题在高考试题中又呈现出加大力度、重在考查能力的趋势.应用题的教学就更加成为中学数学教学中的热点、难点问题.

本文就高中数学应用题教学的有关问题，谈谈个人的一些看法.

首先我们分析一下目前高中学生的现状.

1 学生的现状

（1）生活阅历有限.对高考应用题的背景和情境不熟（例如 1999 年高考试题第 22 题中轧辊机是怎么样的？轧钢机怎样轧钢？等等）.这些问题对不少学生的心理增设了障碍.

（2）建模能力不强.许多学生不知何谓建模，只会模仿简单的应用题的套路.他们对于熟悉的问题（例如增长率问题），一看便知这是什么类型，但见到陌生的问题，特别是文字叙述较长、头绪较多的题目，就不善于理清头绪、分清文字中主次、抓住关键的字句，从而找到正确的数学模型，而是茫然不知所措，索性放弃求解.

（3）抽象能力不强.许多学生对于具体的数字很习惯，但他们看到抽象的字母、特别是看到题中给出的字母与平时做题的意义不同，就非常不习惯.更有甚者，当一个题目中出现多个字母（甚至有的字母还带下标），就越发坠入五里云雾之中（例如 1999 年高考试题第 22 题第一问中有字母 α、β，还有 r_0；第二问中有字母 k、L_k），更谈不上用这些抽象的字母进行思维和运算了.

（4）思维能力不强.首先表现在许多学生对于绝对的数字很习惯，一看到相对的东西（例如1999年高考试题第22题中“减薄率不超过 r_0”），就心里犯难、发怵.

其次表现在许多学生不善于理性思维，不善于在没有具体对象（例如 1998 年高考试题中的质量分数）、对象比较抽象（例如 1995 年高考试题中的政府补贴、市场价格、日供应量和日需求量）和对象不熟悉（例如 1999 年高考试题中的轧钢机）的情况下进行分析和判断.

另外还表现在许多学生把握不住一些表现似乎相同实则迥异的概念.例如 1999 年高考题第二问中“第 k 对轧辊有缺陷，每滚动一周在带钢上压出一个疵点，在冷轧机输出的带钢上，疵点的间距为 L_k”这一段话，不少人把题中“第 k 对轧辊有缺陷”，误认为“有 k 对轧辊有缺陷”；把题中“冷轧机输出的带钢”与“冷轧机第 k 对轧辊输出的带钢”混为一谈.

（5）基础知识和基本技能不扎实.应用题要求我们对在特定的情境下得出的数学式子进行变换,得到应有的结论.这无疑对我们的基础知识和基本技能是一个考验！许多学生在这个考验面前显得软弱无力，顾此失彼，漏洞百出，甚至犯一些不应有的错误（诸如粗心大意的错误）.

不少学生出现下述不良的心理状态：

（1）有严重的焦虑感.深知高考数学必考应用题，而应用题又往往很棘手.这种态度容易产生焦虑的心理；

（2）有强烈的畏惧感.在做应用题的时候，一遇到困难，就心慌意乱、心理失衡而轻易放弃；

（3）有过分的紧迫感.希望能尽快找到解应用题的锦囊妙计，期望有一种灵丹妙药，包治百病.持这种态度往往会是欲速则不达.

2 如何提高学生解应用题的能力

应用题的教学，不应只当作是应试教育的一种手段，而应该成为素质教育的一个重要的组成部分.具有一定的应用数学的意识和能力,是时代对人们提出的新的、更高的要求.培养学生应用数学的意识和能力，使学生学会数学地思维.高考数学应用题的解决，不仅需要扎实的数学功底，还要求有较强的阅读能力、建模能力和良好的心理素质.而数学应用题的教学，正是提高学生综合能力的一个好的途径.

参加高考就是应试.应用题的教学应该是也必须是应试教育的一项内容.提高学生解应用题的能力，是摆在师生面前的实实在在的艰巨的任务，也是对教师的教学能力、学生的学习能力的一个严峻的挑战.为此，提出如下建议：

2.1 应用题的教学要从长计议，抓早、抓实、抓好

要从高一抓起，不能等到高三总复习时再算总账.一种能力的形成和提高，特别是解应用题所需要的综合能力的形成和提高，不是单靠讲几道题、做几次练习就能一蹴而就的.数学应用题的教学应贯穿于整个高中数学教学的始终.

要依纲（大纲）靠本（课本），统筹安排，随着教学进度，精心地适时地切入应用题教学.特别是要做好应用题启蒙教育.高一代数第一章，在学习了函数之后，课本上就有几道利用函数建模的习题（涉及到水渠尺寸、寄信邮资、细胞分裂和弹簧振动等）.对于这几道题一定要下功夫,切莫轻易放过.在教学中，要运用各种教学手段吸引学生，例如可以让全班学生齐声朗读题目，通过师生问答和学生讨论，努力创造一种宽松、和谐的氛围，引导学生积极主动地参入到学习活动中来，使每个学生能最大限度地提高自己的应用数学的意识与能力.通过这几道基本的、简单的应用题的学习，要让学生尝尝应用题的“味道”，从中尝到一点甜头，领略一点成功的喜悦，使他们在潜意识中与应用题建立一种亲近的感情；并初步体会解数学应用题的“理解题意、弄清关系；抓住关键、建立模型；数学解决、检验模型”的数学建模过程和思想.像这样拉开高中应用题教学的序幕，就是应用题教学成功的开端.

还要注意适当地补充练习题和测试题.这是因为现行教材虽对应用题作了一些安排，从题量和类型来看的确也不算太少，但深度明显不够，不足以应付高考.不过，引进的题目一定要有针对性和计划性，切忌盲目性和随意性，也不要搞题海战术.

2.2 总复习时的强化训练将起很重要的作用

在复习的第一阶段，一般的做法是要将各个章节的知识点结合能力的要求重新覆盖、总结一遍，其中必然有应用题的插入复习.这对于应用题尚未过关的学生来说，是“亡羊补牢”的一次极好的机会；对于解应用题有一定基础的学生来说，是一个重新认识、进一步锻炼的极好机会.

在综合复习阶段（或专题复习阶段），还要对应用题进行专题讲座，系统归纳应用题的常见类型、总结数学建模的一般步骤、练习解应用题的辅助手段并提出解应用题时的注意事项.这对全体学生来说,无疑又是一次冲击应用题、把握应用题的极好机会.

在这样的多次复习、反复训练的过程中，只要师生共同努力，配合默契，学生解应用题的能力一定会更上一层楼，甚至起到决定性的作用！

2.3 要强化解数学应用题（即数学建模）常规步骤的训练

解高中数学应用题，一般分为三个步骤：

第一步是“理解题意、弄清关系”

先把题目默读一遍.如果对应用题中所述的背景不熟悉,怎么办？作为一个高中学生，毕竟还是有一定的生活经验的，可以用自己熟悉的事物来类比不熟悉的事物.银行存款有利息，这是学生所熟悉的，可以用来帮助理解诸如涉及增长率（或降低率）的问题；“轧钢机轧钢”不熟悉吧，但不要紧，日常生产中用“压面机压面条”该见过吧，为什么不能用后者来帮助我们理解前者呢？

这里需要特别提醒学生的是：只要理解题目大致属于什么问题就可以了，千万别追究这个问题的细节（例如 1999 年应用题的工业轧钢问题，千万别追究轧钢机到底是怎么样轧钢的等等）.

初步理解题意后，要教学生对题目中与数学建模有关的关键的字、词、句做记号.例如 1999 年应用题可以做如下这样的记号：

右图为一台冷轧机的示意图（图略）.冷轧机由若干对轧辊组成，带钢从一端输入，经过各对轧辊逐步减薄后输出.

（Ⅰ）输入带钢的厚度为 α，输出带钢的厚度为 β，若每对轧辊的减薄率不超过 r_0，问冷轧机至少需要安装多少对轧辊？

$$= \left(\frac{\text{一对轧辊减薄率输入该对的带钢厚度 - 从该对输出的带钢厚度}}{\text{输入该对的带钢厚度}}\right)$$

（Ⅱ）已知一台冷轧机共有 4 对减薄率为 20%的轧辊，所有轧辊周长均为 1600㎜.若第 k 对轧辊有缺陷，每滚动一周在带钢上压出一个疵点，在冷轧机输出的带钢上，疵点的间距为 L_k.为了便于检修，请计算 L_1、L_2、L_3 并填入下表（表略.轧钢过程中，带钢宽度不变，且不考虑损耗）.

然后，要设法弄清题中的各种关系.注意：这一步是解应用题时最重要的一步，头脑要特别清醒，对自己要充满信心.

第二步是“抓住关键、建立模型”

所谓抓住关键，就是要抓住题目各种关系中用于列出数学式子的那一种关系.这里要明白无误地讲,列出的式子只有三种类型:函数关系式、等式（方程）和不等式.换言之，就是要确定题目应属于数学中的哪一种类型：是函数

类型（包括数列类型）？是方程类型？还是不等式类型？

判定应用题属于哪一种类型,并不是无章可循的.一般来说,出现诸如‘ 至少 ” 这样的字眼，应该考虑不等式模型；出现诸如“ 成比例 ”、“ 最大（小） ” 这样的字眼，应该考虑函数（或数列）模型；出现等量关系，应该考虑方程模型.等等.

第一步 “ 理解题意、弄清关系 ” 与第二步 “ 抓住关键、建立模型 ” 是一脉相承的.如果第一步的工作做好了，第二步“ 抓住关键 ” 就不会有太大的困难，接下去的 “ 建立模型 ” 就水到渠成了.

第三步是 “ 数学解决、检验模型 ”

在数学解决（以及在第二步的 “ 建立模型 ” ）的过程中，能否驾驭抽象的字母也是一大问题.字母的运用，说到底还是一个习惯的问题.这一科学习惯的形成，全有赖于平时（特别是高考总复习时）的训练和锻炼.这就不单是应用题的问题了.实际上，在整个高中数学教学中，随处都有训练抽象思维能力和字母运算能力的好素材.作为一个有心人,我们要刻意地掌握字母的灵活运用，逐渐适应在抽象字母表述的情景下解答各类题目.

在 “ 检验模型 ” 时，既要检验所得结果是否符合数学式子，又要检验所得结果是否符合实际意义.

总之，我们在思想上要高度重视数学应用题的教学，在行动上要从长计议、精心安排.对于今后的高考应用题，我们不提倡猜题押宝，要以不变应万变.只要我们把培养学生的能力放到了实处,每个学生的数学应用意识和能力在各自的基础上有了长足的进步，就可以说，我们的应用题教学获得了成功.

参考文献

1 安凤吉.对高考应用题的回顾、预测与建议.中学数学，1999，1

2 徐稼红.1999 年高考数学应用题的背景及启示.中学数学，1999，10

引发猜想培养创造性思维习惯的基本途径

224300 江苏省射阳中学 戴翰林

猜想是人们依据事实、凭借直觉所作出的似真推测，是一种创造性的思维活动.它既是科学发现的先导，也是实现问题解决的一种重要手段.将猜想思维寓于教学之中，教给学生一些猜想的规律和方法，有助于学生全面掌握知识，活跃思维、开阔视野，促进能力的发展和提高.本文以数学问题的求解为例，谈谈引发猜想的几种基本途径，供教学时参考.

1 启迪直觉，引发猜想

通过对所研究的数学问题的结构特征、数据特征、图形特征等方面的细心观察和分析，启动直觉思维，提出合理的猜想.

例 1 在△ABC 中，

$$\sin C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B} \qquad (1)$$

求证：这个三角形是直角三角形.

观察（1）式的结构特征，发现 A 和 B 的地位相当.直觉上可以猜想 C 为直角.因而设法从（1）式中消去 A、B，即可使问题获得解决.

$$\begin{aligned}\sin C&=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}\\&=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\end{aligned}$$

即 $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$

∵ $\cos\frac{C}{2}\neq 0$， $\therefore 2\sin^2\frac{C}{2}=1.$

又 $\sin\frac{C}{2}>0$， $\therefore \sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

得 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{4}$ 即 $C=\frac{\pi}{2}.$

∴ △ABC 是直角三角形.

多么干净利落！解题的突破口在于猜想.而引发猜想的落脚点却是直觉.在这里，直觉思维为拓宽解题思路，丰富解题方法起到了十分重要的作用.

2 借助实验，引发猜想

教学发现的一个重要手法就是实验.为了得出问题的结论,我们常常可以先根据问题的条件进行实验，从中发现规律，提出猜想.

例2 若 $a>0$，$a^2-2ab+c^2=0$，$bc>a^2$，试确定 a、b、c的大小关系.

先用实验的方法寻找解题的线索，暂令 a＝1.

（1）取 b=-1，得

$$a^2-2ab+c^2=3+c^2>0$$

与$a^2-2ab+c^2=0$矛盾；

（2）取 $b=0$，得$bc=0$与$bc>a^2>0$矛盾；

（3）取$b=2$，得$1-4+c^2=0$，即$c=\pm\sqrt{3}$，舍去$c=\sqrt{3}$（否则与$bc>a^2$矛盾），得$c=\sqrt{3}$满足题设条件.

由此可以提出猜想：b＞0，b＞c＞a.再运用不等式的性质对所作出的猜想予以证明即可（这里从略）.

3 通过归纳，引发猜想

通过对所探讨的问题的部分对象进行研究，归纳出蕴含在部分对象之中的共同特征，最后在归纳的基础上，提出合理的猜想.

例3 已知$x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$，试求$x^n+\frac{1}{x^n}$（n∈N）的值.

这里由于 n 不确定，直接计算很难下手，所以可先考察 n 取特殊值 2，3，4 时的结果：

（1）n=2 时，有

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$$

$$=(2\cos\theta)^2-2=2\cos2\theta.$$

（2）n＝3 时，有

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3]$$

（3）n=4 时，有

$$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2$$

$$=(2\cos2\theta)^2-2=2\cos4\theta,$$

由此，不难猜想：$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta$，有了这个结论，就可以将一个求解题转化为证明题，解题的目标就明确了，用数学归纳法不难证明这个猜想是正确的.

4 运用类比，引发猜想

由数学对象 A 联想到与它类似的某个数学对象 B，根据数学对象 B 具有

某种性质的事实，判断数学对象 A 也具有某种类似的性质，这种思维方法称为类比.通过类比，调动大脑中贮存的知识信息，进行知识组块，出现“ 顿悟 ”，从而提出合理的猜想.

例 4 已知等式

$$f(x+m)=\frac{\sqrt{3}+f(x)}{1-\sqrt{3}f(x)}$$

对正常数 m 和任意实数 x 都成立，判断 f（x）是否是周期函数，并说明理由.

由$f(x+m)=\frac{\sqrt{3}+f(x)}{1-\sqrt{3}f(x)}$的结构特征，联想到它与三角等式相似，不妨将二者进行类比.

因为$\mathrm{tg}\,x$的周期是$T=\pi$，它为$\frac{\pi}{3}$的三倍，所以我们可以大胆地猜想F（X）也是周期函数，而且 3m 是它的一个周期.

不难证明这个猜想是成立的，这里从略.

5 模拟构造，引发猜想

数学中有许多问题与现实生活中的很多现象有相似之处，由于受到生活中有关的客观事物、模型或方法的启示，可依据他们与数学对象或问题之间的相似性，通过模拟，提出合理的猜想，构造出有关的数学模型，使问题获得解决.

例 5 证明不等式

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}>x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$$

成立（其中$x_i>0$，$m_i>0$，$i=1$，2，…，n）.

这个不等式的证明，用常规方法颇有难度.但经过仔细观察，发现不等式左边底数的形式类似于质量分别为 m_1，m_2，…，m_n 的 n 个质点的重心横坐标的形式.因此只须考虑这 n 个质点是怎样分布的即可.

我们将原不等式加以变形：

$$\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

$$>(x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n})\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

$$\log_a\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

$$>\frac{m_1\log_a x_1+m_2\log_a x_2+\cdots+m_n\log_a x_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

（其中 a>1）.(*)

故可猜想这n个质点是分布在曲线$y = \log_a x$（a＞1）上的.这n个质点的重心G（x_0，y_0）的横坐标x_0，即为（*）式左边对数的真数；重心 G（x_0，y_0）的纵坐标y_0，即为（*）式的右式.欲证（*）式成立，只须证得曲线$y＝\log_a x$（a＞1）是向上凸的即可.这由对数的性质极易得到，从而原命题得证.

在着手解题之前，引导学生大胆地“猜一猜”，对于提高学生的解题能力,培养学生的创造性思维和勇于探索的精神都是大有裨益的.应当鼓励学生大胆猜想，并且结合教学内容，“教学生学会猜想”.但是，值得指出的是，数学猜想是根据直觉判断认为可能成立,而又未经过严格证明的命题.猜想具有两重性，它既有引导我们走向成功的一面，也有将我们的思维引入歧途的一面.因此，猜想必须证明.要将猜想与证明有机地结合起来，“既教猜想，又教证明”，以防止学生出现“以猜想代替论证”的逻辑错误.对由猜想所得出的各种结论，我们有时可以用演绎法予以推证，有时也可以用反证法来筛选和淘汰,有时还可以用数学归纳法来给出证明.具体方法的选择和运用限于篇幅，这里就不再一一赘述了.

《几何画板》辅助轨迹教学的尝试

222200　江苏省灌云县中学 李平龙

探索动点的运动规律既是解析几何教学的重点，又是高考考查的热点．然而，传统的“粉笔加黑板”的教学手段，由于难以进行“动态”处理，“动点”只能用黑板上的一个静态的“定点”来表示，导致学生难以形成良好的运动观.加之多数情况下只在求出动点的轨迹方程后,才能知道轨迹的真实形状，因而学习过程更觉抽象乏味.数学软件《几何画板》中的动画、追踪、轨迹等功能恰好填补了传统教学的空白,为轨迹教学提供了广阔的前景.本文结合实践谈谈其在辅助轨迹教学中的作用.

1 发现轨迹形状

利用画板创设轨迹发现的情境可有效地化解难点.

例1 已知圆$x^2+y^2=4$与y轴正半轴交于点A.Q是圆上的动点，过点A和点Q分别作圆的切线，它们相交于点P.试求三角形APQ垂心M的轨迹方程.

本题条件复杂、关系隐蔽，传统的以静代动教学由于难以使学生看出M是怎样运动的，因而在解决问题的过程中稍不留意便会误入歧途.然而，利用画板将Q设置为圆上的动点，M设置为轨迹跟踪点，便可创设如图1所示的发现情境：启动动画或拖动点Q，就可发现点M的运动规律.

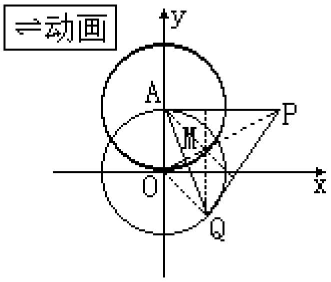

图 1

在CAI课件的帮助下，“形”已如此简单，那么“数”到底是何种形式？至此，学生兴趣盎然，积极思维、主动探究，发现了多种解题途径.令人赏心悦目的解法是，由OA平行且等于QM直接将Q点上移2个单位便产生M点的轨迹.优美解得益于画板的直觉形象功能和调整暗示功能,尤其是它能动态地保持“几何关系”.

计算机辅助教学在激发学生的学习热情，扭转被动学习的不良习惯，最大限度地挖掘学习潜能方面的功能是不可估量的.此外,利用其辅助教学在突出重点、突破难点上功不可没！笔者曾以1995年全国高考压轴题为例，设计了点动、线动等多种引起轨迹的情境（如图 2），引导学生准确地求出了轨迹方程.

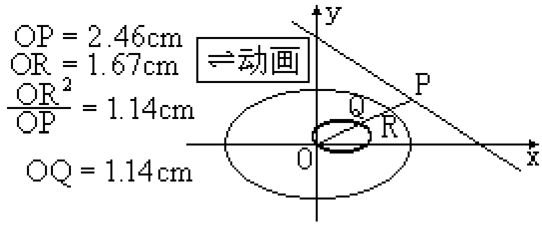

图 2

2 探索轨迹变式

对由字母常数作为已知条件的轨迹题，当动点的轨迹方程确定后，其轨迹形状往往随字母常数（实为参数）的取值不同而变化.几何画板为此提供了丰富的变式素材.

例2 已知点P是圆$X^2+y^2=R^2$上的动点，定点A（a，0）（a＞0）.若∠POA的平分线交PA于M，试求点M的轨迹方程.

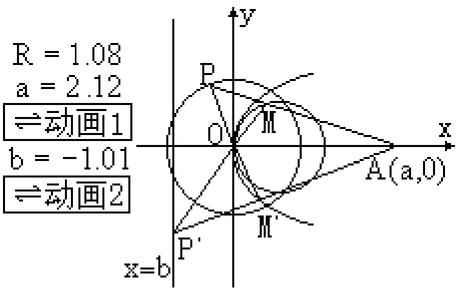

图 3

如图3，拖动点A即可改变a的值，可观察轨迹是否发生质变（动画1）.改变点P的运动形态，也可看出轨迹是否变化：如让点P沿x=-1运动（动画2）就是1999年全国高考压轴题，则可发现轨迹立即发生质的飞跃.从画板上看，学生多以为轨迹是抛物线型，即使拖动点A也未发现轨迹有质变.此时引导学生定量分析求解后，方知直觉结论的“或然性”，进而有助于科学世界观的形成.

高考压轴题在画板辅助下，竟然如此“简单”，这不得不令学生“兴奋”.至此他们群情激昂，纷纷使用几何画板给出点P形形色色的运动规律，大胆地进行变式思维，尽情地做“数学实验”，饱尝现代化教学手段酿制的甘露.有的将角平分线演变为高线、中线尝试轨迹的变化，有的将点A拖到x轴负半轴进行尝试与探索…….这样的轨迹变式，使学生开阔了眼界、活跃了思维，同时也激发了探索发现热情.可见，学生学得的不只是一道题目的解法，而是把握了处理一类问题的规律，达到充分挖掘习题智育功能之目的.

3 检验轨迹类型

解析几何中大量的含参方程,其形状随参数的变化而变化.传统教学中学生通过配方并讨论参数的符号或范围后获解，但其解法的正确性心中没底.而画板可以作出任意一个给出方程的曲线，加上其交互性，可以随意改变参

数的值得到各种情况下的曲线,从而为学习者提供了直观的分析验证的契机.如传统教学中讨论方程

$$(k-4)x^2+(1-k)y^2=(k-1)(k-4)$$

表示曲线的形状，是从数到数进行定量分类讨论的，学生并看不到曲线的真实的变化过程.如图 4 利用画板只要拖动 D 就可以看到 k 连续变化时,方程所表示的曲线由量变到质变的过程，且启动动画按钮又使点 F 运动形成曲线的过程清晰可见.如此，不仅在于检验抽象结论正确与否，更重要的是它真正暴露了知识发生、形成、发展乃至深化过程.

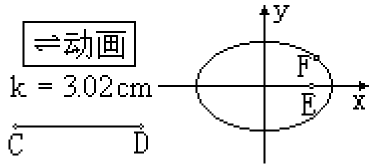

图 4

传统教学中通过方程认识轨迹是无可非议的.几何画板除了为“认识”的曲线提供直感，更为其不熟悉的方程提供“认识”的机会，从而使教学过程言之有“物”.以往为了阐明极坐标方程 ρ= cos（aθ+b）表示的曲线与直角坐标系下函数 y= cos（ax+ b）图象的本质区别，只能靠“空洞”的说教，学生并不信服.现在利用画板可方便地作出其表示的曲线是如图 5 所示的花瓣形，使两类数学对象的区别不言自明！恰当地利用 CAI 课件进行轨迹方程教学，使学生亲身体会到“数”与“形”的有机结合，不仅利于澄清疑点、有效地突出重点，而且有助于数学思想方法的教学，切实培养学生的数学思维能力和创新意识.

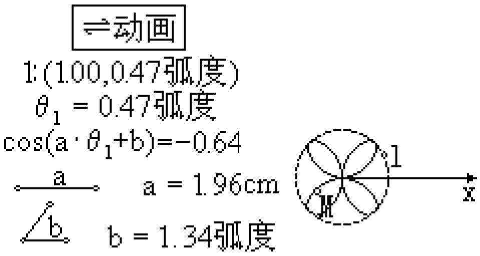

图 5

值得一提的是，《几何画板》操作简单，数学教师稍加培训便能制作课件，待熟悉后就可“完美地”实现自己的“创意”.它用于教学丰富了直观形象、培养了学习兴趣、激发了探索热情，无疑是培养跨世纪创新型人才不可多得的辅助教学软件.

值得注意的是，如果每次轨迹探索，教者都设计轨迹发现的程序，那么必将制约学生的思维能力，尤其是抽象思维能力的发展。因而平时教学中用其突出重点、分解难点、辨析疑点要恰如其分.勿忘计算机教学的功能在于‘辅助”，粉笔加黑板能够说清的内容，最好不要搬弄计量机！